**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Skupina I

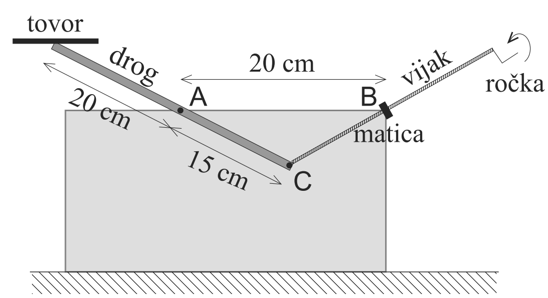
Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Na ravni cesti sta zaporedna semaforja med seboj oddaljena 15 m. Na obeh semaforjih gori rdeča luč. Ko se prižge zelena luč, potrebuje prvi avtomobil v koloni 1 s da spelje, vsak naslednji avtomobil v koloni pa spelje z enako zamudo za svojim predhodnikom. Vsi avtomobili speljejo s pospeškom 2 m/s^2 in vozijo enakomerno pospešeno do hitrosti $v_0 = 50$ km/h, potem pa vozijo s konstantno hitrostjo. Dolžina posameznega avtomobila je 4 m, razdalja med avtomobili v stoječi koloni pa je zanemarljiva. Smer vožnje na cesti je od prvega proti drugemu semaforju.

   a) Pred drugim semaforjem čakata dva avtomobila. Zelena luč se prižge in avtomobila speljeta. Kolikšna je razdalja med avtomobiloma po tem, ko oba dosežeta hitrost v_0 in vozita enakomerno?

   b) Prižiganje zelene luči na obeh semaforjih je urejeno tako, da se kolona avtomobilov, ki čaka na prvem semaforju, lahko priključi koloni avtomobilov z drugega semaforja. Pred drugim semaforjem čakata dva avtomobila. Koliko časa pred oziroma za prižigom zelene luči na drugem semaforju se naj prižge zelena luč na prvem semaforju, da se bo prvi avtomobil v koloni s prvega semaforja priključil koloni z drugega semaforja? Priključitev h koloni pomeni, da je razdalja med njim in drugim avtomobilom z drugega semaforja enaka kot v a).

2. Pritrjena ročna dvigalka je sestavljena iz lahkega dvižnega droga, ki je v točki A vpet v os, spodaj pa ga v točki C podpira lahek vijak, vpet v matico v točki B. Matica zadržuje vijak in je vrtljivo vpeta v ohišje, tako da deluje kot os. S pomočjo ročke privijamo ali odvijamo vijak in s tem dvigamo ali spuščamo tovor z ravnim gladkim površjem z maso 500 kg. Tovor dvignemo do take višine, da dvižni drog in podporni vijak oklepata enaka kota z vodoravnico.



   a) S kolikšno silo v tem primeru vijak podpira dvižni drog v točki C? Nosilka te sile je premica, ki jo določata točki B in C.

   b) Kolikšna je velikost sile, ki deluje na os v točki A?

   Mogoče boš potreboval zvezo $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$.

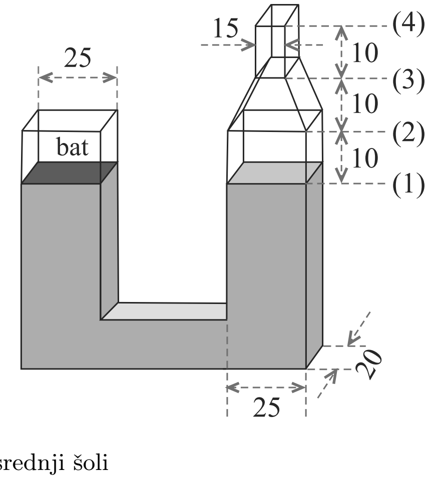
3. Avtomobilček poganja motor, ki skrbi, da se kolesa s polmerom 1 cm vrtijo s konstantno kotno hitrostjo $\omega = 50\ \mathrm{s}^{-1}$. Avtomobilček s prižganim motorjem in vrtečimi kolesi položimo na tla. Koeficient trenja med kolesi in tlemi je 0,4.

   a) Kolikšno največjo hitrost doseže avtomobilček?

   b) Kolikšno pot prevozi 0,3 s po tistem, ko ga položimo na tla?

