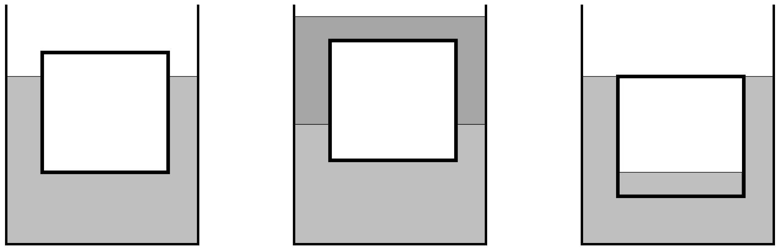
Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Skupina I

1. Votlo kovinsko škatlo v obliki kvadra z višino 12 cm neprodušno zapremo in jo damo v veliko posodo, ki je pred tem do višine 20 cm napolnjena z vodo. Ploščina zgornje ploskve škatle je 7,0 dm^2. Kovinska škatla plava, nad vodno gladino je 1,0 cm škatle kot kaže leva slika. V nalogi zanemari morebitni vzgon zraka na škatlo in maso zraka v škatli.



   a) Kolikšna je masa škatle?

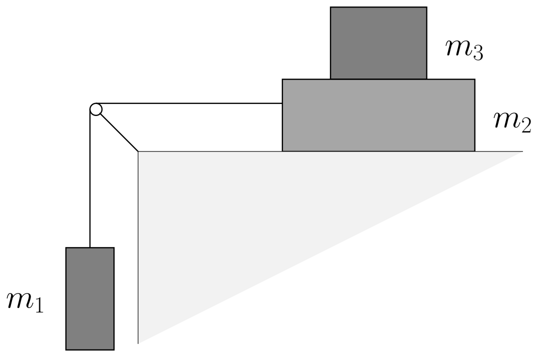
   b) V posodo z vodo dolijemo še toliko olja, da je škatla v celoti potopljena kot kaže srednja slika. Gostota olja je manjša od gostote vode, olje in voda se ne mešata. Ko se tekočini in škatla umirijo, je v vodi potopljeno 3,0 cm škatle. Kolikšna je gostota olja?

   c) V naslednjem poskusu škatlo na spodnjih delih stranskih ploskev večkrat prevrtamo, da lahko iz nje uhaja zrak in vanjo počasi priteka voda. Škatlo damo v veliko posodo, ki je pred tem do višine 20 cm napolnjena samo z vodo brez olja. V času 50 s se škatla popolnoma potopi v vodo, kot kaže desna slika. S kolikšnim povprečnim volumskim tokom voda priteka v škatlo?

2. Na mizi pripravimo sistem klad in škripca: leva klada visi na lahki neraztegljivi vrvici, ki je prek lahkega škripca pritrjena na klado na mizi, na kateri leži tretja klada; mase klad označimo z m_1, m_2 in m_3, kot kaže slika. Klade in miza so iz enakega lesa, koeficient trenja med lesenimi površinami je $k_{tr} = 0{,}20$, koeficient lepenja med lesenimi površinami je $k_l = 0{,}30$. Mase klad na mizi so konstantne, $m_2 = 4{,}0\,\mathrm{kg}$ ter $m_3 = 2{,}5\,\mathrm{kg}$, medtem ko maso viseče klade m_1 spreminjamo.

   a) Vsaj kolikšna mora biti masa viseče klade, da sistem ni več v ravnovesju in klada na mizi skupaj s klado na njej prične drseti?

   b) Kolikšen sme biti največ pospešek sistema in kolikšna masa viseče klade, da se kladi na mizi gibljeta skupaj, ne da bi zgornja klada zdrsnila glede na spodnjo?



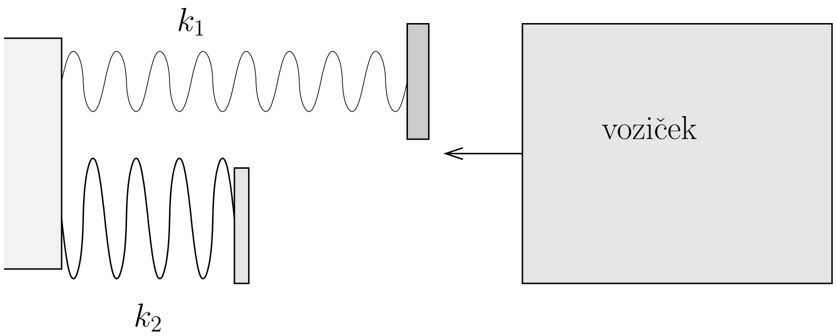
Prosim, obrni list, na drugi strani sta še dve nalogi.

3. Batman stoji sredi velike votline nad breznom brez dna na mirujoči ploščadi 20 m pod stropom votline. V nekem trenutku začne ploščad prosto padati v brezno. Batman se reši tako, da navpično proti stropu ustreli eno svojih naprav — pajek, ki se prilepi na strop in nosi dolgo močno lahko vrvico, na katero je Batman privezan. Hitrost pajka ob izstrelitvi je glede na Batmana 50 m/s, pajek se prilepi na strop, čim se dotakne stropa, ne glede na to, s kolikšno hitrostjo zadane strop. Zanemari sunek sile na Batmana ob izstrelitvi pajka.

   a) V kolikšnem času od trenutka, ko začne ploščad padati, mora Batman izstreliti pajka, da se ravno še reši?

   b) V kolikšnem času od trenutka, ko začne ploščad padati, pa mora Batman izstreliti pajka, da se ravno še reši, če je dolžina vrvice končna in znaša 50 m?

4. Amortizer je sestavljen iz dveh lahkih vzporednih vzmeti in dveh plošč. Vsaka vzmet je na enem krajišču pritrjena na steno in ima na drugem krajišču pritrjeno ploščo, kot v pogledu od zgoraj kaže slika. Daljša vzmet je neobremenjena dolga $l_1 = 15$ cm in ima prožnostni koeficient $k_1 = 10$ N/cm, krajša vzmet je neobremenjena dolga $l_2 = 5$ cm in ima prožnostni koeficient $k_2 = 50$ N/cm. V amortizer se zaleti nakupovalni voziček z maso 20 kg. Predpostavi, da se ob trku vozička v katerokoli ploščo voziček in plošča sprimeta. Voziček se ves čas giblje premo.



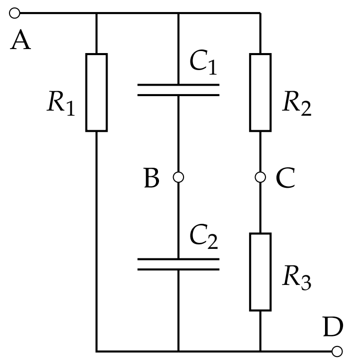
   a) Kolikšno hitrost je imel voziček, če se je ustavil 3,0 cm od stene? Predpostavi, da sta masi plošč amortizerja zanemarljivi.

   b) Naj bo masa plošče na daljši vzmeti 2,0 kg, voziček pa naj se proti steni pelje z enako hitrostjo kot v a) delu naloge. S kolikšno hitrostjo se v tem primeru voziček zaleti v ploščo na krajši vzmeti?

   c) Na kolikšni razdalji od stene se ustavi voziček v delu b) ob predpostavki, da ima plošča na krajši vzmeti zanemarljivo maso?

Skupina II

1. Iz dveh kondenzatorjev s kapacitetama $C_1 = 1{,}0\,\mathrm{nF}$ in $C_2 = 2{,}5\,\mathrm{nF}$ ter treh upornikov z upori $R_1 = 2R$ in $R_2 = R_3 = R$, $R = 50\,\Omega$, sestavimo vezje na sliki. Vezje ima štiri možne priključke, ki jih označimo s črkami A, B, C, D. Imamo tudi vir enosmerne napetosti 20 V. Kolikšen naboj se po dolgem času nabere na kondenzatorju s kapaciteto C_2, če



   a) vir napetosti vežemo med priključka A in D?

   b) vir napetosti vežemo med priključka A in D, medtem ko priključka B in C povežemo s prevodno žico z zanemarljivim uporom?

   c) vir napetosti vežemo med priključka A in C?

