

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

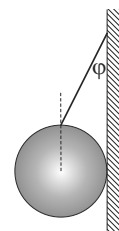
Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

Skupina I

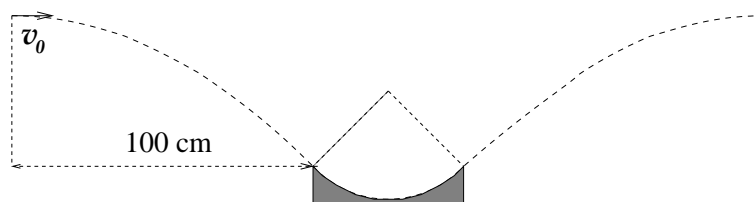
Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost $9,8 \text{ m/s}^2$.

1. Na steno je z vrvico pripeta homogena krogla z maso 5 kg , kot kaže slika. Pritrdišče vrvice na kroglo je natanko nad težiščem krogle, vrvica pa z navpično steno oklepa kot $\varphi = 30^\circ$.



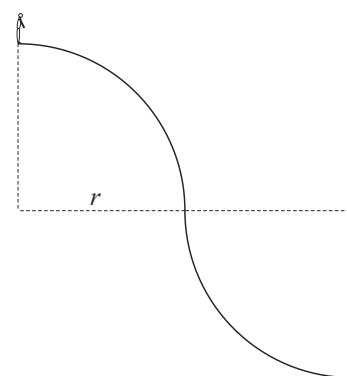
- a) Kolikšna je sila v vrvici?
b) Kolikšen mora biti najmanj koeficient lepenja med steno in kroglo, da krogla miruje v opisani legi?

2. Majhno telo vržemo v vodoravni smeri proti zaledenemu žlebu v obliki četrtkroga, katerega najbližji rob je v vodoravni smeri oddaljen 100 cm od točke meta. Širina žleba med robovoma je 50 cm .



- a) S kolikšno začetno hitrostjo in na kolikšni višini, merjeno glede na rob žleba, moramo vreči telo, da bo vstopilo v žleb pod kotom 45° in nadaljevalo pot tako, kot kaže slika. Zračni upor seveda zanemarimo.
b) Oceni, za koliko % se spremeni čas potovanja telesa do končne točke, v kateri telo ponovno doseže začetno višino, v primerjavi s časom potovanja, ko bi telo potovalo le vodoravno z začetno hitrostjo. Pri tem lahko privzameš, da telo drsi po žlebu ves čas z enako (velikostjo) hitrosti.
c) Izračunaj hitrost na dnu žleba in preveri smiselnost privzetka pri b).

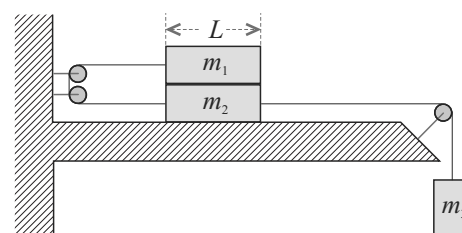
3. Majhen fantič se nahaja na vrhu klanca s poteptanim snegom, čigar oblika je sestavljena iz dveh četrtkrogov z radijem $r = 4,0 \text{ m}$, kot prikazuje slika. Fantič počepne in prične počasi hoditi po klanecu navzdol. Pri določeni strmini mu zdrsne in zato po hrbtu oddrsi do dna klanca.



- a) V kolikšni višini nad dnom klanca mu zdrsne?
b) Kolikšno hitrost doseže na dnu klanca?

Koeficient lepenja med čevlji in snegom je $0,5$, trenje pri drsenju po hrbtu pa zanemari. Fantiča obravnavaj kot točkasto telo.

4. Tri klade so povezane preko sistema lahkih škripcev, kot kaže slika. Klada z maso $m_2 = 3 \text{ kg}$ je na vodoravni podlagi, na tej kladi pa je klada z maso $m_1 = 7 \text{ kg}$. Kladi imata enaki dolžini $L = 1 \text{ m}$ in sta na začetku v legi, kot je narisano na sliki. Koeficienta lepenja oziroma trenja med kladama in med klado z maso m_2 in podlago sta enaka, $k = 0,5$.

