Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

53. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Državno tekmovanje, Škofja Loka, 11. 4. 2015

Skupina I

1. Igralec namiznega tenisa želi nasprotniku servirati žogico tako, da jo v višini mrežice požene z začetno hitrostjo v_0 v vodoravni smeri pravokotno na mrežo. Dolžina celotne mize je 273 cm, mrežica deli mizo po dolžini na dve polovici.

   Pri servisu mora žogica enkrat pasti na polovico mize, ki pripada igralcu s servisem. Zračni upor zanemari in žogico obravnavaj kot prožno točkasto telo.

   a) S kolikšno hitrostjo v_0 mora poleteti žogica, da bo letela tik nad mrežico, ki je visoka 15,25 cm?
   b) Pod kolikšnim kotom in s kolikšno hitrostjo v_0 pa mora poleteti žogica v primeru, da je na začetku servisa v višini mize, se na razdalji $\frac{2}{3}$ od začetka serverjeve polovice mize odbije in poleti tik nad mrežo?

2. Dve enaki vrvici s prožnostnima koeficientoma po 800 N/m pritrdimo na strop v razmiku 60 cm. Nanju obesimo umetniško sliko z maso 3,0 kg, tako da sta vrvici navpični. Ker težišče slike ni neposredno pod sredino med vrvicama, je slika nagnjena za kot 1°.

   a) Za koliko je sila v daljši vrvici večja od sile v krajši vrvici?
   b) Kolikšni sta sili v posameznih vrvicah?
   c) Za koliko je v vodoravni smeri težišče slike oddaljeno od sredinske navpične črte med vrvicama?

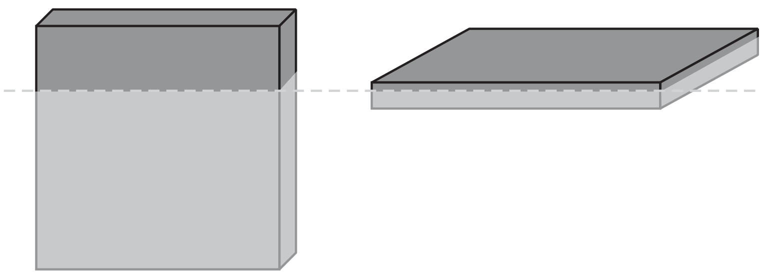
3. S 7 m visokega balkona vržemo v vodoravni smeri polno vrečko peska z maso 1 kg v škatlo, ki leži na tleh.

   a) Kolikšni sta navpična in vodoravna komponenta gibalne količine vrečke peska tik preden zadene škatlo, če je škatla na oddaljenosti 4 m od balkona, merjeno v vodoravni smeri?
   b) Kako blizu balkona moramo postaviti škatlo, da ne bo zdrsnila, ko vrečka pade v škatlo? Koeficient lepenja med škatlo in tlemi je 0,2.

   Trk traja tako kratek čas, da je sunek teže zanemarljiv.

4. Kvader iz lesa z gostoto 700 kg/m^3 plava v vodi. Dimenzije kvadra so 100 cm × 100 cm × 10 cm.

   a) Najmanj koliko dela je potrebno, da potopimo kvader na sliki a)? *Namig:* Razmisli, kako se pri tem spreminja sila vzgona.
   b) Pokaži, da dobiš enak rezultat, če delo računaš prek sprememb potencialnih energij. Poleg težnostne potencialne energije $W_g = mgh$ lahko vpeljemo potencialno energijo vzgona kot $W_v = -m_v g h_v$, pri čemer je m_v masa in h_v težišče izpodrinjene vode.
   c) Na podlagi ugotovitve pri b) (ali kako drugače) izračunaj, koliko najmanj dela je potrebno, da kvader obrnemo iz lege b) v lego a)?

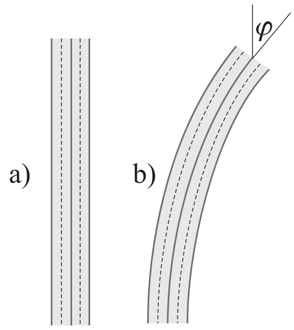


a) b)

53. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Državno tekmovanje, Škofja Loka, 11. 4. 2015

Skupina II

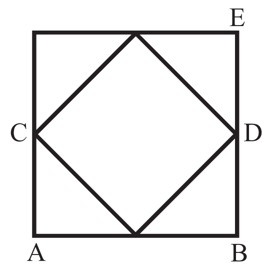
1. Bimetal je naprava iz dveh kovinskih trakov z različnimi temperaturnimi koeficienti dolžinskega raztezka, zvarjenih skupaj po stiku (glej sliko a). (Na sliki je črtkano narisana sredina traku.) Pred segrevanjem je bimetal raven, ob segrevanju pa se ukrivi. Predpostavi, da se ukrivi v obliki krožnega loka in se sredina traku raztegne v skladu z enačbo za dolžinski raztezek. Trakova sta iz materialov s temperaturnima koeficientoma dolžinskega raztezka $2{,}31 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$ in $1{,}08 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$. Debelina posameznega traku je 0,5 mm, dolžina pa 10 cm.



   a) Temperatura se je spremenila za 50 K. Kolikšna bi bila razlika v dolžini trakov, če bi se raztezala neodvisno drug od drugega?

   b) Za koliko se je spremenila temperatura, če se je bimetal ukrivil tako, da je kot φ na sliki b) 30°?