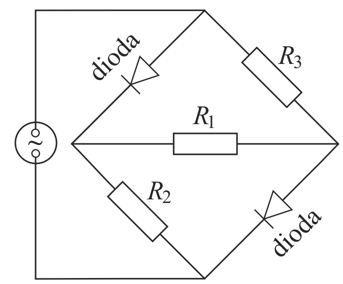
4. Slika prikazuje vodno tehtnico. Breme položimo na bat, ki pritiska na vodo v levem kraku, nato pa v ravnovesnem stanju opazujemo višino vodnega stolpca v desnem kraku. Dimenzije tehtnice so označene na sliki (enota je cm), gostota vode je 1000 kg/m^3. Pri neobremenjenem batu sega voda do oznake (1), ki predstavlja referenčno vrednost ($h_1 = 0$ cm).

   Določi, pri katerih masah bremena sega voda do oznake (2): $h_2 = 10$ cm, (3): $h_3 = 20$ cm in (4): $h_4 = 30$ cm.



Skupina II

1. Vezje na sliki je priključeno na izvir s sinusno izmenično napetostjo z zanemarljivim notranjim uporom. Amplituda sinusne napetosti je 180 V, uporniki pa imajo upore $R_1 = 10$ kΩ in $R_2 = R_3 = 5$ kΩ. Dve enaki diodi na sliki sta idealni: ko teče tok skozi diodo v eno smer, je njen upor zanemarljivo majhen, ko teče v drugo smer, pa neskončno velik.



   Kolikšno povprečno moč porablja upornik R_1?

2. V hiši se nahajata dve stanovanji, ki sta pregrajeni z notranjo steno. Poleg notranje ima vsako stanovanje še tri zunanje stene. Pozimi, ko je zunanja temperatura $-10\,^\circ$C, je v vsakem od stanovanj vklopljena električna peč. Električni peči delujeta z enako močjo, tako da vzdržujeta konstantno temperaturo $20\,^\circ$C v obeh stanovanjih. Sosed med počitnicami odide na smučanje, zato električno peč v svojem stanovanju izklopi.

   a) Kolikšni bi bili temperaturi v našem in sosedovem stanovanju v času njegove odsotnosti, če moči električne peči v našem stanovanju ne spremenimo?
   b) Za koliko % se poveča električna poraba v našem stanovanju ob sosedovi odsotnosti, če nastavimo termostat v svojem stanovanju na $20\,^\circ$C?

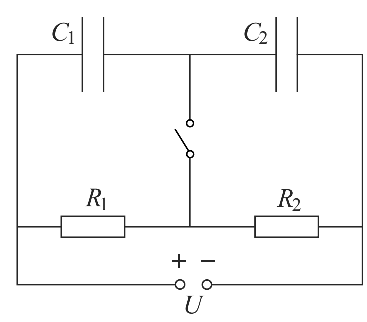
   Upoštevaj, da so vse stene iz istega materiala in da je površina vsake od zunanjih sten enaka površini notranje, pri čemer so zunanje stene dvakrat debelejše od notranje. Prevajanje toplote skozi tla in strop zanemari.

3. Daljnovod je žica, ki na višini 10 m nad tlemi poteka v smeri sever-jug. Po žici teče enosmerni tok v smeri proti severu.

   a) Kompas postavimo na ravna tla, natančno pod daljnovod. Kolikšen tok teče po daljnovodu, če se igla odkloni za kot 15° od smeri sever-jug?
   b) Kolikšen pa je odklon igle, če se s kompasom premaknemo za 15 m v pravokotni smeri glede na daljnovod? (Kompas je tudi v tem primeru na tleh.)

   Zemeljsko magnetno polje kaže proti severu in ima vodoravno komponento veliko $20\,\mu$T. Kompas ves čas držimo vzporedno s tlemi, tako da kaže smer vodoravne komponente magnetnega polja. Indukcijska konstanta je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am.

4. Vezje na sliki, s kondenzatorjema $C_1 = 100\ \mu$F, $C_2 = 50\ \mu$F, in upornikoma $R_1 = 100$ kΩ, $R_2 = 56$ kΩ, priključimo na napetost $U = 12$ V.



   a) Kolikšna sta napetosti in naboja na kondenzatorjih, ko stikalo ni sklenjeno?
   b) Stikalo sklenemo in počakamo, da se napetosti ne spreminjajo več s časom. Kolikšna sta sedaj napetosti in naboja na kondenzatorjih?
   c) Kolikšen naboj in katerega predznaka se je po sklenitvi pretočil skozi stikalo?

Skupina III

1. V sončnem sistemu obstaja več Lagrangeovih točk. V teh točkah je zaradi drugih teles (na primer Zemlje) tolikšna gravitacija, da je obhodni čas satelita okrog Sonca v tej točki ravno enak enemu letu. Tako se na primer 2. Lagrangeova točka (L2) nahaja v Zemljini senci, (na premici, ki gre skozi središči Sonca in Zemlje), kjer satelitov ne moti sevanje Sonca in lahko proučujejo lastnosti vesolja. Koliko je L2 oddaljena od Zemlje?