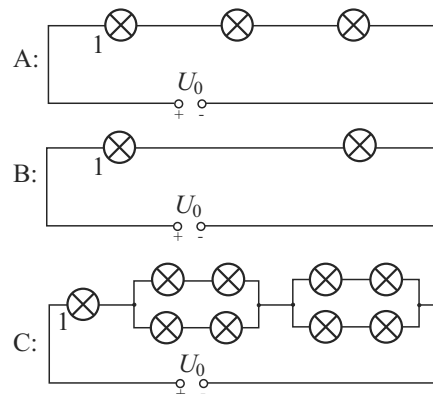


- a) Kolikšna je lahko največ masa m_3 , da sistem še miruje?
b) Naj bo masa $m_3 = 20 \text{ kg}$. Po kolikšnem času od začetka gibanja se začne klada z maso m_1 nagibati? Prijemališče vrvice je na sredini klade.

Skupina II

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost $9,8 \text{ m/s}^2$.

- Urška veže v vezje več enakih žarnic na žarilno nitko in opazuje, kako svetijo. Upor takšne žarnice je odvisen od temperature nitke. Najprej veže na vir napetosti z gonilno napetostjo U_0 in zanemarljivim notranjim uporom tri žarnice zaporedno (to vezavo imenujmo vezava A). Žarnice ne svetijo s polno močjo, zato na isti vir napetosti veže v naslednjem poskusu le dve žarnici zaporedno (vezava B). Zdaj žarnici svetita močno, videti je, da bi ena sama žarnica, če bi jo vezala na isti vir napetosti, pregorela. Končno se Urška odloči, da bo preizkusila še tretjo kombinacijo žarnic (vezava C): prvi žarnici zaporedno doda dvakrat po štiri žarnice, ki so vezane v dveh vzporednih vejah, v vsaki po dve žarnici.

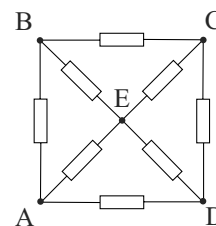


Na sliki so narisane in označene vse tri vezave žarnic, ki jih je naredila Urška. V vsaki vezavi je prva žarnica označena s številko 1.

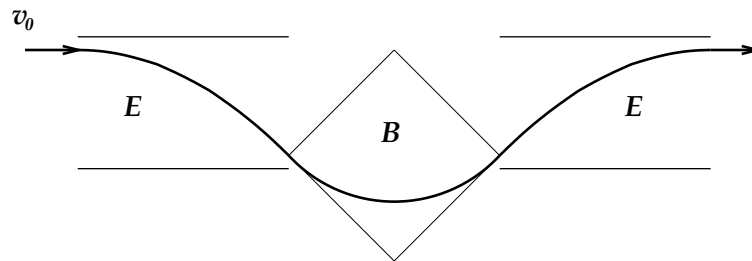
- Urška je pričakovala, da bo žarnica 1 v vezavi C svetila enako kot žarnica 1 v vezju A. Pojasni, zakaj je pričakovala tak izid poskusa. S kolikokrat večjo močjo bi ob takem izidu poskusa svetila žarnica 1 v vezju C od katerekoli druge žarnice v istem vezju?
 - V resnici Urška ugotovi, da sveti žarnica 1 v vezju C enako kot žarnica 1 v vezju B. Izračunaj, kolikokrat je moč, s katero sveti žarnica 1, večja od moči katerekoli druge žarnice v istem vezju. Kolikšna je napetost na žarnici 1 v vezju C?
- Večnadstropni stanovanjski blok ima pet enakih stanovanj, ki so razporejena vsaka v svoje nadstropje. Stanovanja ogrevajo radiatorji. Vrata med sobami so odprta, tako da je temperatura zraka povsod v stanovanju enaka. Stene bloka so narejene iz betona s toplotno prevodnostjo $1,2 \text{ W/mK}$, njihova debelina je 30 cm . Debelina mednadstropnih betonskih plošč je tudi 30 cm . Višina stropa je 275 cm , stanovanja imajo tlorisno mero $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$.

- Kolikšna mora biti moč radiatorjev na kvadratni meter površine stanovanja, da bo temperatura zraka v vseh stanovanjih 22°C ? Zunanja temperatura je -10°C . Strop najvišjega nadstropja in tla najnižjega nadstropja sta dobro toplotno izolirana.
- V srednji etaži se pokvari dotok tople vode v radiatorje. Kolikšna bo temperatura zraka v tej etaži in kolikšna bo potrebna moč radiatorjev na kvadratni meter površine stanovanja v vseh ostalih etažah, da bo v njih temperatura še vedno 22°C ?