2. Iz železnih palic s krožnim presekom in debelino 1,0 mm sestavimo kvadratni okvir, kakršen je na sliki: kvadratni okvir ima vdelan še en kvadratni okvir, nagnjen pod kotom 45°. Dolžina stranice manjšega okvira je 20 cm. Specifični upor železa je $0{,}10\,\Omega\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$.



   a) Kolikšen je upor stranice manjšega okvira in kolikšen stranice večjega okvira?

   Kolikšen je nadomestni upor vezja, če priključka napetostnega izvira postavimo v točki

   b) C in D?

   c) A in E?

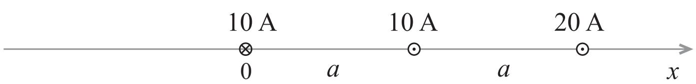
3. Iz posode v obliki kocke s stranico 10 cm napravimo ploščati kondenzator, tako da nasprotni navpični ploskvi predstavljata plošči kondenzatorja. Kondenzator nabijemo z napetostjo 40 V in potem odklopimo izvir.

   a) Za koliko se spremeni napetost na ploščah, če posodo napolnimo z dielektrično tekočino z dielektričnostjo $\varepsilon = 4$? (Če je v kondenzatorju snov z dielektričnostjo ε, se kapaciteta kondenzatorja poveča za faktor ε v primerjavi s praznim kondenzatorjem.)

   b) Na dnu posode odpremo ventil, tako da se nivo tekočine enakomerno spušča in v 10 s pade na 0. Na grafu skiciraj, kako se spreminja napetost na ploščah v odvisnosti od časa. Osi opremi s podatki.

   c) Plošči povežemo preko upornika. Kolikšen naj bo njegov upor, da bo napetost med ploščama med iztekanjem tekočine konstantna?

4. Trije dolgi vodniki so vzporedni med seboj in v enaki medsebojni oddaljenosti $a = 0,4$ m. V prvem vodniku z leve teče tok 10 A v list, v drugem 10 A iz lista in v tretjem 20 A iz lista (glej sliko).



   a) S kolikšno silo in v kateri smeri moramo delovati na vsak meter vodnika, po katerem teče tok 20 A, da bo v ravnovesju?

   b) Kje na osi x, merjeno od prvega vodnika z leve, je gostota magnetnega polja nič?

53. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Državno tekmovanje, Škofja Loka, 11. 4. 2015

Skupina III

1. Dva prevodna trakova z dolžino 1 m in širino 10 cm sta postavljena vzporedno drug nad drugega v razmiku 10 cm. Na enem krajišču sta povezana preko upornika za 1000 Ω, na drugem pa priključena na napetost 24 V. Upor traku je zanemarljiv v primerjavi z uporom upornika. Teže pri nalogi ne upoštevamo.

   a) Kolikšna je magnetna sila med trakovoma? Pri računanju magnetnega polja in sile lahko trak nadomestiš z vodnikom, ki gre po sredini traku.

   b) Kolikšen naboj se nabere na trakovih? Trakova lahko v tem primeru obravnavaš kot ploščati kondenzator.

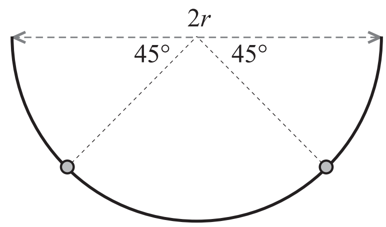
   c) Se trakova privlačita ali odbijata?

   d) Ali obstaja vrednost upora, pri kateri se smer rezultante spremeni?

2. Curek laserske svetlobe z valovno dolžino 633 nm razcepimo na dva delna curka; prvi curek pošljemo skozi kiveto (kiveta je steklena posoda v obliki kvadra) z dolžino 30 mm, napolnjeno z okoliškim zrakom, drugega pa usmerimo na zaslon, kjer interferira s prvim curkom. Poti curkov so tolikšne, da dobimo ravno maksimalno ojačenje. Nato zrak v kiveti segrejemo za 12 °C. Kiveta je odprta, tako da je tlak v kiveti ves čas enak zunanjemu zračnemu tlaku. Interferenčna slika na zaslonu se spremeni; namesto ojačenja dobimo oslabitev. Kolikšen je lomni kvocient n (okoliškega) zraka?

   Za pline velja, da je $n - 1$ premo sorazmerno z gostoto plina. Zunanja temperatura je 18 °C, zunanji zračni tlak pa 97 kPa. Namig: Pogoj za oslabitev dveh valovanj lahko zapišemo na dva načina: razlika optičnih poti (nd) mora biti enaka lihemu večkratniku polovične valovne dolžine, ali: razlika časov potovanja mora biti enaka lihemu večkratniku polovice nihajnega časa.