   Zemlja je na oddaljenosti $1{,}50 \cdot 10^{11}$ m od Sonca, leto traja 365 dni, masa Sonca je $2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg, masa Zemlje je $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg, gravitacijska konstanta je $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2/kg^2}$. Lahko predpostaviš, da je razdalja med Zemljo in L2 veliko manjša kot razdalja med Soncem in Zemljo. Mogoče boš potreboval zvezo $\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2x$ za $x \ll 1$.

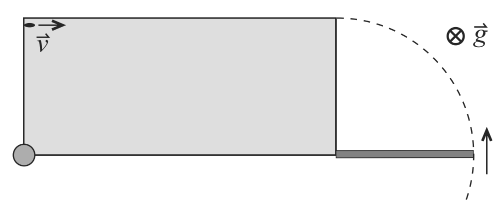
2. Daljnovod je žica, ki na višini 10 m nad tlemi poteka v smeri sever-jug. Po žici teče enosmerni tok v smeri proti severu.

   a) Kompas postavimo na ravna tla, natančno pod daljnovod. Kolikšen tok teče po daljnovodu, če se igla odkloni za kot 15° od smeri sever-jug?

   b) Kolikšen pa je odklon igle, če se s kompasom premaknemo za 15 m v pravokotni smeri glede na daljnovod? (Kompas je tudi v tem primeru na tleh.)

   Zemeljsko magnetno polje kaže proti severu in ima vodoravno komponento veliko $20\,\mu$T. Kompas ves čas držimo vzporedno s tlemi, tako da kaže smer vodoravne komponente magnetnega polja. Indukcijska konstanta je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am.

3. Zabojnik za smeti z višino 100 cm, prevrnemo na bok. Pokrov je vpet v ležaj s polžasto vzmetjo, ki je nenapeta, ko je pokrov odprt za 90°, kot kaže slika. Vektor težnega pospeška na sliki kaže smer navpičnice. Pokrov zapremo, če nanj delujemo z navorom 10 Nm. Vztrajnostni moment palice z maso m in dolžino l okrog osi skozi središče je $\frac{1}{12}ml^2$.



   a) Določi sučni koeficient D polžaste vzmeti ($M = D\varphi$).

   b) S kolikšnim nihajnim časom pokrov zaniha, če ga izmaknemo iz mirovne lege? Zabojnik je precej težji od svojega pokrova, ki je kvadratna plošča s stranico 30 cm in maso 1 kg.

   c) Pokrov odpremo za 180°. Na dnu zabojnika (na ploskvi nasproti pokrovu), se nahaja muha. S kolikšno najmanjšo hitrostjo v mora poleteti ven, da ne bo ostala v zabojniku, ko pokrov spustimo?

4. Neke hladne zimske noči položimo 2,5 cm debelo grafitno ploščo na ledeno podlago s temperaturo 0 °C. Nebo seva pri temperaturi −15 °C. Albedo (odbojnost) jasnega neba je 0,35, oblačnega pa 0,05.

   a) Kolikšno temperaturo izmerimo na površini grafitne plošče v jasni noči?

   b) Oceni delež neba, ki ga zakrivajo oblaki, če termometer pokaže temperaturo $T = -0{,}036$ °C. Predpostavi, da so oblaki po celem nebu posejani enakomerno (med njimi pa je jasno nebo).

   Toplotna prevodnost grafita je 70 W/mK. Grafitno ploščo lahko obravnavamo kot črno telo. Izmenjavo toplote z okoliškim zrakom zanemari. Za $\Delta T \ll T$ velja $(T + \Delta T)^4 \approx T^4 + 4T^3\Delta T$. Stefan-Boltzmannova konstanta je $5{,}67 \cdot 10^{-8}$ $\mathrm{W/m^2\,K^4}$.

Državno tekmovanje srednješolcev iz fizike v letu 2014

Ljubljana, 5. april 2014

Kazalo

Skupina I – rešitve

Rezultat je potrebno zapisati s smiselnim številom števk, v nasprotnem primeru odbijemo 1 t.

1. *Podatki:* $s_0 = 15$ m, $\Delta t = 1$ s, $a = 2$ m/s^2, $v_0 = 50$ km/h, $l = 4$ m.