- Vezje na sliki je sestavljeno iz štirih upornikov z uporom po 100Ω , ki tvorijo stranice kvadrata, in štirih upornikov z uporom po 200Ω , ki tvorijo njegovi diagonali. Na oglišči B in D priključimo baterijo z gonilno napetostjo 12 V in zanemarljivim notranjim uporom.



- Kolikšen tok teče skozi posamezen upornik?
 - Kolikšen je nadomestni upor vezja?
 - Kolikšen tok teče skozi upornik med točkama B in C, če priključimo baterijo med točki A in D?
- Tir elektronskega curka, ki ima začetno hitrost $v_0 = 6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$, želimo oblikovati tako, kot kaže slika. V prvem kondenzatorju se curek po izstopu iz kondenzatorja odkloni za kot 45° , vstopi v prečno homogeno magnetno polje in v njem opiše četrt kroga. V drugi kondenzator vstopi pod kotom 45° in se v njem toliko ukrivi, da nadaljuje pot v prvotni smeri.



- Na skici (v izdelku) označi polaritete (+ in $-$) na kondenzatorskih ploščah in smer magnetnega polja, da se bo curek gibal po predpisanem tiru.
- Izračunaj potrebno električno poljsko jakost v prvem in drugem kondenzatorju.
- Izračunaj potrebno gostoto magnetnega polja.
- Za koliko % se spremeni čas potovanja curka skozi kondenzator v primerjavi s časom potovanja neodklonjenega curka.

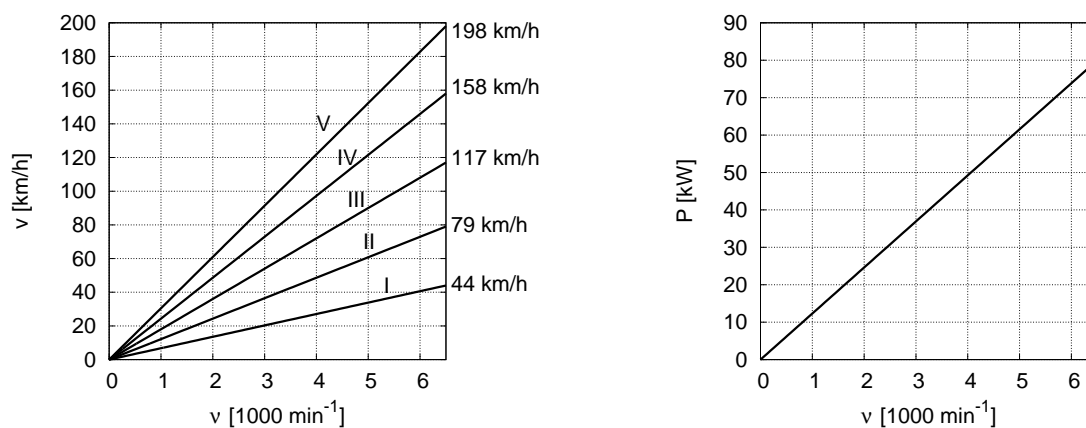
Podatki: Naboj elektrona je $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ As, masa $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ kg, dolžina pozameznega kondenzatorja je $l = 10$ cm, prav toliko tudi razmik med kondenzatorjema in širina magnetnega polja med kondenzatorjema. (Gravitacijska sila na elektron je seveda zanemarljiva.)

Skupina III

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost $9,8 \text{ m/s}^2$.

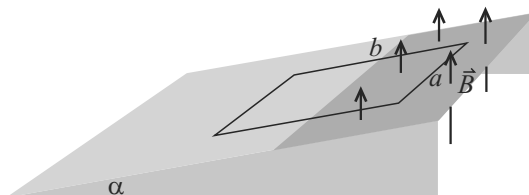
- Proizvajalec avtomobilov navaja v tehničnih podatkih vozila dva diagrama. Prvi (desno) prikazuje, kako je največja razpoložljiva moč motorja odvisna od frekvence vrtenja motorne gredi, drugi (levo) pa prikazuje, kako je hitrost avtomobila na cesti odvisna od frekvence vrtenja motorne gredi v različnih prestavah. Fekvenca je podana v min^{-1} . Moč motorja uravnavamo s pritiskanjem na pedal za plin. Če želimo pri dani frekvenci izkoristiti največjo razpoložljivo moč motorja, moramo pritisniti pedal za plin do konca. Frekvenca vrtenja motorne gredi je omejena na 6500 min^{-1} .