3. Žica je zvita v polkrog s polmerom 5 cm in stoji pokončno v zemeljskem težnem polju. Na žici sta dve enaki kroglici s polmerom 0,625 cm, z maso po 0,1 g in enakim nabojem. Kroglici lahko drsita po žici brez trenja. Kroglici sta v ravnovesju v legi, ki je narisana na sliki.



   a) Kolikšen je naboj posamezne kroglice?

   b) Koliko dela moramo opraviti, da kroglici iz ravnovesne lege premaknemo na dno polkrožne žice tako, da se ravno še ne stikata? Privzemi, da je polmer kroglice dosti manjši od polmera obroča.

   c) S kolikšno hitrostjo kroglici zletita z žice potem, ko ju spustimo?

   Električna energija ene kroglice v polju druge kroglice z enakim nabojem je $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

4. Na vrvico s prožnostnim koeficientom 500 N/m obesimo utež z maso 1 kg.

   a) Koliko smemo največ povleči tako sestavljeno nihalo iz ravnovesne lege navzdol, da bo še nihalo sinusno?

   b) Utež iz ravnovesne lege povlečemo navzdol za 4,0 cm in nato spustimo. Izračunaj nihajni čas takega nihala.

   Upoštevaj, da prožna sila v vrvici deluje le, ko je napeta. Za težni pospešek vzemi 10 m/s^2.

Državno tekmovanje srednješolcev iz fizike v letu 2015

Škofja Loka, 11. april 2015

Kazalo

Skupina I – rešitve

Rezultat je potrebno zapisati s smiselnim številom števk, v nasprotnem primeru odbijemo 1 t.

1. *Podatki:* $h = 15{,}25$ cm, $l = 273$ cm.

   a) Izračunamo čas leta do mreže

   $$t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}35 \text{ s}\,,$$

   [2 *t.*] nato pa iz tega hitrost

   $$v_0 = \frac{s}{2t} = 3{,}9 \text{ m/s}\,.$$

   [2 *t.*]

   b) Lahko upoštevamo simetrijo trajektorije in si s tem olajšamo delo. Žogica se dva krat dvigne do višine h in enkrat spusti s te višine. Čas leta je enak

   $$t = 3\sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}53 \text{ s}\,.$$

   [2 *t.*]

   Od tod lahko nato enostavno določimo začetno hitrost v smeri x

   $$v_x = \frac{s}{2t} = 2{,}58 \text{ m/s}\,.$$

   [1 *t.*]

   Hitrost v smeri y lahko določimo prek energije ali z uporabo že izračunanega časa

   $$v_y = \sqrt{2gh} = 1{,}73 \text{ m/s}\,.$$

   [1 *t.*]

   Tako dobimo končni rezultat

   $$v_0 = 3{,}11 \text{ m/s}$$

   in

   $$\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x}\,, \qquad \varphi = 34^\circ\,.$$

   [2 *t.*]

2. *Podatki:* $k = 800$ N/m, $d = 60$ cm, $m_s = 3{,}0$ kg, $\varphi = 1°$.

Sili v levi in desni vrvici označimo s F_l in F_d, raztezka leve in desne vrvice pa z x_l in x_d.

a) Ker je slika nagnjena, sta vrvici raztegnjeni na različno dolžino, zato sta sili v vrvicah različni. Po Hookovem zakonu vemo

$$F_l = k\, x_l\,, \qquad F_d = k\, x_d\,.$$

[1 *t.*]

Iz geometrije lahko razliko raztezkov povežemo s kotom nagnjenja slike:

$$\Delta x = x_d - x_l = d\, \tan\varphi = 1{,}05\ \mathrm{cm}\,.$$

[1 *t.*]

Za razliko sil sledi

$$\Delta F = F_d - F_l = k\Delta x = kd\, \tan\varphi = 8{,}4\ \mathrm{N}\,.$$

[1 *t.*]

b) Velja $F_d + F_l = m_s g$ in

$$F_d = \frac{m_s g + kd\, \tan\varphi}{2} = 18{,}9\ \mathrm{N}$$

in

$$F_l = \frac{m_s g - kd\, \tan\varphi}{2} = 10{,}5\ \mathrm{N}\,.$$

[3 *t.*]

c) Če os postavimo na sredino med obe vrvici, oddaljenost težišča v vodoravni smeri od središča pa označimo z x_s, dobimo za ravnovesje navorov

$$m_s g x_s + F_l d/2 = F_d d/2.$$

Za x_s dobimo

$$x_s = \frac{kd(x_d - x_l)}{2m_s g} = \frac{kd^2\, \tan\varphi}{2m_s g} = 8{,}5\ \mathrm{cm}.$$

[4 *t.*]

3. *Podatki:* $h = 7$ m, $m = 1$ kg, $k = 0{,}2$, $s = 4$ m.

a) Čas padanje vrečke je

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1{,}20 \text{ s}\,.$$

[1 t.]