2. V zaprti posodi s skupno površino sten 20 dm^2 je 5,0 kg vode s temperaturo 20 °C. Zunanja temperatura je 20 °C. Vodo grejemo s potopnim grelcem s konstantnim uporom, ki ga priklopimo na vir z izmenično napetostjo 220 V. Na grelcu piše: 400 W, ∼220 V. Toploto, potrebno za segrevanje lonca, zanemari.

   a) V kolikšnem času bi se voda v posodi segrela na 22 °C, če bi ne bilo izgub toplote skozi stene posode?

   b) Toplotni tok skozi stene posode P_s je sorazmeren s temperaturno razliko ΔT med notranjostjo in zunanjostjo posode in s površino sten posode S: $P_s = kS\Delta T$. Oceni, kolikšna je vrednost sorazmernostnega koeficienta k, če segrevanje vode v delu a) traja 1 minuto in 50 sekund? Ocenjena vrednost k naj velja za posodo v vseh naslednjih delih naloge.

   c) Do kolikšne najvišje temperature lahko s tem potopnim grelcem segrejemo vodo v posodi?

   d) Koliko časa traja, da s podobnim potopnim grelcem, ki ima upor 100 Ω in ga priključimo na vir z izmenično napetostjo 220 V, segrejemo v isti posodi enako količino vode s temperature 27 °C na temperaturo 29 °C?

   e) Koliko časa bi potrebovali v primeru d), če bi greli vodo z obema grelcema, ki bi ju vezali zaporedno na vir z izmenično napetostjo 220 V?

Prosim, obrni list, na drugi strani sta še dve nalogi.

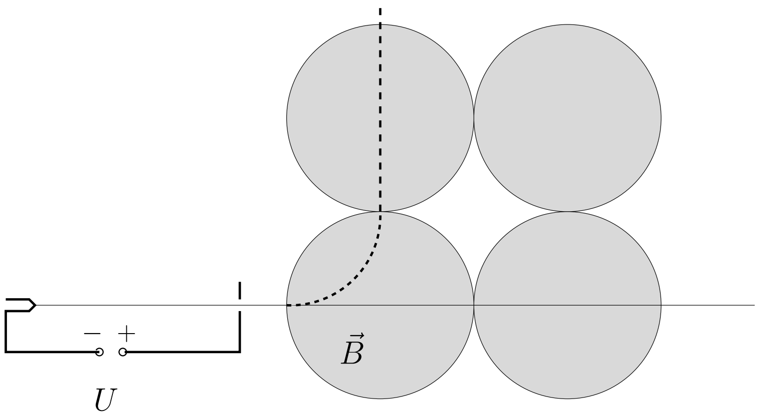
3. Negativne ione z nabojem $e = -e_0$ pospešujemo z napetostjo U in odklanjamo s tuljavami, kot kaže slika. Polmer tuljav je 8,0 cm; tuljave so postavljene tako, da so njihove osi pravokotne na list. Ko tuljavo priključimo na vir napetosti, nastane znotraj tuljave homogeno magnetno polje, zunaj pa polja ni.

   a) Kolikšna naj bo gostota magnetnega polja v tuljavi, da se curek ogljikovih ionov odkloni za 90° pri pospeševalni napetosti 1000 V? Določi tudi smer polja (levo, desno, gor, dol, v list, ali iz lista). Masa ogljikovega iona je $2{,}0 \cdot 10^{-26}$ kg.

   b) Kolikšna mora biti pospeševalna napetost, da dobimo enak odklon s curkom kisikovih ionov, ki so enako nabiti kot ogljikovi ioni? Kilomolski masi kisika in ogljika sta v razmerju 4/3. Tok v tuljavi je enak kot pri a).

   c) Vsako od tuljav priključimo na vir napetosti, da so magnetna polja v vseh po velikosti enaka velikosti polja v a) delu naloge. Določi smer polja v vsaki tuljavi tako, da bo po izhodu iz tuljav curek ogljikovih ionov nadaljeval pot tako, kot če v tuljavah ne bi bilo polja. Koliko dodatnega časa porabi za pot skozi tuljave?

   d) Z najmanj koliko tuljavami je mogoče curek usmerjati tako, da na koncu ioni čelno trčijo z ioni, ki zapuščajo pospeševalni del naprave? Skiciraj postavitev tuljav in označi smer polja v vsaki tuljavi.



4. Kolesarska zračnica ima srednji obseg $l = 180$ cm. Polmer prečnega preseka zračnice r je odvisen od razlike med tlakom zraka v zračnici p in zunanjim zračnim tlakom $p_0 = 1$ bar. Odvisnost opisuje relacija

$$p - p_0 = A\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \ ,$$

   pri čemer sta vrednosti parametrov $A = 12$ bar in $r_0 = 15$ mm. Tlak v zračnici je sprva $p = 2$ bar, zunanja temperatura je 23 °C.

   a) Kolikšen je polmer prečnega preseka zračnice?

   b) S tlačilko vpihamo v zračnico še $V = 0{,}75$ L zraka, merjeno pri zunanjem tlaku in zunanji temperaturi, in počakamo, da se temperatura v zračnici izenači z zunanjo temperaturo. Kolikšna sta sedaj polmer prečnega preseka zračnice in tlak v zračnici?

Skupina III

1. V zaprti posodi s skupno površino sten 20 dm^2 je 5,0 kg vode s temperaturo 20 °C. Zunanja temperatura je 20 °C. Vodo grejemo s potopnim grelcem iz železa, ki ga priklopimo na vir z izmenično napetostjo 220 V. Pri temperaturi vode 20 °C je moč grelca 400 W. Toploto, potrebno za segrevanje lonca, zanemari.

   a) V kolikšnem času bi se voda v posodi segrela na 22 °C, če bi ne bilo izgub toplote skozi stene posode in bi grelec oddajal konstantno moč?

   b) Toplotni tok skozi stene posode P_s je sorazmeren s temperaturno razliko ΔT med notranjostjo in zunanjostjo posode in s površino sten posode S: $P_s = kS\Delta T$. Oceni, kolikšna je vrednost sorazmernostnega koeficienta k, če segrevanje vode v delu a) traja 1 minuto in 50 sekund? Ocenjena vrednost k naj velja za posodo v vseh naslednjih delih naloge.

   c) Do kolikšne najvišje temperature bi lahko s tem potopnim grelcem s konstantno močjo segreli vodo v posodi?

   V resnici se električni upor železa spreminja s temperaturo kot $R(T) = R_0\,[1 + \alpha(T - T_0)]$, kjer je $\alpha = 0{,}00567\ \mathrm{K}^{-1}$ in je $R_0 = R(T_0)$ vrednost upora pri temperaturi T_0. Temperatura železa, iz katerega je grelec, je ves čas za neko konstantno vrednost višja od temperature vode, v katero je grelec potopljen. To pomeni, da je sprememba temperature železa kar enaka spremembi temperature vode in lahko v izrazu za $R(T)$ uporabimo $T_0 = 20$ °C in za T trenutno temperaturo vode.

   d) Do kolikšne najvišje temperature lahko s tem potopnim grelcem zares segrejemo vodo v posodi?

   e) Izpelji izraz za odvisnost hitrosti segrevanja vode $\dfrac{dT}{dt}$ od trenutne temperature vode T in odvisnost skiciraj na grafu $\dfrac{dT}{dt}\left(T\right)$.
   Kolikšna je hitrost segrevanja pri začetni temperaturi vode $T = T_0$ in kolikšna pri $T = 35$ °C?

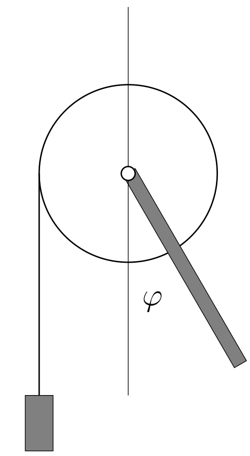
2. Poenostavljen model signalne naprave, ki jo uporabljamo v železniškem prometu, kaže slika. Signalna palica z dolžino 50 cm in maso 1,0 kg je pritrjena na lahko vreteno s polmerom 10 cm. Palico dvigujemo z utežjo na lahki vrvici, ki je navita na vreteno.

   a) Kolikšna naj bo masa uteži, da bo v ravnovesju kot φ med palico in navpičnico enak 30°?

   b) Poišči vse kote iz intervala $0 \leq \varphi \leq 180°$, pri katerih je sistem pri nespremenjeni masi uteži v ravnovesju. Za vsako ravnovesno lego napiši, ali je stabilna ali labilna, in odgovor utemelji.

   c) S kolikšno najmanjšo hitrostjo moramo mirujočo utež iz a) dela naloge suniti navzdol, da bo palica dosegla najvišjo lego ($\varphi = 180°$)?

   d) Kolikšna je kotna hitrost palice iz primera c) v najvišji legi ($\varphi = 180°$)?