Z avtomobilom se odpravimo na poskusno vožnjo po avtocesti. S polnim plinom in v 5. prestavi dosežemo največjo hitrost 140 km/h . Na avtomobil deluje sila zračnega upora, ki je sorazmerna s kvadratom hitrosti avtomobila ($F_u = Kv^2$); trenje zanemarimo.



- S koliko močjo obratuje motor, ko po ravni cesti vozimo s hitrostjo 120 km/h v peti prestavi?
 - Natovorjen avtomobil s skupno maso 1600 kg se prične vzpenjati z dovolj veliko začetno hitrostjo v klanec z naklonskim kotom $5,7^\circ$. Kolikšno končno hitrost lahko doseže in v kateri prestavi?
Namig: Zapiši sorazmernost med močjo in hitrostjo in iz grafov poišči sorazmernostni koeficient za vsako prestavno razmerje posebej.
- Na gladko naklonsko ploskev klanca z naklonskim kotom $\alpha = 30^\circ$ položimo bakreno zanko tako, da sta dve stranici vodoravni. Razmerje med stranicama je $b/a = 2$. Zanka je na klanec položena tako, da se del zgornjega dela zanke nahaja v navpičnem homogenem magnetnem polju z gostoto $0,5 \text{ T}$. Magnetno polje je v prostoru, kjer je del naklonske ploskve temnejši. Zanko spustimo. Kolikšna je končna hitrost zanke?

Gostota bakra je 8900 kg/m^3 , specifični upor pa $0,0175 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$.



- Toplotno izolirano pokončno posodo v obliki valja s presekom S , v kateri je enoatomni idealni plin s $\kappa = c_p/c_v = 1,67$, zapira bat z maso m_b . V ravnovesju je ravnovesna lega bata na višini h nad dnom posode. Na bat pritisnemo s prstom s silo F_0 navzdol. Prst hitro umaknemo, tako da se bat izstrelji navzgor. Zunanji zračni tlak je p_0 .
 - Pokaži, da je pri dovolj majhnih odmikih od ravnovesne lege sila plina na bat premo sorazmerna z odmikom.

b) Kolikšna je maksimalna hitrost, ki jo bat doseže?

Za $y \ll 1$ velja $(1 - y)^{-a} \approx 1 + ay$.

4. V stransko steno posode, napolnjene z vodo, izvrtamo luknjico, skozi katero izteka v vodoravni smeri curek vode. Skozi prozorno nasprotno steno posvetimo v isti smeri, kot izteka voda, z vodoravnim curkom laserske svetlobe, ki ima enak premer kot luknjica, tako da se oba curka na začetku prekrivata. Če vodni curek ni preveč ukrivljen, ostane laserski curek znotraj vodnega curka (tako kot v svetlobnem vodniku). Kolikšna sme biti še hitrost iztekanja vode, da bo laserska svetloba ostala znotraj curka? Premer odprtine in laserskega curka naj bo 3 mm, lomni kvocient vode za lasersko svetlobo pa 1,33.

Namig: Razmisli, na katerem delu curka je ukrivljenost curka največja. Nariši snop vzporednih žarkov laserske svetlobe, ki zapuščajo luknjico in ugotovi, kateri utegne prvi uiti iz curka.

Državno tekmovanje srednješolcev iz fizike v letu 2012

©Tekmovalna komisija pri DMFA

Velenje, 14. april 2012

Kazalo

Skupina I – rešitve	2
Skupina II – rešitve	6
Skupina III – rešitve	10

Skupina I – rešitve

Rezultat je potrebno zapisati s smiselnim številom številk, v nasprotnem primeru odbijemo 1 t.

1. *Podatki:* $m = 5 \text{ kg}$, $\varphi = 30^\circ$.

a) Zapišemo pogoj za ravnovesje navorov glede na os v stikališču stene s kroglo

$$Rmg = RF_v \sin \varphi + RF_v \cos \varphi, \quad (1)$$

odkoder dobimo velikost sile vrvice

$$F_v = \frac{mg}{\sin \varphi + \cos \varphi} = 36 \text{ N}. \quad (2)$$

[6 t.]

b) Sile v smeri pravokotno na steno morajo biti v ravnovesju

$$F_v \sin \varphi = F_p, \quad (3)$$

prav tako sile v smeri vzporedno s steno

$$mg = F_l + F_v \cos \varphi. \quad (4)$$

Ko združimo zadnje tri enačbe, dobimo za k_l

$$k_l \geq 1. \quad (5)$$

[4 t.]