Hitrosti v vodoravni in navpični smeri sta

$$v_x = \frac{s}{t} = 3{,}35 \text{ m/s}\,, \qquad v_y = gt = 11{,}7 \text{ m/s}\,.$$

[3 t.]

in gibalni količini

$$G_x = mv_x = 3{,}35 \text{ Ns}\,, \qquad G_y = mv_y = 11{,}7 \text{ Ns}\,.$$

[1 t.]

b) Če vrečka obmiruje na škatli, je sunek sile, s katero deluje vrečka na škatlo, enak gibalni količini vrečke tik pred trkom:

$$F_x\Delta t = mv_x = m\,\frac{x}{t}\,, \qquad F_y\Delta t = mv_y = m\,gt\,.$$

Silo v vodoravni smeri uravnovesi sila lepenja, v navpični pa pravokotna sila podlage: $F_x = F_l$, $F_y = F_n$ V mejnem primeru je $F_l = kF_n$.
[2 t.]

Z deljenjem enačb za sunek sile sledi:

$$\frac{F_x}{F_y} = \frac{F_l}{F_n} = k = \frac{x}{gt^2} = \frac{x}{2h}\,.$$

[2 t.]

Škatla sme bit oddaljena največ

$$x = v_x t = \frac{kG_x}{m}\,t = 2kh = 2{,}8 \text{ m}\,.$$

[1 t.]

4. *Podatki:* $\rho = 700$ kg/m^3, $a = 100$ cm, $b = 10$ cm.

a) Če l označimo višino potopljenega dela in zapišemo maso kvadra kot $m = \rho S a = \rho a^2 b$, velja

$$\rho_v g S l = \rho g S a\,, \qquad S = ab\,, \qquad l = \frac{\rho}{\rho_v}\, a = 0{,}7\; a\,.$$

Če se kvader potopi za x, je sila, s katero potiskamo, enako

$$F = F_v - mg = \rho_v g S x\,, \qquad 0 \le x \le a - l\,.$$

[1 *t.*]

Povprečna sila je

$$\bar{F} = \rho_v g S\, \frac{a-l}{2}$$

[1 *t.*]

in delo na poti $a - l$

$$A = \bar{F}(a-l) = \rho_v g S\, \frac{(a-l)^2}{2} = \frac{\rho_v g a^3 b}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_v}\right)^2 = 44 \text{ J}\,.$$

[1 *t.*]

b) V končni legi je težišče kvadra v globini $h = -\frac{1}{2}a$, v začetni pa v $h' = -(l - \frac{1}{2}a)$; težišče izpodrinjene vode je na koncu pri $h_v = -\frac{1}{2}a$ in na začetku pri $h'_v = -\frac{1}{2}l$, vse merjeno od gladine. Masa izpodrinjene vode je na koncu $m_v = \rho_v S a$, na začetku pa $m'_v = \rho_v S l = m$. Delo je enako: $A = \Delta W_g + \Delta W_v$,

$$\Delta W_g = mg(-\tfrac{1}{2}a + l - \tfrac{1}{2}a) = m_v g\, \frac{l}{a}(l-a) = \rho_v g S l (l-a)\,,$$

$$\Delta W_v = m_v g\, \frac{a}{2} - mg\, \frac{l}{2} = m_v g \left(\frac{a}{2} - \frac{l^2}{2a}\right) = \rho_v g S \left(\frac{a^2}{2} - \frac{l^2}{2}\right)\,,$$

$$A = \rho_v g S \left(\frac{a^2 - l^2}{2} - l(a-l)\right) = \rho_v g S\, \frac{(a-l)^2}{2}\,,$$

enako kot pri a).

[3 *t.*]

c) V začetni legi je kvader potopljen za $s = \frac{\rho}{\rho_v}\, b = 0{,}7\; b$. Težišče je na $h' = -(s - \frac{1}{2}b)$, težišče izpodrinjene vode pa pri $h'_v = -\frac{1}{2}s$. Končna lega je enaka začetni v primeru b). Masa izpodrinjene vode je v obeh legah enaka masi kvadra. Velja:

$$\Delta W_g = mg(-(l - \tfrac{1}{2}a) + (s - \tfrac{1}{2}b))\,, \qquad \Delta W_v = mg(\tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{2}b)\,,$$

$$A = \tfrac{1}{2}\, mg(a - l - (b - s)) = \frac{\rho\, g\, a^2 b\, (a-b)}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_v}\right) = 93 \text{ J}\,.$$

[4 *t.*]

Skupina II – rešitve

Rezultat je potrebno zapisati s smiselnim številom števk, v nasprotnem primeru odbijemo 1 t.