Prosim, obrni list, na drugi strani sta še dve nalogi.

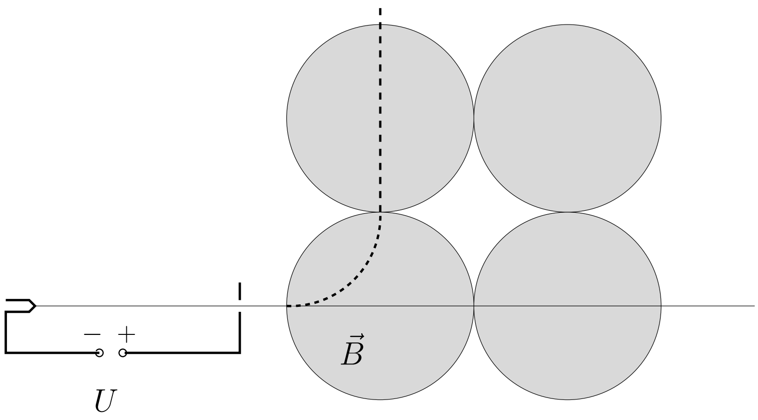
3. Negativne ione z nabojem $e = -e_0$ pospešujemo z napetostjo U in odklanjamo s tuljavami, kot kaže slika. Polmer tuljav je 8,0 cm; tuljave so postavljene tako, da so njihove osi pravokotne na list. Ko tuljavo priključimo na vir napetosti, nastane znotraj tuljave homogeno magnetno polje, zunaj pa polja ni.

   a) Kolikšna naj bo gostota magnetnega polja v tuljavi, da se curek ogljikovih ionov odkloni za 90° pri pospeševalni napetosti 1000 V? Določi tudi smer polja (levo, desno, gor, dol, v list, ali iz lista). Masa ogljikovega iona je $2{,}0 \cdot 10^{-26}$ kg.

   b) Kolikšna mora biti pospeševalna napetost, da dobimo enak odklon s curkom kisikovih ionov, ki so enako nabiti kot ogljikovi ioni? Kilomolski masi kisika in ogljika sta v razmerju 4/3. Tok v tuljavi je enak kot pri a).

   c) Vsako od tuljav priključimo na vir napetosti, da so magnetna polja v vseh po velikosti enaka velikosti polja v a) delu naloge. Določi smer polja v vsaki tuljavi tako, da bo po izhodu iz tuljav curek ogljikovih ionov nadaljeval pot tako, kot če v tuljavah ne bi bilo polja. Koliko dodatnega časa porabi za pot skozi tuljave?

   d) Z najmanj koliko tuljavami je mogoče curek usmerjati tako, da na koncu ioni čelno trčijo z ioni, ki zapuščajo pospeševalni del naprave? Skiciraj postavitev tuljav in označi smer polja v vsaki tuljavi.



4. Balon, ki ima prazen maso 1,0 g, napolnimo s helijem do prostornine 5,0 L in pričvrstimo na zgornje krajišče zelo lahke palice z dolžino 100 cm. Palica je prosto gibljiva okoli vodoravne osi, ki gre skozi spodnje krajišče. Balon ima obliko krogle, stik s palico je narejen tako, da balon okoli stika ne opleta in je težišče balona ves čas na premici, na kateri leži palica. Temperatura helija in okoliškega zraka je 20 °C in tlak 100 kPa. Kilomolska masa helija je 4,0 kg/kmol.

   a) S kolikšno frekvenco balon zaniha, ko ga rahlo sunemo v vodoravni smeri? Gibanje balona lahko obravnavaš kot gibanje točkastega telesa, podobno kot gibanje telesa na vrvici pri matematičnem nihalu. Pri tem in naslednjem vprašanju privzemi, da upor zraka ne vpliva na frekvenco nihanja.

   b) S kolikšno frekvenco zaniha balon iz a) dela naloge, če upoštevaš, da je masa palice 2,0 g in da balon ni točkast. Vztrajnostni moment krogelne lupine s polmerom r in maso m okoli simetrijske osi je $J = \frac{2}{3}\,mr^2$.

1. Višino škatle označimo z l, površino zgornje ploskve s S, maso škatle z m, gostoti vode in olja po vrsti z ρ_v in ρ_o, potopljeni del v vodo (ko je nad gladino zrak) z x, potopljeni del vodo v primeru (a), ko je nad njo olje, pa z x'. Težni pospešek označimo z g. V našem primeru je višina škatle $l = 12\,\mathrm{cm}$, $(l - x) = 1\,\mathrm{cm}$, torej je $x = 11\,\mathrm{cm}$, medtem ko je $x' = 3\,\mathrm{cm}$; $S = 7\ \mathrm{dm}^2$.

   a) Ko imamo opravka v posodi le z vodo, škatla plava na vodi, torej je sila teže škatle F_g uravnotežena s silo vzgona vode F_vzg. Sila vzgona je enaka teži izpodrinjene tekočine. Ker je volumen škatle enak Sl, ravnovesje zapišemo kot

$$F_\mathrm{g} = F_\mathrm{vzg}, \tag{1}$$
$$mg = \rho_v Sxg, \tag{2}$$
$$m = \rho_v Sx = 7{,}7\ \mathrm{kg}\,. \tag{3}$$

   [2 t.]

   b) V primeru olja in vode imamo opravka z dvema silama vzgona, in sicer del škatle potopljen v vodo čuti silo vzgona $F_{\mathrm{vzg},v}$ zaradi izpodrinjene vode, medtem ko del škatle potopljen v olje čuti silo vzgona $F_{\mathrm{vzg},o}$ zaradi izpodrinjenega olja. Ravnotežje med silami vzgona in silo teže škatle zdaj zapišemo kot

$$F_\mathrm{g} = F_{\mathrm{vzg},v} + F_{\mathrm{vzg},o}, \tag{4}$$
$$mg = \rho v Sx'g + \rho_o S(l - x')g, \tag{5}$$
$$m = \rho_v Sx' + \rho_o S(l - x'). \tag{6}$$

   Ko vstavimo maso škatle iz enačbe (3), dobimo

$$\rho_v Sx = \rho_v Sx' + \rho_o S(l - x'), \tag{7}$$
$$\rho_o = \rho_v \frac{x - x'}{l - x'} = 890\ \mathrm{kg}/m^3. \tag{8}$$

   [4 t.]

   c) Masni tok vode v škatlo označimo s Φ_m, volumski tok z Φ_V, čas pritekanja s t. Masa škatle in vode v njej ob času t je enaka $m + \Phi_m t$. Takrat je skupna teža škatle in pritečene vode enaka sili vzgona izpodrinjene vode, katere volumen ustreza volumnu celotne škatle. Velja torej

$$(m + \Phi_m t)g = \rho_v Slg, \tag{9}$$
$$(m + \rho_v \Phi_V t) = \rho_v Sl, \tag{10}$$
$$\Phi_V = \frac{\rho_v Sl - m}{\rho_v t} = \frac{S(l - x)}{t} = 14\ \mathrm{mL/s} \tag{11}$$

   Upoštevali smo povezavo med masnim in volumskim pretokom vode $\Phi_m = \rho_v \Phi_V$, ter maso škatle iz enačbe (3).
   [4 t.]