2. Podatki: $l = 100$ cm, $d = 50$ cm, $\alpha = 45^\circ$.

a) V vodoravni smeri velja $l = v_0 t$ in v navpični $v_y = gt$ in $h = \frac{1}{2}gt^2$. Pri končnem kotu 45° sta obe komponenti hitrosti enaki, torej

$$v_y = v_0 = gt = g \frac{l}{v_0}, \quad v_0 = \sqrt{gl} = 3,1 \text{ m/s}.$$

Višina je

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{l}{2} = 50 \text{ cm}.$$

[3 t.]

b) Hitrost v žlebu je

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2}v_0 = 4,4 \text{ m/s}$$

in za pot po žlebu porabi ($r = d/\sqrt{2}$):

$$t' = \frac{\pi r}{2v} = \frac{\pi d}{4v_0}.$$

Skupen čas je

$$t = 2 \frac{l}{v_0} + \frac{\pi d}{4v_0}.$$

Pri poti naravnost pa bi porabil čas $t_0 = (2l + d)/v_0$. Relativna razlika je

$$\frac{t - t_0}{t_0} = \frac{(\pi - 4)d}{2l + d} = -4,3 \text{ \%}.$$

[5 t.]

c) Hitrost dobimo iz ohranitve vsote kinetične in potencialne energije:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mg \left(h + r - \frac{d}{2} \right) = \frac{1}{2}mv'^2.$$

Iz $r = d/\sqrt{2}$ in iz zgornjega rezultata za h in v_0 dobimo

$$v'^2 = v_0^2 \left(2 + (\sqrt{2} - 1) \frac{d}{l} \right), \quad v' = 4,65 \text{ m/s}.$$

[2 t.]

3. *Podatki:* $r = 4 \text{ m}$, $k = 0,5$.

a) Tik pred zdrsom velja:

$$F_p = mg \cos \varphi, \quad F_l = mg \sin \varphi.$$

Iz $k = F_l/F_p$ dobimo

$$\varphi = \arctan k = 27^\circ$$

in

$$h = r + r \cos \varphi = 7,6 \text{ m}.$$

[6 t.]

b) Iz ohranitve kinetične in potencialne energije dobimo

$$v = \sqrt{2gh} = 12 \text{ m/s}.$$

[4 t.]

4. Podatki: $m_1 = 7$ kg, $m_2 = 3$ kg, $k = 0,5$, $m_3 = 20$ kg, $L = 1$ m.

a) V mejnem primeru bo vrvica med kladama 1 in 2 napeta, silo vrvice označimo F : Za ravnovesje klade 2 velja

$$m_3g = (m_1 + m_2)kg + m_1kg + F,$$

za klado 1 pa

$$F = m_1kg.$$

Od tod izrazimo

$$m_3 = (3m_1 + m_2)k = 12 \text{ kg}.$$

[4 t.]

(Za rezultat $m_3 = 5$ kg [2 t.]

b) V tem primeru za gibanje klad 2 in 3 velja

$$(m_2 + m_3)a = m_3g - (m_1 + m_2)kg - m_1kg - F,$$

za klado 1 pa

$$m_1 = F - m_1kg.$$

Sledi

$$a = \frac{m_3 - (3m_1 + m_2)k}{m_1 + m_2 + m_3} g = 2,6 \text{ m/s}^2.$$

[2 t.]

Klada se začne nagibati, ko se kladi 1 in 2 razmakneta za pol dolžine. [2 t.]

Tedaj velja

$$\frac{L}{4} = \frac{1}{2}at^2, \quad t = \sqrt{\frac{L}{2a}} = 0,44 \text{ s}.$$

[2 t.]

Skupina II – rešitve

Rezultat je potrebno zapisati s smiselnim številom števk, v nasprotnem primeru odbijemo 1 t.

1. a) Običajno predpostavimo, da je upor žarnic nespremenljiv in od tu sledi, da ima vsaka od obeh kombinacij štirih žarnic v vezju C nadomestni upor R , ki je enak uporu prve žarnice R_1 v vezju C oziroma tudi v vezju A. Po tem razmisleku je upor vezja C enak uporu vezja A in bi svetili obe prvi žarnici enako. [1 t.]