1. *Podatki:* $\alpha_1 = 2{,}31 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}, $\alpha_2 = 1{,}08 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}, $d = 0{,}5$ mm, $l = 10$ cm, $\Delta T = 50$ K, $\varphi = 30°$.

   a)
   $$\Delta l = l(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T = 61\ \mu\mathrm{m}\,.$$

   [3 *t.*]

   b) Trakova ležita na krožnicah s skupnim središčem. Če z r označimo razdaljo od sredine desnega traku do središča krožnice, sledi za desni in levi lok:
   $$s_2 = r\varphi\,, \qquad s_1 = (r+d)\varphi\,, \qquad \varphi = \frac{2\pi}{12}\,.$$

   [3 *t.*]

   Za razliko velja
   $$\Delta s = l(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T' = d\varphi$$
   in
   $$\Delta T' = \frac{d\varphi}{l(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\pi d}{6\,l(\alpha_1 - \alpha_2)} = 213\ \mathrm{K}\,.$$

   [4 *t.*]

2. *Podatki:* $d = 1{,}0$ mm, $a = 20$ cm, $\varphi = 45°$, $\xi = 0{,}10\ \Omega\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$.

a) Označimo debelino palice z d, njen presek s S, specifični upor z ξ, dolžino daljših prečk z b, dolžino krajših prečk pa z a. Okrogel presek palice izračunamo po enačbi

$$S = \pi d^2/4. \tag{1}$$

Z geometrijo ugotovimo, da sta dolžini daljših in krajših palic povezani prek

$$b = \sqrt{2}a, \tag{2}$$

od koder za upora obeh tipov palic sledi

$$R_a = \xi a/S = 4\xi a/(\pi d^2) = 25{,}5\,\mathrm{m}\Omega, \tag{3}$$

$$R_b = \xi b/S = 4\xi b/(\pi d^2) = \sqrt{2}R_a = 36{,}0\,\mathrm{m}\Omega. \tag{4}$$

[3 *t.*]

b) Če priključimo izvir napetosti na točki C in D, potem sta zgornja in spodnja polovica okvirja vzporedni veji. Vsaka veja ima zaporedno vezavo dveh vzporednih vej, torej je upor v vsaki veji enak

$$R_{veja} = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b} + \frac{R_a R_b}{R_a + R_b} = 2\frac{R_a R_b}{R_a + R_b}. \tag{5}$$

Skupna vezava dveh takih vzporednih vej ima tako nadomestni upor

$$R_{okvir} = \frac{R_{veja} R_{veja}}{R_{veja} + R_{veja}} = R_{veja}/2 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b}, \tag{6}$$

$$R_{okvir} = \frac{\sqrt{2}R_a^2}{R_a(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\,R_a = 14{,}9\,\mathrm{m}\Omega. \tag{7}$$

[3 *t.*]

c) Če priključimo izvor napetosti med točki A in E, potem je vezje simetrično glede na diagonalo AE. To pomeni, da bodo pripadajoči tokovi enaki, npr. tok na AL bo enak toku na AC, itd. Stranici CL in DM sta prečni glede na simetrijsko os; zaradi simetrije pride na obeh krajiščih prečnih stranic do enakega padca napetosti glede na točko A, zato sta prečna tokova nič in prečni veji sta mrtvi. Potemtakem lahko vezje obravnavamo kot dve vzporedni veji, pri čemer je vsaka sestavljena iz treh zaporedno vezanih komponent; druga od teh komponent ima dve vzporedni veji. Imamo torej

$$R_{veja} = R_b/2 + \frac{R_b R_a}{R_b + R_a} + R_b/2 = R_b + \frac{R_b R_a}{R_b + R_a} = R_b\left(1 + \frac{R_a}{R_b + R_a}\right). \tag{8}$$

Nadomestni upor vezja je potem

$$R_{vezja} = R_{veja}/2 = \left(1 + \frac{R_a}{R_a + R_b}\right) R_b/2 = R_a = 25{,}5\,\mathrm{m}\Omega. \tag{9}$$

[4 *t.*]

3. *Podatki:* $a = 10$ cm, $U_0 = 40$ V, $\varepsilon = 4$, $t_0 = 10$ s.

a) Naboj se ohranja: $e = U_0 C_0 = UC = U\,\varepsilon C_0$, $U = U_0/\varepsilon = 10$ V.
[2 *t.*]

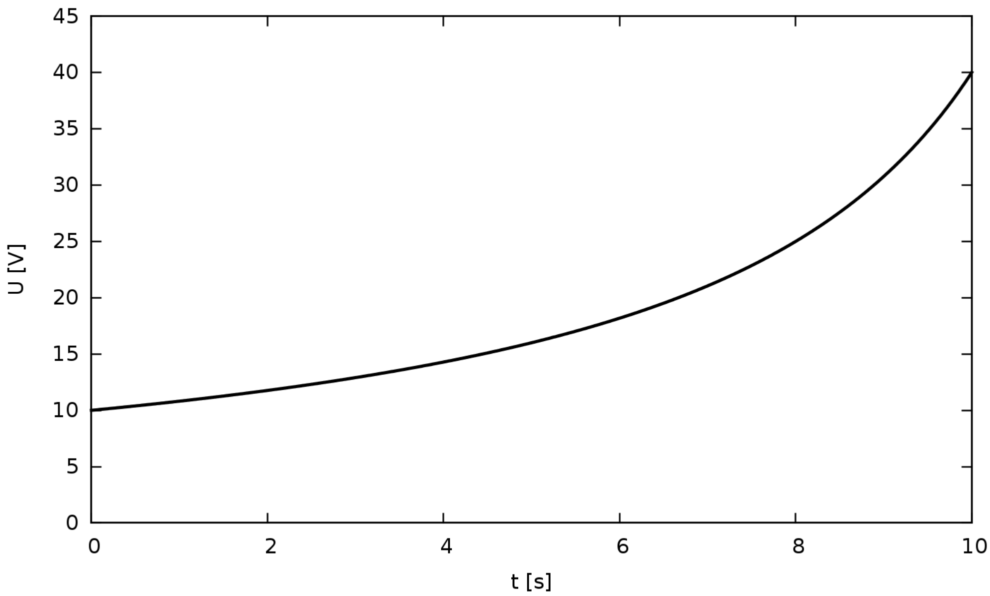
b) Če višino tekočine označimo z x, $x = a - vt$, se kapaciteta zmanjšuje kot