   Čas merimo od trenutka, ko se na drugem semaforju prižge zelena luč. Koordinatno izhodišče postavimo v drugi semafor.

   a) Prvi avtomobil najprej pospešuje, nato se giblje premo enakomerno. Lego (to je razdaljo od koordinatnega izhodišča) prvega avtomobila ob (dovolj dolgem času) času t določa enačba

   $$x_1 = \tfrac{1}{2}at_p^2 + v_0(t - t_p - \Delta t)\,, \quad [1\ t.]$$

   kjer je t_p čas pospeševanje (enak za vse avtomobile). Lego drugega avtomobila dobimo podobno:

   $$x_2 = \tfrac{1}{2}at_p^2 + v_0(t - t_p - 2\Delta t) - l\,, \quad [1\ t.]$$

   saj je na začetku stal na razdalji l pred semaforjem. Za njuno medsebojno razdaljo (prednjima deloma avtomobilov) velja

   $$\Delta s = x_1 - x_2 = v_0\Delta t + l = 17{,}9\ \text{m}\,.$$

   Med prednjim delom drugega avtomobila in zadnjim delom prvega avtomobila pa je razmik

   $$\Delta r = \Delta s - l = 13{,}9\ \text{m}\,.$$

   [1 *t.*]

   b) Za lego prvega avtomobila s prvega semaforja dobimo

   $$x_3 = \tfrac{1}{2}at_p^2 + v_0(t - t_p - \Delta t - \Delta t_s) - s_0\,,$$

   pri čemer Δt_s meri, koliko časa po prižigu prvega semaforja se prižge drugi. (Če je negativen, se prej prižge prvi.) Zahtevamo, da je razlika leg drugega in tretjega enaka kot med prvim in drugim:

   $$x_2 - x_3 = \Delta s = v_0\Delta t + l\,.$$

   Dobimo

   $$\Delta t_s = 2\Delta t + \frac{2l - s_0}{v_0} = 1{,}5\ \text{s}\,.$$

   [7 *t.*]

2. *Podatki:* $a = 20\,\mathrm{cm}$, $b = 15\,\mathrm{cm}$, $l = 20\,\mathrm{cm}$, $m = 500\,\mathrm{kg}$.

Ravnovesje navorov sil, ki delujejo na dvižni drog, izračunamo glede na os v točki A:

$$mga\cos\alpha = Fb\sin 2\alpha\,.$$

[4 *t.*]

Projekciji droga in vijaka na vodoravnico data tole zvezo:

$$2b\cos\alpha = l\,.$$

[1 *t.*]

Uporabimo zvezo med trigonometričnimi funkcijami $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ ter $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Sinus kota izrazimo s $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-(l/2b)^2}$, od tod pa silo v podporišču:

$$F = \frac{mga}{2b\sin\alpha} = \frac{mga}{2b\sqrt{1-\left(\frac{l}{2b}\right)^2}} = 4{,}4\,\mathrm{kN}\,.$$

[1 *t.*]

b) Vodoravna komponenta podlage v točki A meri

$$F_{px} = F\cos\alpha = \frac{2\,F}{3} = 2{,}9\ \mathrm{kN}\,,$$

navpična pa

$$F_{py} = F_g + F\sin\alpha = F_g + \frac{\sqrt{5}\,F}{3} = 8{,}2\ \mathrm{kN}\,.$$

[2 *t.*]

Rezultanta meri

$$F_r = \sqrt{F_{px}^2 + F_{py}^2} = 8{,}7\ \mathrm{kN}\,.$$

[2 *t.*]

3. *Podatki:* $r = 1$ cm, $\omega = 50\ \mathrm{s}^{-1}$, $k = 0{,}4$.

a) Kolesa vozička na začetku spodrsavajo, dokler obodna hitrost kolesa ne doseže vrednosti ωr. Od tod naprej se kolesa kotalijo s konstantno hitrostjo, ki je enaka obodni hitrosti. Hitrost vozička je enaka

$$v_0 = \omega r = 50\ \mathrm{cm/s}\,.$$

[3 *t*.]

b) Na začetku kolesa spodrsavajo, zato se pojavi sila trenja v smeri gibanja vozička. Voziček se giblje enakomerno pospešeno:

$$a = \frac{F_{\mathrm{tr}}}{m} = \frac{mgk}{m} = gk\,.$$

[2 *t*.]

Končno hitrost doseže v času

$$t_p = \frac{v_0}{a} = \frac{\omega r}{gk} = 0{,}127\ \mathrm{s}.$$

[2 *t*.]

V času 0,3 s se torej že giblje enakomerno. Pot, ki jo opravi, je enaka

$$s = \tfrac{1}{2} a t_p^2 + v_0 (t - t_p) = 12\ \mathrm{cm}\,.$$

[3 *t*.]