Moč prve žarnice je v tem primeru $P_1 = U_0^2/9R_1$, saj je napetost na prvi žarnici $U_0/3$. Napetost na katerikoli drugi žarnici je $U_0/6$, moč, ki jo žarnica oddaja, je zato $P = U_0^2/36R_1 = P_1/4$. [2 t.]

- b) V resnici je upor žarnic odvisen od temperature in zato v vezju C velja $R \neq R_1$. Ker svetita prvi žarnici v vezju C in B enako, je tok skozi njiju enak $I_1 = U_0/2R_1$, kjer je R_1 upor segrete žarnice v vezju B oziroma žarnice 1 v vezju C. Iz slike vidimo, da je nadomestni upor preostalih 8 žarnic v vezju C enak R_1 . Upor vsake hladnejše žarnice v vezju C je R , zaradi uporabljene vezave pa velja $2R = R_1$. Zaradi vzporedne vezave je tok skozi hladnejše žarnice enak $I = I_1/2$, od tu pa sledi, da je moč, ki jo oddaja hladnejša žarnica, enaka $P = P_1/8$. [7 t.]

Do istega rezultata pridemo tudi s preprostim sklepom: moč osmih žarnic v vezju C nadomesti moč ene žarnice v vezju B, zato je moč ene pač osemkrat manjša od moči, ki jo oddaja prva žarnica.

2. *Podatki:* $h = 2,75$ m, $a = 10$ m, $\lambda = 1,2$ W/mK, $d = 0,3$ m, $T_0 = -10$ °C, $T = 22$ °C.

a) Toplotni tok, ki uhaja skozi štiri stene stanovanja, je enak toplotnemu toku, ki ga oddajajo radiatorji. [1 t.]

Med etažami prehoda toplote ni, saj so vsa stanovanja pri enaki temperaturi.

$$P = 4\lambda ah \frac{T - T_0}{d},$$

$$\frac{P}{a^2} = 4\lambda h \frac{T - T_0}{ad} = 140 \text{ W/m}^2.$$

[2 t.]

b) Vsa stanovanja, razen neogrevanega in enega nad njim ter enega pod njim, ohranijo količnik P/a^2 . [2 t.]

Za neogrevano stanovanje velja:

$$P' = 4\lambda ah \frac{T - T_0}{d} + \lambda a^2 \frac{T - T_1}{d},$$

$$2\lambda a^2 \frac{T - T_1}{d} = 4\lambda ah \frac{T_1 - T_0}{d}.$$

[2 t.]

Tu je P' moč radiatorjev v stanovanjih nad in pod neogrevanim, T_1 je temperatura v neogrevanem stanovanju. Iz zgornjih enačb sledi:

$$T_1 = \frac{T + \frac{2h}{a}T_0}{1 + \frac{2h}{a}} = 11 \text{ °C},$$

[2 t.]

$$\frac{P'}{a^2} = 186 \text{ W/m}^2.$$

[1 t.]

3. *Podatki:* $R = 100 \Omega$, $R' = 200 \Omega$, $U = 12 \text{ V}$

a) Upornika med AE in EC sta pogrešljiva. To sprevidimo bodisi tako, da ju odstranimo iz vezja, po premisleku ugotovimo, da je med točkama AE in EC napetost 0 V , zato ponovna priključitev upornikov ne spremeni električnih razmer v vezju, bodisi uvidimo, da je vezje sestavljeno iz dveh mostičnih vezij (eno tvori trikotnik BCD, drugo BAD), in napravimo enak sklep.

Skozi diagonalna upornika med B in D teče tok:

$$I' = \frac{U}{2R'} = 30 \text{ mA}.$$

Skozi upornike na stranicah pa tok:

$$I = \frac{U}{2R} = 60 \text{ mA}.$$

Skozi preostala dva upornika tok ne teče. [3 t.]

b) Nadomestni upor vezja je enak uporju treh vzporednih vej parov upornikov:

$$R_n = \frac{2RR'}{R + 2R'} = 80 \Omega.$$

[3 t.]

c) Tok skozi BC označimo z I_1 , skozi BE in EC pa z I_2 . Skozi AB in CD potem teče tok $I_1 + I_2$.

Za trikotnik BCE velja

$$I_1 R = 2I_2 R'.$$

Za ABCD pa

$$2R(I_1 + I_2) + I_1 R = U,$$

od koder sledi

$$I_1 = \frac{U}{3R + \frac{R^2}{R'}} = 34 \text{ mA}.$$

[4 t.]