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon x a}{a} + \frac{\varepsilon_0 (a-x) a}{a} = \varepsilon_0((\varepsilon - 1)x + a)\,,$$

$$C(t) = \varepsilon_0 a((\varepsilon - 1)(a - vt) + a) = C_0\left(\varepsilon - (\varepsilon - 1)\frac{t}{t_0}\right)\,,$$

$$U(t) = \frac{e}{C(t)} = \frac{U_0 C_0}{C(t)} = \frac{U_0}{\varepsilon - (\varepsilon - 1)\dfrac{t}{t_0}}\,.$$

Lahko izračunamo vmesno točko, npr. $t = 5$ s, $U = 16$ V.



[4 *t.*]

c) Ker se kapaciteta zmanjšuje, se mora zmanjševati tudi naboj na ploščah, če naj bo napetost konstantna.

$$\Delta e(t) = U \Delta C(t) = U\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\Delta x = -U\varepsilon_0(\varepsilon - 1)v\Delta t = -C_0 U(\varepsilon - 1)\,\frac{\Delta t}{t_0}\,.$$

Tok je potem enak

$$I = -\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{(\varepsilon - 1)C_0 U}{t_0}$$

in upor

$$R = \frac{U}{I} = \frac{t_0}{(\varepsilon - 1)C_0} = \frac{t_0}{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 a} = 3{,}7 \cdot 10^{12}\ \Omega\,.$$

[4 *t.*]

4. *Podatki:* $a = 0{,}4$ m, $I_1 = 10$ A, $I_2 = 10$ A, $I_3 = 20$ A $l = 1$ m.

a) Magnetna sila je enaka

$$F = \frac{\mu_0 I_3 I_1 l}{2\pi\, 2a} - \frac{\mu_0 I_3 I_2 l}{4\pi\, a} = \frac{\mu_0 I_3 l}{2\pi\, a}\left(\frac{I_1}{2} - I_2\right) = 5{,}0 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}\,.$$

in je privlačna. Sila, s katero delujemo na tretji vodnik, je nasprotno enaka magnetni in kaže v desno.

[4 *t.*]

b) Razdaljo od prvega vodnika označimo z x:

$$B = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi x} - \frac{\mu_0 I_2 l}{2\pi(x-a)} - \frac{\mu_0 I_3 l}{2\pi(x-2a)} = 0\,.$$

[2 *t.*]

Okrajšamo in upoštevamo $I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_3$:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-a} - \frac{2}{x-2a} = 0\,.$$

Dobimo kvadratno enačbo

$$2x^2 - ax - 2a^2 = 0\,,$$

[2 *t.*]

z rešitvama

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}\, a\,,$$

$$x_1 = 1{,}28\, a = 51\ \mathrm{cm}\,, \qquad x_2 = -0{,}78\, a = -31\ \mathrm{cm}\,.$$

[2 *t.*]

Skupina III – rešitve

Rezultat je potrebno zapisati s smiselnim številom števk, v nasprotnem primeru odbijemo 1 t.

1. *Podatki:* $a = 100$ cm, $b = 10$ cm, $d = 10$ cm, $R = 1000\ \Omega$, $U = 24$ V.

   a) Po trakovih in skozi upornik teče tok:

$$I = \frac{U}{R} = 24\ \text{mA}\,.$$

   Magnetna sila med vodnikoma (trakovoma) je enaka

$$F_m = \frac{\mu_0 I^2\, a}{2\pi d} = \frac{\mu_0 U^2\, a}{2\pi d\, R^2} = 1{,}15 \cdot 10^{-9}\ \text{N}\,.$$

   Sila je **odbojna**, ker tokova tečeta v nasprotnih smereh.
   [2 *t.*]

   b) Kapaciteta kondenzatorja in naboj na ploščah (trakovih) sta

$$C = \frac{\varepsilon_0 ab}{d}\,, \qquad e = CU = \frac{\varepsilon_0 ab\, U}{d} = 2{,}14 \cdot 10^{-10}\ \text{As}\,.$$

   [2 *t.*]

   c) Sila med ploščama je

$$F_e = eE_{\text{plošča}} = e\,\frac{e}{2\varepsilon_0 ab} = \frac{\varepsilon_0 ab\, U^2}{2d^2} = 25{,}6 \cdot 10^{-9}\ \text{N}\,.$$

   Sila je **privlačna**, ker sta plošči nabiti z nasprotno predznačenima nabojema.