2. Mase uteži označimo z m_1, $m_2 = 4$ kg in $m_3 = 2{,}5$ kg, kot prikazuje slika v navodilu; $k_{tr} = 0{,}20$, $k_l = 0{,}30$. Sile na vsako od uteži so naslednje (glej sliko):

   - Viseča utež: sila teže F_{g1} navzdol ter sila vrvi F_v navzgor
   - Spodnja utež na mizi: sila teže F_{g2} navzdol, navpična sila zgornje uteži F_{23} navzdol, sila podlage F_0 navzgor, sila vrvi F_v v levo, vodoravna sila podlage F_{t2} v desno ter vodoravna sila zgornje uteži F_{t3} v desno.
   - Zgornja utež na mizi: sila teže F_{g3}, sila spodnje uteži (podlage) F_{23} navzgor, ter vodoravna sila spodnje uteži F_{t3}.

   Upoštevali smo, da je sila vrvi po velikosti v vrvi ves čas enaka, škripec le obrača njeno smer, ter da sta sili zgornje uteži na spodnjo in spodnje uteži na zgornjo nasprotno enaki.

   a) Obravnavamo primer, ko je utež m_1 dovolj velika, da imamo ravno še opravka z ravnotežjem. To pomeni, da je vsota sil na vsako od uteži enaka 0, in sicer tako v navpični kot vodoravni smeri. Dobimo naslednje enačbe:

$$m_1,\ y:\quad F_{g1} = F_v, \tag{12}$$
$$m_2,\ x:\quad F_v = F_{t2} + F_{t3}, \qquad y:\quad F_{g2} + F_{23} = F_0, \tag{13}$$
$$m_3,\ x:\quad F_{t3} = 0, \qquad y:\quad F_{g3} = F_{23}. \tag{14}$$

   Med utežema na mizi torej ni nobene vodoravne komponente. Vodoravna sila F_{t2} je največja možna sila lepenja, torej je enaka $F_{t2} = k_l\,F_0$. Za visečo utež torej dobimo

$$F_{g1} = F_v = F_{t2} = k_l F_0 = k_l(F_{g_2} + F_{g3}), \tag{15}$$
$$m_1 g = k_l\,(m_2 + m_3)g, \qquad m_1 = k_l\,(m_2 + m_3) = 1{,}95 \text{ kg}. \qquad [3t.] \tag{16}$$

   b) Tokrat se celoten sistem giblje s pospeškom a, in sicer viseča utež navzdol, uteži na mizi pa v levo. Po 2. Newtonovem zakonu za vodoravno in navpično smer za vsako od klad dobimo naslednje enačbe:

$$m_1,\ y:\quad m_1 a = F_{g1} - F_v, \tag{17}$$
$$m_2,\ x:\quad m_2 a = F_v - F_{t2} - F_{t3}, \qquad y:\quad 0 = F_{g2} + F_{23} - F_0, \tag{18}$$
$$m_3,\ x:\quad m_3 a = F_{t3}, \qquad y:\quad 0 = F_{g3} - F_{23}. \tag{19}$$

   [3 t.]

   Tokrat spodnja utež drsi po podlagi, tako da je vodoravna sila F_{t2} enaka sili trenja: $F_{t2} = k_{tr}F_0$. Zgornja utež pa ravno še ne zdrsne, tako da je sila med utežema na mizi enaka največji sili lepenja: $F_{t3} = k_l F_{23} = k_l F_{g3}$. S tem dobimo ključni pogoj za največji dovoljen pospešek a iz enačbe za zgornjo utež v x-smeri:

$$m_3 a = F_{t3} = k_l F_{g3} = k_l m_3 g, \tag{20}$$
$$a = k_l g = 2{,}94 \text{ m/s}^2. \qquad [2t.] \tag{21}$$

   Nato se osredotočimo na enačbo za spodnjo utež, prav tako v x-smeri, od koder lahko določimo silo vrvi:

$$m_2 a = F_v - F_{t2} - F_{t3} = F_v - k_{tr}F_0 - m_3 a = F_v - k_{tr}(F_{g2} + F_{g3}) - m_3 a, \tag{22}$$
$$F_v = (m_2 + m_3)a + k_{tr}(m_2 + m_3)g = (k_l + k_{tr})(m_2 + m_3)g. \tag{23}$$

   Maso viseče uteži nato določimo iz enačbe za to utež v y-smeri:

$$m_1 a = F_{g1} - F_v, \tag{24}$$
$$m_1(g - a) = F_v = (k_l + k_{tr})(m_2 + m_3)g, \tag{25}$$
$$m_1 = \frac{k_l + k_{tr}}{1 - k_l}(m_2 + m_3) = 4{,}6 \text{ kg}. \qquad [2t.] \tag{26}$$

3. $h = 20$ m, $v_0 = 50$ m/s, $l = 50$ m.

a) Naj Batman izstreli pajka ob času t_a. V tistem trenutku se nahaja na razdalji

$$y = h + \frac{1}{2}gt_a^2$$

pod stropom in se giblje s hitrostjo $u = gt_a$ navzdol. Izstreljeni pajek ima ob času t_a zato hitrost navzgor $v_0 - u$ in mora s to hitrostjo premagati višino y do stropa. V mejnem primeru mora biti hitrost pajka, ko se zaleti v strop, enaka nič. Iz enačbe za pot pri enakomerno pospešenem gibanju z znano začetno hitrostjo in pospeškom ter končno hitrostjo nič sledi

$$2gy = (v_0 - u)^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{(v_0 - u)^2}{2g}$$

oziroma

$$h + \frac{1}{2}gt_a^2 = \frac{1}{2g}(v_0 - gt_a)^2$$

in od tu

$$t_a = \frac{v_0}{2g} - \frac{h}{v_0} = 2{,}1510 \text{ s} \approx 2{,}15 \text{ s}.$$

[5 t.]

b) Nalogo najhitreje in najbolj elegantno rešimo, če jo rešujemo v koordinatnem sitemu prosto padajoče ploščadi. Ker gre za kinematiko, nas ne skrbijo ne sistemski pospeški ne kaj podobnega, zanima nas le opis gibanja v tem koordinatnem sistemu.

Z vidika ploščadi se lega stropa $z(t)$ s časom spreminja po enačbi

$$z(t) = h + \frac{1}{2}gt^2 ,$$

kjer je t merjen od trenutka, ko začne ploščad padati. Ker na pajka od izstrelitve naprej deluje isti težni pospešek kot na ploščad, se z vidika ploščadi pajek po izstrelitvi giblje enakomerno s hitrostjo v_0 navpično navzgor. Višina pajka nad ploščadjo $y(t')$ je od časa t', ki ga merimo od trenutka izstrelitve pajka, enaka

$$y(t') = v_0 t' .$$

Batman se ravno še reši, če se nahaja v trenutku, ko pajek zadane strop, na razdalji $z(t_2) = l$ pod stropom, od koder sledi, da mora pajek zadeti strop v trenutku

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(l - h)}{g}} = 2{,}47436 \text{ s} \approx 2{,}47 \text{ s},$$

merjeno od začetka padanja ploščadi. Po drugi strani mora pajek v času t' preleteti isto razdaljo l, saj je to dolžina vrvice

$$l = v_0 t' \qquad \longrightarrow \qquad t' = \frac{l}{v_0} = 1 \text{ s}.$$

Iz obeh rezultatov je očitno, da mora Batman izstreliti pajka najkasneje $t_b = t_2 - t'$ od začetka padanja ploščadi

$$t_b = t_2 - t' \approx 1{,}47 \text{ s}.$$

[5 t.]