4. *Podatki:* $\Delta h = 10$ cm, $a = 25$ cm, $d = 20$ cm, $a' = 15$ cm, $\rho = 1000$ kg/m^3

   Spust vode na levi dobimo iz zahteve, da se prostornina vode ohranja: koliko se prostornina v desnem kraku poveča, se v levem zmanjša.

   Hidrostatski tlak na gladino v levi posodi je enak razliki višin gladin med desno in levo posodo; v ravnovesju velja

   [3 t.]

$$mg = S_0 \rho g h\,, \qquad S_0 = ad\,, \qquad m = \rho\, adh\,.$$

   V primeru (2) sledi iz ohranitve prostornine

$$h_2^L ad = \Delta h ad\,, \qquad h_2^L = \Delta h\,.$$

   Razlika višin je $h = 2\Delta h$

   [1 t.]

   in

$$m = \rho\, ad\; 2\Delta h = 10 \text{ kg}\,.$$

   [1 t.]

   V primeru (3) ima telo med (3) in (2) obliko prisekane prizme in velja

$$\Delta h_3^L ad = \frac{a + a'}{2} d\Delta h\,, \qquad \Delta h_3^L = \frac{a + a'}{2a}\,\Delta h = \frac{4}{5}\,\Delta h\,,$$

   [1 t.]

   in dobimo

$$m = \rho ad(h_2^L + \Delta h_3^L + 2\Delta h) = \rho ad\,\frac{19}{5}\,\Delta h = 19 \text{ kg}\,.$$

   [2 t.]

   V primeru (4) sledi

$$\Delta h_4^L ad = a' d\Delta h\,, \qquad \Delta h_r^L = \frac{a'}{a}\,\Delta h = \frac{3}{5}\,\Delta h$$

   in

$$m = \rho ad(h_2^L + h_3^L + \Delta h_4^L + 3\Delta h) = \rho ad\,\frac{27}{5}\,\Delta h = 27 \text{ kg}\,.$$

   [2 t.]

Skupina II – rešitve

Rezultat je potrebno zapisati s smiselnim številom števk, v nasprotnem primeru odbijemo 1 t.

1. *Podatki:* $U_0 = 180$ V, $R_1 = 10$ kΩ, $R_2 = R_3 = 5$ kΩ.

   V prvi polovici nihaja naj bo pozitivna napetost na zgornjem priključku (glej sliko pri besedilu). Tok teče brez upora zkozi diodi in skozi upornik R_1. Amplituda toka je

$$I_{0+} = \frac{U_0}{R_1}\,.$$

   [2 *t.*]

   V drugem delu se polariteta izvira obrne in tok skozi diodi ne teče, pač pa teče skozi oba upornika R_2 in R_3. Amplituda toka je

$$I_{0-} = \frac{U_0}{R_1 + R_2 + R_3}\,.$$

   [2 *t.*]

   V enem nihaju se na R_1 porablja moč

$$P = \frac{1}{4}\, I_{0+}^2 R_1 + \frac{1}{4}\, I_{0-}^2 R_1 = \frac{U_0^2}{4}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{R_1}{(R_1 + R_2 + R_3)^2}\right]\,,$$

   pri čemer k faktorju $\frac{1}{4}$ prispeva $\frac{1}{2}$ na račun efektivne vrednosti izmenične napetosti, druga polovica pa gre na račun polovice nihaja. [5 *t.*]

   Dobimo

$$P = 1{,}0\ \mathrm{W}\,.$$

   [1 *t.*]

2. *Podatki:* $T_z = -10$ °C, $T_0 = 20$ °C

Označimo stacionarno temperaturo v našem stanovanju s T_1 ter temperaturo v stanovanju 2 s T_2. Površina posamezne stene je S, debelina notranje stene je d, debelina zunanje stene je $2d$, toplotna prevodnost materiala, iz katerega je stena, pa je λ. Moč električne peči označimo s P_0.

a) Ker gledamo stacionarne razmere, se temperatura v stanovanjih ne spreminja in se morajo zato topolotni izviri v vsako od stanovanj uravnovesiti z izgubami skozi stene.