   Ker je privlačna električna sila večja od odbojne magnetne, se trakova **privlačita**.
   [4 *t.*]

   d) Če se upor zmanjša, se tok poveča in zato se poveča tudi magnetna sila. Naboj na ploščah pa ni odvisen od upora, zato ostane električna sila enaka kot prej. Predznak rezultante se spremeni, ko sta sili (nasprotno) enaki:

$$\frac{\mu_0 U^2\, a}{2\pi d\, R^2} = \frac{\varepsilon_0 ab\, U^2}{2d^2}\,,$$

$$R = \sqrt{\frac{d}{\pi\, b}}\, R_{\text{vac}}\,, \qquad R_{\text{vac}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\ \Omega\,, \qquad R = 212\ \Omega\,.$$

   (Izraz R_{vac} je znan kot impedanca vakuuma.)

   [2 *t.*]

2. *Podatki:* $\lambda = 633$ nm, $l = 30$ mm, $\Delta T = 12$ K, $T_0 = 18$ °C, $p_0 = 97$ kPa.

   Če je $n = k\rho + 1$, lahko razliko optičnih poti in pogoj za oslabitev zapišemo kot

$$nl - n'l = kl(\rho - \rho') = \tfrac{1}{2}\lambda\,.$$

   [3 *t.*]

   Iz splošne plinsko enačbe dobimo gostoti pri začetni in končni temperaturi:

$$\rho = \frac{Mp_0}{RT_0}\,, \qquad \rho' = \frac{Mp_0}{R(T_0 + \Delta T)}\,.$$

   [3 *t.*]

   Pogoj za oslabitev preuredimo:

$$\frac{klMp_0}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_0 + \Delta T}\right) = \frac{klMp_0 \Delta T}{RT_0(T_0 + \Delta T)} = \frac{\lambda}{2}$$

   in izrazimo

$$k = \frac{\lambda R T_0 (T_0 + \Delta T)}{2lMp_0 \Delta T}\,.$$

   Za lomni kvocient dobimo:

$$n = 1 + k\rho = 1 + \frac{kMp_0}{RT_0} = 1 + \frac{\lambda(T_0 + \Delta T)}{2l\Delta T} = 1{,}000265\,.$$

   [4 *t.*]

3. *Podatki:* $r = 5$ cm, $r_0 = 0{,}625$ cm, $m = 0{,}1$ g.

a) V ravnovesju vodoravna komponenta sile podlage uravnovesi električno silo, navpična pa težo:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}r)^2} = F_p\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \qquad mg = F_p\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Torej

$$\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} = mg$$

in

$$e = \sqrt{8\pi\varepsilon_0 r^2 mg} = 2{,}3\cdot 10^{-8}\ \mathrm{As}\,.$$

[2 *t.*]

b) Delo je enako razliki elektrostatske in potencialne energije kroglic:

$$A = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 2r_0} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}r} - 2mgr\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,,$$

pri čemer smo potencialno energijo šteli od končne lege. Izraz $e^2/4\pi\varepsilon_0$ izrazimo iz enačbe za ravnovesje in dobimo

$$A = 2mgr\left(\frac{r}{2r_0} - 1\right) = 2{,}9\cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}\,.$$

[4 *t.*]

c) Ohranja se kinetična, potencialna in elektrostatska energija kroglic:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 2r_0} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\,2r} + 2mgr + 2\,\tfrac{1}{2}mv^2$$

ali

$$mv^2 = 2mgr\left(\frac{r}{2r_0} - \frac{1}{2} - 1\right)\,,$$

$$v = \sqrt{2gr\left(\frac{r}{2r_0} - \frac{3}{2}\right)} = 1{,}57\ \mathrm{m/s}\,.$$

[4 *t.*]

Opomba: upoštevali bomo tudi rešitev, pri kateri je tekmovalec elektrostatsko energijo dveh kroglic štel dvakrat. V tem primeru je delo enako 0,62 mJ in hitrost 2,4 m/s.

4. *Podatki:* $k = 500$ N/m, $m = 1$ kg, $y = 4$ cm, $g = 10$ m/s^2.

a) Dolžino neraztegnjene vrvice označimo z l, elastični koeficient vrvice s k, maso uteži pa z m. Ko na vrvico obesimo utež, se bo raztegnila. V ravnovesni legi bo vsota sil enaka nič in s tem dobimo

$$mg = kx, \tag{10}$$

kjer x označuje raztezek vrvice do ravnovesne lege.