4. $l_1 = 15$ cm, $k_1 = 10$ N/cm, $l_2 = 5$ cm, $k_2 = 50$ N/cm, $l_3 = 3$ cm, $m = 20$ kg, $m_p = 2$ kg.

a) Vsa kinetična energija pretvori v prožnostno. Vzmeti imata različna raztezka, $l_1 - l_3$ in $l_2 - l_3$. Velja

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}k_1(l_1 - l_3)^2 + \tfrac{1}{2}k_2(l_2 - l_3)^2 = 8{,}2\ \mathrm{J}\,, \qquad v = 0{,}91\ \mathrm{m/s}\,.$$

[4 t.]

b) Pri trku s prvo ploščo pride do neprožnega trka. Po trku ima voziček hitrost

$$v' = v\,\frac{m}{m + m_p} = 0{,}83\ \mathrm{m/s}$$

in kinetično energijo

$$W'_{\mathrm{kin}} = \tfrac{1}{2}(m + m_p)v'^2 = 7{,}45\ \mathrm{J}\,.$$

Na poti do do druge plošče se hitrost zmanjša na račun prožnostne energije prve vzmeti. Za končno kinetično energijo velja

$$\tfrac{1}{2}(m + m_p)v''^2 = \tfrac{1}{2}(m + m_p)v'^2 - \tfrac{1}{2}k_1(l_2 - l_3)^2 = 2{,}45\ \mathrm{J}\,.$$

Hitrost tik pred trkom z drugo ploščo je

$$v'' = \sqrt{v'^2 - \frac{k_1}{(m + m_p)}(l_1 - l_2)^2} = 0{,}47\ \mathrm{m/s}.$$

[3 t.]

c) Če označimo razdaljo do stene z x, velja

$$W'_{\mathrm{kin}} = \tfrac{1}{2}k_1(l_1 - x)^2 + \tfrac{1}{2}k_2(l_2 - x)^2$$

in x zadošča kvadratni enačbi:

$$\tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)x^2 - (k_1 l_1 + k_2 l_2)x + \tfrac{1}{2}k_1 l_1^2 + \tfrac{1}{2}k_2 l_2^2 - W'_{\mathrm{kin}}\,.$$

Če merimo x v centimetrih, se enačba poenostavi v:

$$0{,}3\,x^2 - 4x + 10{,}05 = 0$$

s smiselno rešitvijo

$$x = 3{,}3\ \mathrm{cm}\,.$$

Druga rešitev, $x_2 = 13$ cm, ni smiselna, saj je $x_2 > l_2$.
[3 t.]

1. $C_1 = 1{,}0\,\mathrm{nF}$, $C_2 = 2{,}5\,\mathrm{nF}$, $R_1 = 2R$, $R_2 = R_3 = R$, $R = 50\,\Omega$, $U = 20$ V.

Za vsakega od upornikov označimo njegov upor, tok skozenj in padec napetosti po vrsti z R_i, I_i in U_i. Uporniki so oštevilčeni, kot kaže slika iz navodil. Kondenzatorja imata kapaciteti C_1 in C_2, padca napetosti U_1' in U_2', na njiju se nabereta naboja e_1 in e_2. Napetost generatorja označimo z U.

Za upornike velja Ohmov zakon $U_i = R_i I_i$, za kondenzatorje pa povezava med nabojem in napetostjo z zvezo $U_i' = e_i/C_i$. Za izračun naboja e_2 na drugem (spodnjem) kondenzatorju zadošča, da določimo padec napetosti na tem kondenzatorju U_2'. Po dolgem času tok v vejah s kondenzatorji ne teče več, s e je pa na njih nabral naboj.

a) Med priključkoma A in D je napetost U. Po 2. Kirchhoffovem zakonu bo poljubna pot od priključka A do D morala dati skupen padec napetosti na vseh elementih enak U. Izberemo si pot po srednji veji čez oba upornika:

$$U = U_1' + U_2' = e_1/C_1 + e_2/C_2. \tag{1}$$

Ker sta kondenzatorja vezana zaporedno, se bo na njiju nabral enak naboj, torej $e := e_1 = e_2$. Zato dobimo

$$e_2 = e = U/(1/C_1 + 1/C_2) = 1{,}43 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{As}. \tag{2}$$

[3 t.]

b) Med priključkoma A in D je ponovno napetost U, le da sta tokrat priključka B in C povezana z žico, in zato na enaki napetosti. Tokrat zapišemo 2. Kirchhoffov zakon za dve poti: prva pot vodi prek upornikov R_2 in R_3, druga pot pa prek upornika R_2 ter kondenzatorja C_2. Dobimo

$$U = U_2 + U_3, \qquad U = U_2 + U_2'.$$

Iz zgornjih enačb vidimo, da je padec napetosti na uporniku R_3 in kondenzatorju C_2 enak. Ker v vejah s kondenzatorji ne teče noben tok, tudi po žici med priključkoma B in C ni toka, zato teče skozi R_2 in R_3 enak tok $I := I_2 = I_3$. Velja torej $U = I(R_2 + R_3)$, padec napetosti na R_3 je torej

$$U_3 = I\,R_3 = U R_3/(R_2 + R_3),$$

in zato je naboj na drugem kondenzatorju enak

$$e_2 = U_2'\,C_2 = U_3\,C_2 = U C_2\,R_2/(R_2 + R_3) = 2{,}5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{As}.$$

[3 t.]

c) Tokrat je napetost U med priključkoma A in C, brez dodatnih žic. Padce napetosti obravnavamo na dveh različnih poteh: prva pot je prek upornikov R_1 in R_3, druga pot pa prek kondenzatorjev C_1 in C_2 ter nato prek upornika R_3. Po 2. Kirchhoffovem zakonu dobimo

$$U = U_1 + U_3, \qquad U = U_1' + U_2' + U_3.$$

Skupen padec napetosti na kondenzatorjih je enak padcu napetosti na uporniku R_1. Kondenzatorja sta ponovno vezana zaporedno in imata enak nabran naboj, in ker v njuni veji ne teče noben tok je tok skozi upornika R_1 in R_3 enak. Definiramo $e := e_1 = e_2$ in $I := I_1 = I_3$. Zgornje enačbe za padce napetosti se prepišejo v

$$U = I(R_1 + R_3), \qquad U = e/C_1 + e/C_2 + IR_3,$$

od koder za naboj e dobimo

$$e = \frac{U - IR_3}{1/C_1 + 1/C_2} = U\,\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\,\frac{R_1}{R_1 + R_3} = 9{,}5 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{As}.$$

[4 t.]

2. $S = 20\ \mathrm{dm}^2 = 0{,}20\ \mathrm{m}^2$, $m = 5$ kg, $P_0 = 400$ W, $U = 220$ V, $c = 4200$ J/kg K, $R = 100\ \Omega$, $\Delta T = 2$ K, $T_0 = 20$ °C, $T_1 = 27$ °C, $T_2 = 29$ °C, $t_b = 110$ s.

a) Prejeta moč gre za segrevanje vode

$$mc\Delta T = P_0 t_a \qquad \Longrightarrow \qquad t_a = \frac{mc\Delta T}{P_0} = 105\ \mathrm{s}.$$

[1 t.]

b) Med segrevanjem je povprečen toplotni tok skozi stene približno tak, kot da bi bila v posodi povprečna temperatura med začetno 20 °C in končno 22 °C. Povprečna temperaturna razlika, ki žene toplotni tok je torej $\Delta T' = \frac{1}{2}\Delta T$. Velja

$$mc\Delta T = \left(P_0 - kS\Delta T'\right) t_b$$

oziroma

$$P_0 t_a = \left(P_0 - kS\Delta T'\right) t_b \qquad \Longrightarrow \qquad k = \frac{2P_0}{S\Delta T}\left(1 - \frac{t_a}{t_b}\right) = 90{,}91\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}} \approx 91\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}\ .$$

[3 t.]

c) Segrevanje se ustavi, ko so izgube skozi steno enake moči grelca

$$P_0 = kS(T_k - T_0) \qquad \Longrightarrow \qquad T_k = T_0 + \frac{P_0}{kS} = T_0 + \Delta T\frac{t_b}{2(t_b - t_a)} = 42\,°\mathrm{C}.$$

[2 t.]

d) Moč grelca z uporom R je $P = U^2/R = 484$ W. Oceno toplotnega toka skozi stene dobimo iz povprečne temperature vode $\hat{T}$ med segrevanjem od T_1 do T_2, $\hat{T} = (T_1 + T_2)/2 = 28$ °C. Podobno kot pri b) velja

$$mc\Delta T = \left(P - kS(\hat{T} - T_0)\right) t_d$$

in od tu

$$t_d = \frac{mc\Delta T}{P - kS(\hat{T} - T_0)} = 124{,}06\ \mathrm{s} \approx 124\ \mathrm{s}.$$

[2 t.]

e) Pri zaporedno vezanih grelcih se seštejeta upora in je zato moč manjša

$$P_e = \frac{U^2}{R + R_0} = P_0\frac{R_0}{R + R_0} = 219\ \mathrm{W},$$

kjer je R_0 upor grelca iz a) dela naloge $R_0 = U^2/P_0 = 121\ \Omega$. Za čas segrevanja dobimo

$$t_e = \frac{mc\Delta T}{P_e - kS(\hat{T} - T_0)} = 571{,}04\ \mathrm{s} \approx 571\ \mathrm{s} \approx 9{,}5\ \mathrm{min}.$$

[2 t.]