Ko sta vključeni obe električni peči, sta temperaturi v stanovanjih enaki (in sicer T_0), zato toplotnega toka skozi notranjo steno ni in so iz vsakega stanovanja toplotne izgube le prek zunanjih sten:

$$P_0 = 3\,\frac{\lambda S}{2d}\,(T_0 - T_z), \tag{1}$$

$$\Lambda := \frac{\lambda S}{d} = \frac{2P_0}{T_0 - T_z}. \tag{2}$$

[1 *t.*]

Ko je vključena peč le v našem stanovanju, je njena moč enaka izgubam tako skozi zunanje kot skozi notranjo steno:

$$P_0 = 3\,\frac{\lambda S}{2d}\,(T_1 - T_z) + \frac{\lambda S}{d}\,(T_1 - T_2), \tag{3}$$

$$P_0 = \Lambda\left(\frac{3}{2}(T_1 - T_z) + (T_1 - T_2)\right). \tag{4}$$

[3 *t.*]

V sosedovem stanovanju pa se toplotni tok skozi notranjo steno uravnovesi s toplotnim tokom skozi zunanje stene njegovega stanovanja:

$$\frac{\lambda S}{d}\,(T_1 - T_2) = 3\,\frac{\lambda S}{2d}\,(T_2 - T_z), \tag{5}$$

$$T_2 = \frac{2T_1 + 3T_z}{5}. \tag{6}$$

Če upoštevamo enačbo (6) za T_2 v enačbi (4), dobimo

$$P_0 = \frac{21}{10}\Lambda(T_1 - T_z), \tag{7}$$

$$T_1 = T_z + \frac{10P_0}{21\Lambda} = T_z + \frac{5}{7}(T_0 - T_z) = 11{,}4\,^\circ\mathrm{C}, \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

ter od tod

$$T_2 = \frac{2T_1 + 3T_z}{5} = T_z + \frac{2}{7}(T_0 - T_z) = -1{,}4\,^\circ\mathrm{C}. \tag{10}$$

[2 *t.*]

b) Tokrat označimo novo moč peči s P, temperaturo v našem stanovanju s T_0, temperaturo v sosedovem stanovanju pa s T_2'.

Bilance toplotnih tokov so enake kot v prejšnjem primeru, le da temperaturo T_1 zamenjamo s T_0, T_2 s T_2', ter moč P_0 s P. Za naše stanovanje torej dobimo

$$P = \Lambda\left(\frac{3}{2}(T_0 - T_z) + (T_0 - T_2')\right), \tag{11}$$

[2 *t.*]

za sosedovo stanovanje pa

$$T_2' = \frac{2T_0 + 3T_z}{5}. \tag{12}$$

[1 *t.*]

Če upoštevamo enačbo (12) za T_2' v enačbi (11), dobimo

$$P = \frac{21}{10}\Lambda(T_0 - T_z), \tag{13}$$

ter od tod s pomočjo enačbe (4)

$$\frac{P}{P_0} - 1 = \frac{\frac{21}{10}\Lambda(T_0 - T_z)}{\frac{3}{2}\Lambda(T_0 - T_z)} - 1 = 2/5 = 40\,\%. \tag{14}$$

[1 *t.*]

3. *Podatki:* $h = 10$ m, $B_Z = 20$ μT, $d = 15$ m, $\varphi_0 = 15°$.

a) Magnetno polje B_0, ki ga ustvarja tok v žici, ima pod žico le vodoravno komponento, ki je pravokotna glede na zemeljsko magnetno polje. Njegova velikost na oddaljenosti h od žice je

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi h}\,.$$

[1 *t.*]

Magnetnica kaže v smeri rezultante obeh polj B:

$$B_0 = B\sin\varphi_0\,, \qquad B_Z = B\cos\varphi_0\,.$$

Enačbi delimo in dobimo

$$B_0 = B_Z\tan\varphi_0\,, \qquad \frac{\mu_0 I}{2\pi h} = B_Z\tan\varphi_0$$

[1 *t.*]

in končno

$$I = \frac{2\pi h B_Z\tan\varphi_0}{\mu_0} = 270\ \mathrm{A}\,.$$

[2 *t.*]

b) Kompas je v tem primeru oddaljen od žice $r = \sqrt{h^2 + d^2}$. Velikost magnetnega polja v tej točki je

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,,$$

[1 *t.*]

Vodoravna komponenta pa

$$B_{1v} = B_1\cos\alpha\,, \qquad \cos\alpha = \frac{h}{r}\,.$$

[2 *t.*]

Druga zveza sledi iz podobnih trikotnikov. Podobno kot prej velja

$$\tan\varphi_1 = \frac{B_{1v}}{B_Z} = \frac{\mu_0 I h}{2\pi(h^2 + d^2)B_Z}\,, \qquad \varphi_1 = 5°\,.$$

[3 *t.*]