4. *Podatki:* $v_0 = 6 \cdot 10^6$ m/s, $\alpha = 45^\circ$.

a) Na obeh kondenzatorjih je spodaj +, [1 t.]

magnetno polje gleda iz lista. [1 t.]

b) Pri izhodu iz prvega kondenzatorja velja $v_y = v_x = v_0$. Hitrost v navpični smeri je

$$v_y = v_0 = at = \frac{eE}{m} \frac{l}{v_0},$$

torej

$$E = \frac{mv_0^2}{el} = 2,0 \text{ kV/m.}$$

[3 t.]

c) Radij koženja $r = l/\sqrt{2}$, hitrost pa $v = \sqrt{2}v_0$, torej

$$B = \frac{mv}{er} = \frac{2mv_0}{el} = 0,67 \text{ mT.}$$

[3 t.]

d) Do razlike pride le pri kroženju v magnetnem polju. Za četrt kroga porabi elektron

$$t_B = \frac{\pi r}{2v} = \frac{\pi l}{4v_0}.$$

Celoten čas je potem

$$t_{EBE} = \frac{l}{v_0} \left(2 + \frac{\pi}{4} \right).$$

V primerjavi s $t_0 = 3l/v_0$ se spremeni za

$$\frac{t_{EBE} - t_0}{t_0} = \frac{\pi - 4}{12} = -7,2 \text{ \%}.$$

Pri gibanju skozi kondenzator pa razlike ni. [2 t.]

Skupina III – rešitve

Rezultat je potrebno zapisati s smiselnim številom številk, v nasprotnem primeru odbijemo 1 t.

1. *Podatki:* $M = 1600$ kg, $v_0 = 140$ km/h, $v' = 120$ km/h, $\phi = 5,7^\circ$.

a) Ko doseže največjo (konstantno) hitrost, bo pogonsko silo uravnovesila sila upora zraka. Tedaj bo moč motorja pri polnem plinu ravno enaka (po velikosti) moči, s katero bo sila upora opravljala delo - avtomobilu se kinetična energija ne bo več povečevala:

$$P(\nu_0) = K\nu_0^3.$$

Funkcijo $P(\nu)$ na diagramu prepoznamo kot linearno, tj. $P(\nu) = k\nu$. (Z drugimi besedami: motor zagotavlja konstanten navor.) Z grafa razberemo, da je koeficient k enak

$$k = 50 \text{ kW}/4000 \text{ min}^{-1} = 750 \text{ Ws}.$$

Hitrost avtomobila v dani prestavi pa je tudi linearno odvisna od frekvence: $v(\nu) = \alpha_i\nu$. Koeficienti α_i ustrezajo strminam premic na levem diagramu. Z grafa razberemo (od prve prestave do pete):

$$\alpha_1 = 0,113 \text{ m}, \quad \alpha_2 = 0,203 \text{ m}, \quad \alpha_3 = 0,300 \text{ m}, \quad \alpha_4 = 0,405 \text{ m}, \quad \alpha_5 = 0,508 \text{ m}.$$

Pri največji hitrosti, ki jo dosežemo s polnim plinom in v peti prestavi, velja:

$$P(\nu_0) = k\nu_0 = k\frac{\nu_0}{\alpha_5} = K\nu_0^3.$$

Od tod sledi, da je

$$K = \frac{k}{\alpha_5\nu_0^2}.$$

Moč motorja pri hitrosti $v' = 120$ km/h (in v peti prestavi) je končno enaka

$$P(v') = K\nu'^3 = \frac{k\nu'^3}{\alpha_5\nu_0^2} = 36 \text{ kW}.$$

[5 t.]

b) Tokrat pa delo opravlja še dinamična komponenta teže. Energijska bilanca (pri enakomernem vzpenjanju) pove:

$$P(\nu) = (F_u + Mg \sin \phi)v = (K\nu^2 + Mg \sin \phi)v.$$

Za moč motorja pri polnem plinu vzamemo znan izraz $P(\nu) = k\nu = k\frac{\nu}{\alpha_i}$ in ga vstavimo zgoraj ter izrazimo iz enačbe hitrost avtomobila. Dobimo

$$v = \sqrt{\frac{k - Mg\alpha_i \sin \phi}{\alpha_i K}}.$$

Za α_5 je izraz pod korenem negativen - avtomobil se slej ko prej ustavi. Prestavimo v nižjo prestavo. V četrti bi največja hitrost znašala:

$$= v_0 \sqrt{\frac{(k - Mg\alpha_4 \sin \phi)\alpha_5}{\alpha_4 k}} = 62 \text{ km/h}.$$

V tretji prestavi bi dosegli hitrost 112 km/h. V drugi in prvi pa kvečjemu manjšo, saj ne moremo preseči 6500 min^{-1} . Največjo hitrost bi dosegli v tretji prestavi, a pri zelo visoki frekvenci motorja! [5 t.]