3. $U = 1000$ V, $m_C = 2{,}0 \cdot 10^{-26}$ kg, $r = 8{,}0$ cm, $M_O/M_C = 4/3$.

a) Pri pospeševanju v električnem polju je kinetična energija na koncu enaka električnemu delu. Od tod sledi

$$\tfrac{1}{2} m_C v^2 = e_0 U\,, \qquad v = \sqrt{\frac{2e_0U}{m_C}} = 1{,}27 \cdot 10^5 \text{ m/s}\,.$$

[1 t.]

V magnetnem polju naredi pot, ki je enaka ravno četrtini obsega krožnice, torej je polmer krožnice enak polmeru tuljave. Pri enakomernem kroženju je radialni pospešek enak magnetni sili

$$m_C \frac{v^2}{r} = e_0 v B\,, \qquad B = \frac{mv}{e_0 r} = 0{,}20 \text{ T}\,.$$

[2 t.]

Smer sile je določena z vektorskim produktom med hitrostjo in magnetnim poljem:

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B} = -e_0 \vec{v} \times \vec{B}\,.$$

Da bo smer sile v levo (glede na smer hitrosti), mora biti smer polja **iz lista**.
[1 t.]

b) Iz enačb pri a) izrazimo napetost z maso iona m:

$$U = \frac{mv^2}{2e_0} = \frac{m^2v^2}{2me_0} = \frac{e_0 r^2 B^2}{2m}\,.$$

Pri konstantnem naboju polmeru in gostoti polja je potrebna napetost obratno sorazmerne z maso. Torej

$$\frac{U_O}{U_C} = \frac{m_C}{m_O} = \frac{M_C}{M_O} = \frac{3}{4}\,, \qquad U_0 = 750 \text{ V}\,.$$

[2 t.]

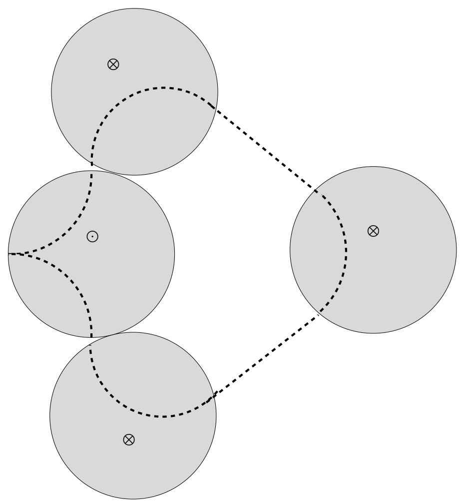
c) Če v tuljavah ne bi bilo polja, bi ion na poti skozi tuljave opravil pot $4r$ in za to potreboval čas $t_0 = 4r/v$; ob prisotnosti polja pa opravi pot, ki je ravno enaka obsegu tuljave. Hitrost ostane enaka začetni, saj magnetna sila deluje pravokotno na smer gibanja in velikosti hitrosti ne spreminja. Časovni zaostanek je enak

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{v} - \frac{4r}{v} = \frac{2(\pi - 2)r}{v} = 1{,}43\ \mu\text{s}\,.$$

V spodnjih dveh tuljavah na sliki je smer polja iz lista, v zgornjih dveh pa v list. [2 t.]

d)

Pri polju, izračunanem pri a), so potrebne vsaj štiri tuljave; če pa privzamemo, da lahko polje v tuljavah poljubno spreminjamo, je možna postavitev le z dvema tuljavama. Takšna rešitev je vredna [2 t.], če je tudi smiselno utemljena. Smiselne rešitve z več tuljavami, so vredne 1 točko.



4. $l = 180$ cm, $A = 12$ bar, $r_0 = 15$ mm, $p_1 = 2$ bar, $p_0 = 1$ bar, $T = 20\,^\circ$C.

   Začetni polmer določimo kar z obračanjem podane zveze:

$$r_1 = r_0 \left(1 - \frac{\Delta p}{A}\right)^{-1} = 16{,}36 \text{ mm}\,.$$

[2 t.]

Iz tega si izračunamo maso zraka v zračnici:

$$m_1 = \frac{p_1 V M}{RT} = \frac{p_1 \pi r_1^2 l M}{RT} = 3{,}57 \text{ g}\,.$$

Tej masi dodamo maso $\frac{p_0 V M}{RT} = 0{,}88$ g, skupaj je to $m_2 = 4{,}45$ g.

V prejšnjem stanju smo po plinski enačbi imeli

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{MRT}$$

v novem stanju pa

$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{MRT}\,.$$

Enačbi delimo, upoštevamo še $V = \pi r^2 l$ in dobimo

$$\frac{p_1 r_1^2}{p_2 r_2^2} = \frac{m_1}{m_2}\,,$$

velja pa tudi enačba zračnice

$$p_2 - p_0 = A\left(1 - \frac{r_0}{r_2}\right)\,.$$

Z eliminacijo tlaka p_2 dobimo

$$\frac{p_1 r_1^2 m_2}{r_2^2 m_1} = p_0 + A\left(1 - \frac{r_0}{r_2}\right)\,.$$

Množimo z r_2^2 in dobimo kvadratno enačbo:

$$r_2^2\,(p_0 + A) - A r_0 r_2 - \frac{p_1 r_1^2 m_2}{m_1} = 0\,,$$

iz česar sledi

$$r_2 = 16{,}9 \text{ mm}\,.$$

Tlak pa kar iz enačbe zračnice:

$$p_2 = 2{,}34 \text{ bar}\,.$$

[8 t.]

1. $S = 20\ \mathrm{dm}^2 = 0{,}20\ \mathrm{m}^2$, $m = 5$ kg, $P_0 = 400$ W, $U = 220$ V, $c = 4200$ J/kg K, $\Delta T = 2$ K, $T_0 = 20$ °C, $T_1 = 35$ °C, $\alpha = 0{,}00567\ \mathrm{K}^{-1}$, $t_b = 110$ s.

   a) Prejeta moč gre za segrevanje vode

$$mc\Delta T = P_0 t_a \qquad \Longrightarrow \qquad t_a = \frac{mc\Delta T}{P_0} = 105 \text{ s.}$$

[1 t.]

b) Med segrevanjem je povprečen toplotni tok skozi stene približno tak, kot da bi bila v posodi povprečna temperatura med začetno 20 °C in končno 22 °C. Povprečna temperaturna razlika, ki žene toplotni tok je torej $\Delta T' = \frac{1}{2}\Delta T$. Velja

$$mc\Delta T = \left(P_0 - kS\Delta T'\right) t_b$$

oziroma

$$P_0 t_a = \left(P_0 - kS\Delta T'\right) t_b \qquad \Longrightarrow \qquad k = \frac{2P_0}{S\Delta T}\left(1 - \frac{t_a}{t_b}\right) = 90{,}91\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}} \approx 91\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}\ .$$

[2 t.]

c) Segrevanje se ustavi, ko je toplotni tok skozi stene enake moči grelca

$$P_0 = kS(T_c - T_0) \qquad \Longrightarrow \qquad T_c = T_0 + \frac{P_0}{kS} = T_0 + \Delta T \frac{t_b}{2(t_b - t_a)} = 20\,°\mathrm{C} + 22\,°\mathrm{C} = 42\,°\mathrm{C}.$$

[1 t.]

d) Moč grelca z uporom R je $P = U^2/R$, torej se moč grelca s temperaturo spreminja kot

$$P(T) = \frac{P_0}{1 + \alpha(T - T_0)}$$

Izraz iz c) dela naloge se tako spremeni v

$$T_d = T_0 + \frac{P(T_d)}{kS} = T_0 + \frac{P_0}{kS}\,\frac{1}{1 + \alpha(T_d - T_0)} = T_0 + \Delta T \frac{t_b}{2(t_b - t_a)}\,\frac{1}{1 + \alpha(T_d - T_0)}\ .$$

Od tu dobimo kvadratno enačbo za T_d z rešitvijo $T_d = 39{,}78$ °C$\approx 39{,}8$ °C.