Z upoštevanjem rezultata pri a) lahko izraz prepišemo v enostavnejšo obliko

$$\tan\varphi_1 = \frac{h^2}{h^2 + d^2}\,\tan\varphi_0.$$

4. *Podatki:* $C_1 = 100\ \mu$F, $C_2 = 50\ \mu$F, $R_1 = 100$ kΩ, $R_2 = 56$ kΩ, $U = 12$ V.

a) Napetosti sta v obratnem sorazmerju s kapacitetami:

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\, U = 4\ \text{V}\,, \qquad U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\, U = 8\ \text{V}\,,$$

naboja pa sta seveda enaka:

$$e_1 = e_2 = C_1 U_1 = C_2 U_2 = 400\ \mu\text{As}\,.$$

[3 *t*.]

b) V tem primeru je napetost na kondenzatorju C_1 enaka padcu napetosti na uporniku R_1, napetost na kondenzatorju C_2 pa padcu napetosti na uporniku R_2:

$$U_1' = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\, U = 7{,}7\ \text{V}\,, \qquad U_2' = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\, U = 4{,}3\ \text{V}\,.$$

Naboja pa sta različna:

$$e_1' = C_1 U_1' = 770\ \mu\text{As}\,, \qquad e_2' = C_2 U_2' = 215\ \mu\text{As}\,.$$

[4 *t*.]

c) Predznak naboja na desni plošči kondenzatorja C_1 je negativen, na levi plošči kondenzatorja C_2 pa pozitiven. Ker sta naboja v primeru a) enaka, je skupni naboj na teh dveh ploščah enak 0. V primeru b) pa naboja nista enaka in je skupni naboj na teh dveh ploščah $e' = -e_1' + e_2' = -555\ \mu$As. Ker je bil na začetku skupni naboj 0, je s plošč odtekel *pozitivni* naboj:

$$\Delta e = +555\ \mu\text{As}\,.$$

[3 *t*.]

Skupina III – rešitve

Rezultat je potrebno zapisati s smiselnim številom števk, v nasprotnem primeru odbijemo 1 t.

1. *Podatki:* $R = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, $t_0 = 365$ dni, $M_S = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg, $M_Z = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg.

   Z r označimo oddaljenost točke L2 od Zemlje, njena oddaljenost od Sonca je potem $R + r$. Telo z maso m v tej točki kroži okoli Sonca pod vplivom gravitacijske sile Sonce in Zemlje. Iz Newtonovega zakona sledi

$$m\omega_0^2(R+r) = \frac{GmM_S}{(R+r)^2} + \frac{GmM_Z}{r^2}\,.$$

   [4 *t.*]

   Kotno hitrost sicer lahko izrazimo iz časa obhoda, preglednejši rezultat pa dobimo, če zapišemo Newtonov zakon za kroženje telesa okoli Sonca na razdalji R (to velja na primer za Zemljo):

$$m\omega_0^2 R = \frac{GmM_S}{R^2}\,, \qquad m\omega_0^2 = \frac{GmM_S}{R^3}\,.$$

   [2 *t.*]

   Prva enačba se sedaj poenostavi, saj lahko krajšamo m in G:

$$\frac{M_S(R+r)}{R^3} = \frac{M_S}{(R+r)^2} + \frac{M_Z}{r^2}\,.$$

   Preuredimo

$$\frac{M_Z}{r^2} = \frac{M_S(R+r)}{R^3} - \frac{M_S}{(R+r)^2} = \frac{M_S\left[(R+r)^3 - R^3\right]}{R^3(R+r)^2}\,.$$

   Upoštevamo, da je r mnogo manjši od R. Potem velja $(R+r)^3 \approx R^3 + 3R^2 r$, v imenovalcu pa lahko vzamemo $R + r \approx R$.

   [2 *t.*]

   Dobimo

$$\frac{M_Z}{r^2} = \frac{3M_S r}{R^3}$$

   in končno

$$r = \sqrt[3]{\frac{M_Z}{3M_S}}\,R = 1{,}50 \cdot 10^9 \text{ m}\,.$$

   [2 *t.*]

2. *Podatki:* $h = 10$ m, $B_Z = 20\ \mu$T, $d = 15$ m, $\varphi_0 = 15°$.

a) Magnetno polje B_0, ki ga ustvarja tok v žici, ima pod žico le vodoravno komponento, ki je pravokotna glede na zemeljsko magnetno polje. Njegova velikost na oddaljenosti h od žice je

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi h}\,.$$

[1 *t.*]