Vrvico iz ravnovesne lege še dodatno raztegnemo za y; nihalo bo ravno še nihalo sinusno, če bo najvišja točka, ki jo doseže utež, ustrezala prvotni dolžini vrvice (do koder vrvica še deluje z neko silo). Če zapišemo energijski izrek za spodnjo in zgornjo točko takega nihanja, ter upoštevamo enačbo (10) za ravnovesni raztezek, dobimo

$$\tfrac{1}{2}k(x+y)^2 = mg(x+y), \tag{11}$$

$$k(x+y) = 2mg = 2kx, \tag{12}$$

$$y = x = mg/k = 2{,}0\,\mathrm{cm}. \tag{13}$$

Utež smemo torej povleči navzdol ravno toliko, kolikor se je sama spustila zaradi lastne teže.
[3 *t.*]

b) Označimo dodatni raztezek vrvice ponovno z y. Pri nihanju takega nihala so štiri pomembne točke: najnižjo lego označimo z A, ravnovesno lego označimo z B, mesto, ko je vrvica ravno neraztegnjena, označimo s C, najvišjo lego pa z D. Nihalo niha sinusno med točkama A in C, medtem ko med točkama C in D sila vrvice ne deluje in gre zato za prosti pad. Razdaljo med točkama C in D označimo z oznako z. Če izenačimo elastično prožnostno energijo v točki A s potencialno energijo v točki D, dobimo

$$\tfrac{1}{2}k(x+y)^2 = mg(x+y+z), \tag{14}$$

$$z = \frac{k(x+y)^2}{2mg} - x - y. \tag{15}$$

Nihajni čas nihala bo sestavljen iz časov na treh različnih odsekih: na odseku AB, na odseku BC in na odseku CD:

$$t_0 = 2(t_{AB} + t_{BC} + t_{CD}), \tag{16}$$

kjer so časi na desni strani enačbe definirani kot časi preleta navedenih točk v eni smeri (zato faktor 2). Denimo, da bi imeli namesto vrvice vzmet (z enakim koeficientom k), ki deluje s silo tudi pri skrčitvi. Za tako vzmetno nihalo vemo, da je

$$\omega = \sqrt{k/m}, \tag{17}$$

$$t_0' = 2\pi\sqrt{m/k}. \tag{18}$$

Zdaj upoštevamo, da med A in C nihalo z vrvico niha enako kot bi nihalo vzmetno nihalo. Od točke A do točke B je torej 1/4 nihaja:

$$t_{AB} = t_0'/4 = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{m/k}. \tag{19}$$

Za sinusno nihanje okrog ravnovesne lege B s krožilno frekvenco ω in amplitudo y (kolikor smo vrvico raztegnili iz ravnovesne lege), velja

$$h(t) = y\,\sin(\omega t), \tag{20}$$

iz česar lahko določimo čas od ravnovesne lege B do točke C, ki je oddaljena x:

$$x = y\,\sin(\omega t_{BC}), \tag{21}$$

$$t_{BC} = \arcsin(x/y)/\omega = \arcsin(x/y)\sqrt{m/k}. \tag{22}$$

[2 *t.*]

Čas med C in D pa izračunamo iz prostega pada z višine z:

$$z = g t_{CD}^2/2, \tag{23}$$

$$t_{CD} = \sqrt{2z/g}. \tag{24}$$

[4 *t.*]

Celoten nihajni čas je po enačbi (16), ob upoštevanju enačb (10) in (15), enak

$$t_0 = (\pi + 2\arcsin(x/y))\sqrt{m/k} + 2\sqrt{2z/g}, \tag{25}$$

$$t_0 = \left(\pi + 2\arcsin\left(\frac{mg}{ky}\right)\right)\sqrt{m/k} + 2\sqrt{\frac{2}{g}\left(\frac{k(x+y)^2}{2mg} - x - y\right)}, \tag{26}$$

$$t_o = \sqrt{m/k}\left(\pi + 2\arcsin\left(\frac{mg}{ky}\right) + 2\sqrt{\left(\frac{ky}{mg}\right)^2 - 1}\right) = 0{,}34\,\mathrm{s}. \tag{27}$$

[1 *t.*]

V končni enačbi lahko preverimo, da za $y = x$ dobimo običajen nihajni čas $2\pi\sqrt{m/k}$, kar bi znašalo 0,28 s.

Kinematična rešitev

a) V ravnovesni legi je raztezek

$$x = \frac{mg}{k} = 2{,}0 \text{ cm}\,.$$

Amplituda nihanja je enaka začetnemu raztezku y od mirovne lege. V zgornji točki se nihalo lahko dvigne do prvotne lege krajišča neraztegnjene vzmeti, torej

$$y = x = 2{,}0 \text{ cm}\,.$$

[3 t.]

b) Nihalo sedaj niha z amplitudo $2y$. Za odmik od mirovne lege velja

$$s = -2y\cos(\omega t)\,, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Ko doseže točko, ko vzmet ni napeta, velja

$$-2y\cos(\omega t_1) = y\,, \qquad \omega t_1 = \frac{2\pi}{3}\,, \qquad t_1 = \frac{2\pi}{3\omega} = 0{,}0937 \text{ s}\,.$$

[2 t.]

V tem trenutku je hitrost uteži

$$v = 2y\omega\sin(\omega t_1) = y\omega\sqrt{3}\,.$$

[2 t.]

Najvišjo točko doseže v času

$$t_2 = \frac{v}{g} = 0{,}0775 \text{ s}\,.$$

[2 t.]

V začetno lego se ponovno vrne čez:

$$t = 2t_1 + 2t_2 = 0{,}34 \text{ s}\,.$$

[1 t.]