Bolj fizikalno lahko do rešitve pridemo tudi iterativno. Definirajmo

$$\delta T \equiv \Delta T \frac{t_b}{2(t_b - t_a)} = 22 \text{ K}$$

in enačbo za T_d preoblikujmo v

$$T_d - T_0 = T_0 + \frac{\delta T}{1 + \alpha(T_d - T_0)}\ .$$

Ker je $\alpha\delta T = 0{,}12474$ precej manj od 1, v prvem približku namesto $T_d - T_0$ vzamemo kar rešitev iz c) dela naloge 22 K. Od tu dobimo za $T_d - T_0$ približek $T_d - T_0 = 19{,}56$ K. S tem približkom na desni strani enačbe že dobimo na levi $T_d - T_0 = 19{,}804$ K, kar je končna rešitev. Če nismo zadovoljni, naredimo še eno iteracijo in dobimo $T_d - T_0 = 19{,}779$ K. Končna rešitev je $T_d \approx 39{,}8$ °C. Seveda lahko iterativno reševanje izpustimo in rešimo kvadratno enačbo, kjer je ena rešitev negativna, druga pa pravilna.

[3 t.]

e) Mala količina toplote, ki jo prejme voda v kratkem času dt, povzroči majhno spremembo temperature dT. Energjska bilanca je

$$mc\,dT = \left[\frac{P_0}{1+\alpha(T-T_0)} - kS(T-T_0)\right] dt = P_0\left[\frac{1}{1+\alpha(T-T_0)} - \frac{2(t_b-t_a)}{\Delta T t_b}(T-T_0)\right] dt$$

oziroma

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P_0}{mc}\left[\frac{1}{1+\alpha(T-T_0)} - \frac{2(t_b-t_a)}{\Delta T t_b}(T-T_0)\right] \approx \frac{P_0}{mc}\left[1-\left(\alpha+\frac{2(t_b-t_a)}{\Delta T t_b}\right)(T-T_0)\right] ,$$

ker je produkt $\alpha\delta T$ dovolj majhen, da naredimo približen razvoj

$$\frac{1}{1+\alpha(T-T_0)} \approx 1-\alpha(T-T_0) .$$

vidimo, da je odvisnost hitrosti od temperature približno linearna s koeficientom $k = -5{,}11\cdot 10^{-2}\ \mathrm{K}^{-1}$, če zapišemo

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P_0}{mc}\left[1-k(T-T_0)\right] ,$$

Pri $T = T_0$ dobimo hitrost segrevanja $19{,}05\cdot 10^{-3}$ K/s, pri $T = T_1$ pa $4{,}44\cdot 10^{-3}$ K/s. [3 t.]

2. $m = 1$ kg, $l = 50$ cm, $r = 10$ cm, $\varphi_0 = 30°$.

a) V ravnovesju je navor uteži nasprotno enak navoru palice in sledi:

$$m_u g r = mg\,\frac{l}{2}\,\sin\varphi_0\,, \qquad m_u = \frac{ml}{4l} = 1{,}25\ \mathrm{kg}\,.$$

[2 t.]

b) Enačba za ravnovesje

$$m_u g r = mg\,\frac{l}{2}\,\sin\varphi$$

ima za m_u iz a) splošno rešitev

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}\,.$$

Poleg rešitve s $\varphi = \varphi_0 = 30°$, obravnavane pri a), ima drugo rešitev pri

$$\varphi \equiv \varphi_2 = 150°\,.$$

[1 t.]

Ravnovesno stanje je v tem primeru **labilno**. Če malo povečamo kot, se navor palice zmanjša, in palica se prične gibati proti večjim vrednostim φ. Če pa se kot malo zmanjša, se poveča navor palice, in kot se prične zmanjševati.
[1 t.]

c) Palica mora ravno doseči drugo ravnovesno lego pri φ_2; v tej legi sistem za trenutek obmiruje, nato pa utež potegne palico do končne lege pri $\varphi = 180°$. (Palica sicer nadaljuje vrtenje dokler utež ne doseže tal.) Končno lego pri računu ohranitve vsote kinetične in potencialne energije bomo torej postavili v drugo ravnovesno lego pri $\varphi = \varphi_2 = 150°$. Kinetična energija je tu nič, končna lega za račun potencialne energije je pri φ_2 in začetna pri φ_0.

Kinetična energija na začetku je enaka vsoti kinetične energije uteži in rotacijske kinetične energije palice, ki se vrti okoli krajišča:

$$W_{\mathrm{kin}} = \tfrac{1}{2} m_u v^2 + \tfrac{1}{2} J\omega^2 = \tfrac{1}{2} m_u r^2\omega^2 + \frac{1}{6} m l^2 \omega^2\,,$$

saj je hitrost uteži enaka obodni hitrosti vretena. Z upoštevanjem rešitve pri a) sledi

$$W_{\mathrm{kin}} = \frac{ml}{24}\,(3r + 4l)\,\omega^2\,.$$

Potencialna energija uteži se spremeni za

$$W_{\mathrm{pot,u}} = m_u g h, \qquad h = -r(\varphi_2 - \varphi_0)\,, \qquad \varphi_2 - \varphi_0 = 120° = \frac{2\pi}{3}\,.$$

Višino težišča palice zapišemo kot $z = \tfrac{1}{2} l(1 - \cos\varphi)$, če je izhodišče pri $\varphi = 0$. Potencialna energija palice se poveča za

$$\Delta W_{\mathrm{pot,p}} = mg\,\frac{l}{2}\,(1 - \cos\varphi_2) - mg\,\frac{l}{2}\,(1 - \cos\varphi_0) = mg\,\frac{l}{2}\,(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_2)\,.$$

Z upoštevanjem rešitve pri a) sledi za skupno spremembo

$$\Delta W_{\mathrm{pot}} = -\frac{mgl}{4}\,(\varphi_2 - \varphi_0 + 2(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_0))\,.$$

Iz ohranitve energije sledi

$$\omega = \sqrt{\frac{6g\,(2(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_2) - \varphi_2 + \varphi_0)}{3r + 4l}} = 5{,}9\ \mathrm{s}^{-1}\,, \qquad v = \omega r = 59\ \mathrm{cm/s}.$$

[4 t.]

d) V zgornji legi ima sistem palice in uteži kinetično energijo, ki je enaka spremembi potencialne energije, ko se palica premakne iz ravnovesne lege pri $\varphi_2 = 150°$ do $\varphi = 180°$.

Končno kinetično energijo zapišemo tako kot v primeru c):

$$W_{\mathrm{kin}} = \tfrac{1}{2}m_u v^2 + \tfrac{1}{2}J\omega^2 = \tfrac{1}{2}m_u r^2\omega^2 + \frac{1}{6}ml^2\omega^2\,,$$

Potencialna energija uteži se spremeni za

$$W_{\mathrm{pot,u}} = -m_u g r \Delta\varphi_2 \qquad \Delta\varphi_2 = 180° - 150° = \frac{\pi}{6}\,.$$

Potencialna energija palice se poveča za

$$W_{\mathrm{pot,p}} = mg\,\frac{l}{2}\,(1-\cos\pi) - mg\,\frac{l}{2}\,(1-\cos\varphi_2) = mg\,\frac{l}{2}\,(1+\cos\varphi_2)$$

Z upoštevanjem rešitve pri a) sledi za skupno spremembo

$$W_{\mathrm{pot}} = -\frac{mgl}{4}\,(\Delta\varphi_2 - 2(1+\cos\varphi_2))$$

Iz ohranitve energije sledi

$$\omega = \sqrt{\frac{6g\,(\Delta\varphi_2 - 2(1+\cos\varphi_2))}{3r+4l}} = 2{,}56\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

[2 t.]

3. $U = 1000$ V, $m_C = 2{,}0 \cdot 10^{-26}$ kg, $r = 8{,}0$ cm, $M_O/M_C = 4/3$.

a) Pri pospeševanju v električnem polju je kinetična energija na koncu enaka električnemu delu. Od tod sledi

$$\tfrac{1}{2} m_C v^2 = e_0 U\,, \qquad v = \sqrt{\frac{2e_0U}{m_C}} = 1{,}27 \cdot 10^5 \text{ m/s}\,.$$

[1 t.]