2. Podatki: $B = 0,5 \text{ T}$, $\varphi = 30^\circ$, $b/a = 2$, $\rho = 8900 \text{ kg/m}^3$, $\zeta = 0,0175 \text{ }\Omega\text{mm}^2/\text{m}$.

V ravnovesju sta nasprotno enaki projekciji teže in magnetne sile vzdolž klanca

$$mg \sin \varphi = B I a \cos \varphi .$$

[3 t.]

V zanki se inducira tok

$$I = \frac{U}{R} = \frac{B a v \cos \varphi}{R} .$$

[2 t.]

Upor zanke je

$$R = \frac{\zeta 2(a + b)}{S}$$

[1 t.]

in masa

$$m = 2S(a + b)\rho .$$

[1 t.]

Za končno hitrost dobimo

$$v = \frac{4\zeta \rho g \tan \varphi}{B^2 \cos \varphi} \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2 = 15 \text{ cm/s} .$$

[3 t.]

[V uradni rešiti, ki je bila objavljena takoj po tekmovanju, je manjkal $\cos \varphi$ v imenovalcu. Komisija bo priznala obe rešitvi, tisto brez in tisto s $\cos \varphi$ v imenovalcu.]

3. a) V ravnovesju je tlak v posodi

$$p_1 = p_0 + \frac{m_b g}{S}.$$

Ker je sistem izoliran, so spremembe adiabatne. Ko bat izmaknemo iz ravnovesja za x , se tlak poveča z vrednosti p_1 v ravnovesju na vrednost p in velja

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V}\right)^\kappa = \left(\frac{h}{h-x}\right)^\kappa = \left(\frac{1}{1-\frac{x}{h}}\right)^\kappa \approx 1 + \kappa \frac{x}{h}.$$

Za silo velja

$$F = pS = p_1 S + \frac{\kappa p_1 S}{h} x = p_1 S + kx, \quad k = \frac{\kappa p_1 S}{h}.$$

Sila je res premo sorazmerna z odmikom od ravnovesne lege, tako kot pri nihalu na vijačno vzmet. [5 t.]

b) Telo niha s krožno frekvenco

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_b}} = \sqrt{\frac{\kappa p_1 S}{m_b h}}.$$

Začetni odmik je potem

$$x_0 = \frac{F_0}{k}$$

in hitrost v ravnovesni legi

$$v_0 = \omega x_0 = \frac{F_0}{\sqrt{mk}} = F_0 \sqrt{\frac{h}{m \kappa p_1 S}}.$$

[5 t.]

4. Podatki: $2r = 3 \text{ mm}$, $n = 1,33$.

Za izbiro najnižjega žarka. [1 t.]

Za izbiro prvega odboja. [1 t.]

Žarek na sliki se odbije pri mejnem kotu totalnega odboja

$$\sin \beta = \frac{1}{n}.$$

[1 t.]

Za pot curka do mesta, kjer se izbrani žarek totalno odbije, velja:

$$v_x = v_0, \quad v_y = gt, \quad 2r = \frac{1}{2}gt^2.$$

Iz zadnje enačbe izrazimo t in dobimo

$$v_y = g\sqrt{\frac{4r}{g}} = \sqrt{4rg}.$$

[1 t.]

Za kot α ($\alpha = \frac{1}{2}\pi - \beta$) na sliki velja

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}, \quad \tan\left(\frac{1}{2}\pi - \beta\right) = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{4gr}}{v_0}.$$

[3 t.]

Izrazimo

$$\frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}{\frac{1}{n}} = \sqrt{n^2 - 1}$$

[1 t.]

in končno

$$v_0 = \sqrt{\frac{4gr}{n^2 - 1}} = 0,28 \text{ m/s}.$$

[2 t.]