Magnetnica kaže v smeri rezultante obeh polj B:

$$B_0 = B\sin\varphi_0\,, \qquad B_Z = B\cos\varphi_0\,.$$

Enačbi delimo in dobimo

$$B_0 = B_Z\tan\varphi_0\,, \qquad \frac{\mu_0 I}{2\pi h} = B_Z\tan\varphi_0$$

[1 *t.*]

in končno

$$I = \frac{2\pi h B_Z\tan\varphi_0}{\mu_0} = 270\ \mathrm{A}\,.$$

[2 *t.*]

b) Kompas je v tem primeru oddaljen od žice $r = \sqrt{h^2 + d^2}$. Velikost magnetnega polja v tej točki je

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,,$$

[1 *t.*]

Vodoravna komponenta pa

$$B_{1v} = B_1\cos\alpha\,, \qquad \cos\alpha = \frac{h}{r}\,.$$

[2 *t.*]

Druga zveza sledi iz podobnih trikotnikov. Podobno kot prej velja

$$\tan\varphi_1 = \frac{B_{1v}}{B_Z} = \frac{\mu_0 I h}{2\pi(h^2 + d^2)B_Z}\,, \qquad \varphi_1 = 5°\,.$$

[3 *t.*]

Z upoštevanjem rezultata pri a) lahko izraz prepišemo v enostavnejšo obliko

$$\tan\varphi_1 = \frac{h^2}{h^2 + d^2}\,\tan\varphi_0.$$

3. *Podatki:* $m = 1$ kg, $a = 30$ cm, $h = 100$ cm, $M = 10$ Nm, $\varphi_0 = 90°$, $\varphi_1 = 180°$.

a) Konstanto ugotovimo iz navora, potrebnega, da smo pokrov zasukali za pravi kot:

$$D = \frac{M}{\varphi_0} = 6{,}4 \text{ Nm}\,.$$

[2 *t*.]

b) Za nihajni čas nihala na polžasto vzmet velja

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}\,.$$

[3 *t*.]

Vztrajnostni moment plošče, vrtljive okoli stranice, je enak vztrajnostnemu momentu palice pri vrtenju okoli krajišča:

$$J = \frac{1}{12}\,ma^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\,ma^2 = 0{,}030 \text{ kgm}^2\,.$$

in

$$t_0 = 0{,}43 \text{ s}\,.$$

[3 *t*.]

c) Pokrov naredi ravno pol nihaja, predno se zapre. Torej ima muha na razpolago $t = t_0/2 = 0{,}22$ s. Poleteti mora s hitrostjo

$$v > \frac{h}{t} = \frac{2h}{t_0} = 4{,}6 \text{ m/s}\,.$$

[2 *t*.]

4. *Podatki:* $d = 2{,}5$ cm, $T_0 = 0°\text{C}$, $T_n = -15°\text{C}$, $a_n = 0{,}35$, $a_o = 0{,}05$, $\lambda = 70$ W/mK, $\Delta T' = 0{,}036$ K.

Prejeti toplotni tok skozi ploščo

$$j = \lambda \frac{\Delta T}{d}$$

je enak vsoti prejetega in oddanega sevanja:

$$j = -\sigma (T_0 + \Delta T)^4 + \sigma(1 - a_n) T_n^4\,.$$

[4 *t.*]

Z ΔT smo označili razliko med površjem plošče in temperaturo podlage T_0. Za majhne ΔT velja

$$(T_0 + \Delta T)^4 \approx T_0^4 + 4T_0^3 \Delta T\,.$$

Torej

$$\lambda \frac{\Delta T}{d} = -\sigma T_0^4 - 4\sigma T_0^3 \Delta T + \sigma(1 - a_n) T_n^4\,,$$

$$\Delta T = \frac{\sigma(1 - a_n) T_n^4 - \sigma T_0^4}{4\sigma T_0^3 + \dfrac{\lambda}{d}}\,.$$

Rešitev je $T = -0{,}054$ °C. [2 *t.*]

b) Toplotne moči iz različnih delov neba se (približno) seštevajo glede na delež zornega kota (kosinusna razlika med zenitom in obzorjem sicer dela težave če so vsi oblaki skupaj ampak načeloma hočemo oceno). Če je delež oblačnosti C, vidimo, da se zaradi linearnosti v albedu delež oblačnosti prenese v delež emisivnosti (in s tem tudi albeda):

$$j = \sigma (T_0 + \Delta T)^4 + \sigma(1 - \underbrace{[a_n(1 - C) + a_o C]}_{\bar{a}}) T_n^4\,,$$

[2 *t.*]

kjer sta a_n in a_o jasni in oblačni albedo. Rešitev linearne enačbe da povprečni albedo 0,15 in oblačnost 66%.

[2 *t.*]