V magnetnem polju naredi pot, ki je enaka ravno četrtini obsega krožnice, torej je polmer krožnice enak polmeru tuljave. Pri enakomernem kroženju je radialni pospešek enak magnetni sili

$$m_C\,\frac{v^2}{r} = e_0 v B\,, \qquad B = \frac{mv}{e_0 r} = 0{,}20 \text{ T}\,.$$

[2 t.]

Smer sile je določena z vektorskim produktom med hitrostjo in magnetnim poljem:

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B} = -e_0 \vec{v} \times \vec{B}\,.$$

Da bo smer sile v levo (glede na smer hitrosti), mora biti smer polja **iz lista**.
[1 t.]

b) Iz enačb pri a) izrazimo napetost z maso iona m:

$$U = \frac{mv^2}{2e_0} = \frac{m^2v^2}{2me_0} = \frac{e_0 r^2 B^2}{2m}\,.$$

Pri konstantnem naboju polmeru in gostoti polja je potrebna napetost obratno sorazmerne z maso. Torej

$$\frac{U_O}{U_C} = \frac{m_C}{m_O} = \frac{M_C}{M_O} = \frac{3}{4}\,, \qquad U_0 = 750 \text{ V}\,.$$

[2 t.]

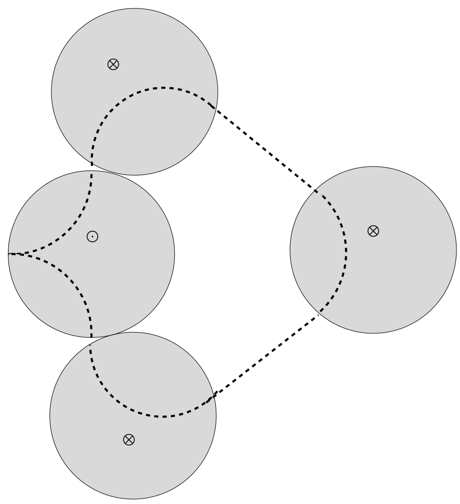
c) Če v tuljavah ne bi bilo polja, bi ion na poti skozi tuljave opravil pot $4r$ in za to potreboval čas $t_0 = 4r/v$; ob prisotnosti polja pa opravi pot, ki je ravno enaka obsegu tuljave. Hitrost ostane enaka začetni, saj magnetna sila deluje pravokotno na smer gibanja in velikosti hitrosti ne spreminja. Časovni zaostanek je enak

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{v} - \frac{4r}{v} = \frac{2(\pi - 2)r}{v} = 1{,}43\ \mu\text{s}\,.$$

V spodnjih dveh tuljavah na sliki je smer polja iz lista, v zgornjih dveh pa v list. [2 t.]

d)

Pri polju, izračunanem pri a), so potrebne vsaj štiri tuljave; če pa privzamemo, da lahko polje v tuljavah poljubno spreminjamo, je možna postavitev le z dvema tuljavama. Takšna rešitev je vredna [2 t.], če je tudi smiselno utemljena. Smiselne rešitve z več tuljavami, so vredne 1 točko.



4. $m_b = 1,0$ g, $V = 5$ L, $T = 293$ K, $p = 100$ kPa, $M_{\rm He} = 4$ kg/kmol, $M_{\rm z} = 29$ kg/kmol, $l_0 = 100$ cm.

a) Maso helija določimo iz splošne plinske enačbe:

$$m_{\rm He} = \frac{pM_{\rm He}V}{RT} = 0{,}82 \text{ g}\,.$$

Vzgon okoliškega zraka je enak teži izpodrinjenega zraka:

$$F_v = m_z g\,, \qquad m_z = \frac{pM_{\rm z}V}{RT} = 5{,}96 \text{ g}\,.$$

Ko balon odmaknemo iz ravnovesne lege, nanj deluje sila palice, ki ima smer proti osi, v navpični smeri pa sila teže balona skupaj s helijem in vzgon. Rezultanta kaže v smeri gibanja balona in je po velikosti enaka

$$F = (m_z g - m_{\rm He} - m_b) g \tan\varphi,$$

če je φ kot med navpičnico in palico. Za majhne kote velja $\tan\varphi \approx \varphi$. Tako kot pri matematičnem nihalu izrazimo kot z odmikom iz ravnovesne lege, s, in razdaljo do osi, l: Rezultanta sil kaže proti ravnovesni legi:

$$F = -(m_z g - m_{\rm He} - m_b) g\,\frac{s}{l}\,.$$

Po 2. Newtonovem zakonu je $(m_b + m_{\rm He})a = F$. Pospešek pri nihanju zapišemo kot $a = -\omega^2 s$ in iz

$$-(m_{\rm He} + m_b)\omega^2 s = -(m_z g - m_{\rm He} - m_b) g\,\frac{s}{l}$$

sledi

$$\omega = \frac{2\pi}{t_0} = \sqrt{\frac{(m_z - m_{\rm He} - m_b)g}{(m_{\rm He} + m_b)l}} = 4{,}7 \text{ s}^{-1}\,, \qquad \nu = 0{,}7 \text{ s}^{-1}\,, \qquad t_0 = 1{,}4 \text{ s}\,.$$

pri čemer smo za l vstavili kar dolžino palice. Pri točnejši obravnavi bi morali vzeti razdaljo do težišča balona, $l^* = l + r$, kjer je r polmer balona

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 10{,}6 \text{ cm}.$$

V tem primeru se ω zmanjša za 5 %, $\omega = 4{,}5 \text{ s}^{-1}$.

Sistem lahko obravnavamo tudi kot fizično nihalo. Če balon na palici odmaknemo za majhen kot iz ravnovesne lege, lahko navor zapišemo kot

$$M = F_{\rm vzg} l \sin\varphi - (m_{\rm He} + m_b) l \sin\varphi \approx (m_z - (m_{\rm He} + m_b)) g l \varphi \equiv D\varphi\,.$$

Vztrajnostni moment sistema je

$$J = (m_{\rm He} + m_b) l^2$$

saj balon po predpostavki obravnavamo kot točkasto telo. Dobimo enak rezultat kot pri izpeljavi s silami:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}} = \sqrt{\frac{(m_z - m_{\rm He} - m_b)g}{(m_{\rm He} + m_b)l}}\,.$$

[6 t.]

b) Če masa palice ni zanemarljiva, moramo sistem obravnavati kot fizično nihalo. Upoštevamo tudi, da balon ni točkasto telo. Navor pri a) se spremeni:

$$\begin{aligned} M &= F_{\text{vzg}}(l+r)\sin\varphi - (m_{\text{He}}+m_b)(l+r)\sin\varphi - m_p g\,\frac{l}{2}\sin\varphi \\ &\approx \left[(m_z - m_{\text{He}} - m_b)(l+r) - m_p\,\frac{l}{2}\right] g\varphi \\ &\equiv D\varphi\,. \\ D &= \left[(m_z - m_{\text{He}} - m_b)(l+r) - m_p\,\frac{l}{2}\right] g \\ &= 44{,}8\ \text{mN m} - 9{,}8\ \text{mN m} = 35{,}0\ \text{mN m} \end{aligned}$$

Vztrajnostni moment pa je enak

$$\begin{aligned} J &= (m_{\text{He}}+m_b)(l+r)^2 + \frac{1}{3}\,m_p l^2 + \frac{2}{5}\,m_{\text{He}} r^2 + \frac{2}{3}\,m_b r^2\,. \\ &= 2{,}18\ \text{gm}^2 + 0{,}67\ \text{gm}^2 + 0{,}003\ \text{gm}^2 + 0{,}007\ \text{gm}^2 = 2{,}86\ \text{gm}^2 \end{aligned}$$

Znatno prispeva le vztrajnostni moment palice, vztrajnostni moment balona s helijem okoli svojega težišča je zanemarljiv.

Dobimo

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}} = 3{,}50\ \text{s}^{-1}\,, \qquad \nu = 0{,}56\ \text{s}^{-1}\,, \qquad t_0 = 1{,}79\ \text{s}\,.$$

[4 t.]