Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Skupina I

1. Kolona avtomobilov vozi na odprti cesti s hitrostjo 90 km/h v razmiku 50 m. Razmik merimo od skrajnega prednjega dela avtomobila do skrajnega zadnjega dela pred njim vozečega avtomobila. Privzemimo, da je dolžina vsakega avtomobila v koloni 4 m.

   a) S kolikšno frekvenco vozijo avtomobili mimo mirujočega opazovalca? Frekvenca v tem primeru predstavlja povprečno število avtomobilov, ki gre vsako minuto mimo mirujočega opazovalca.

   b) Kolona pride v naselje, kjer je hitrost omejena na 30 km/h. V kolikšnem razmiku vozijo avtomobili v naselju, če se frekvenca avtomobilov v naselju ne spremeni.

   c) Varnostna razdalja pri določeni hitrosti je razmik, ki ga avtomobil prevozi v 2 s. Pokaži z računom, da je v naselju razmik manjši od varnostne razdalje.

   d) Če naj avtomobili v naselju vozijo po predpisih, mora biti njihova frekvenca manjša od frekvence, s katero vozijo avtomobili na odprti cesti. Na vhodu v naselje se v tem primeru prične ustvarjati kolona mirujočih avtomobilov. Koliko avtomobilov se nabere v 10 minutah po tistem, ko prvi avtomobil zapelje v naselje? Avtomobili v koloni stojijo tako, da je med njimi po 1 m razmika.

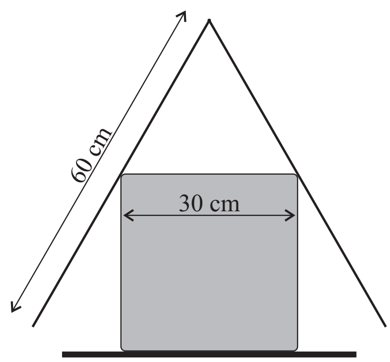
2. Sankač z 10 kg nahrbtnikom se spusti z vrha zasneženega klanca. Skupna masa sankača z nahrbtnikom in sankami je 60 kg. Sanke drsijo po klancu brez trenja. Upor zraka zanemari. Na meji klanec-ravnina se velikost hitrosti sankača ne spremeni. V ravnini pod klancem sneg ni tako zglajen kot na klancu, koeficient trenja med snegom in sankami je tu 0,1.

   a) Kako visok je klanec, če se sankač zaustavi 40 m od vznožja?

   b) Čez čas se na ravnini ob vznožju klanca pojavi nekoliko bolj moker sneg, kjer je koeficient trenja večji in meri 0,2. Kako daleč od vznožja pride sedaj sankač, če je dolžina dela poti po mokrem snegu 10 m?

   c) Da bi kljub mokremu snegu zapeljal tako daleč kot v primeru a), sankač odvrže nahrbtnik v smeri, nasprotni smeri gibanja sank, tik preden doseže vznožje klanca. S kolikšno hitrostjo glede na sanke mora odvreči nahrbtnik? Met nahrbtnika traja zanemarljivo kratek čas.

3. Alenka naredi model hiše. Uporabi leseno kocko s stranico 30 cm in zaobljenimi robovi. Za streho vzame dve železni plošči, vsaka ima širino 30 cm in dolžino 60 cm. Plošči na vrhu med seboj poveže, da sta prosto vrtljivi okoli skupnega zgornjega roba. Teža celotne strehe je 10 N. Alenka streho namesti na kocko simetrično, kot kaže slika.



   a) Pri kolikšnem naklonu (kot med ploščo in vodoravnico) streha miruje, če med lesom in ploščama ni lepenja?

   b) S kolikšno silo kocka v delu a) deluje na posamezno ploščo?

   c) V resnici je med lesom in ploščo tudi lepenje. Alenka dviga zgornji rob strehe navpično navzgor in ugotovi, da je največji naklon strehe, da streha miruje, ne da bi jo držala, 40°. Kolikšen je koeficient lepenja med lesom in ploščama?

57. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Regijsko tekmovanje, 15. 3. 2019

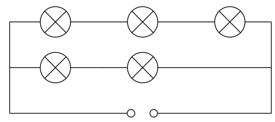
Skupina II

1. Žarnica sveti z močjo 1 W, ko je priključena na napetost 6 V. Če je tok skozi žarnico večji od 0,20 A, pregori, če je manjši od 0,12 A, ne sveti.

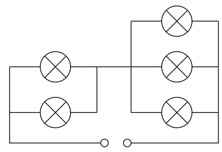
   a) Kolikšna je največja in kolikšna najmanjša napetost vira, da žarnica sveti?

   b) Ali je mogoče tri takšne žarnice vezati na vir z napetostjo 12 V, tako da bi vse tri svetile? Odgovor utemelji z računom.

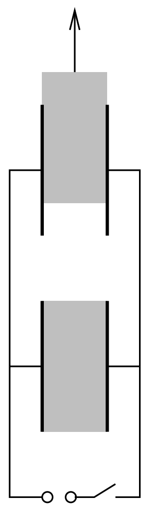
   c) Pet takšnih žarnic vežemo na vir tako, da k trem zaporedno vezanim žarnicam vzporedno vežemo dve zaporedno vezani žarnici (glej sliko). Kolikšna je največja in kolikšna najmanjša napetost vira, pri kateri vse žarnice svetijo?



   d) Sedaj tri žarnice vežemo vzporedno in jih zaporedno vežemo z dvema vzporedno vezanima žarnicama (glej sliko). Kolikšna je v tem primeru največja in kolikšna najmanjša napetost vira, pri kateri vse žarnice svetijo?



2. Dva enaka ploščata vzporedno vezana kondenzatorja priključimo na vir z napetostjo 6 V. Ko sta kondenzatorja nabita, odklopimo vir. Oba kondenzatorja imata navpično postavljeni kvadratni plošči s ploščino po 100 cm^2, plošči sta razmaknjeni za 1 cm. V vsakem kondenzatorju je telo (vložek) v obliki kvadra iz snovi z dielektričnostjo $\varepsilon = 5$, ki popolnoma zapolnjuje notranjost kondenzatorja. (Če je kondenzator napolnjen s snovjo z dielektričnostjo ε, je njegova kapaciteta ε-krat večja, kot kadar je prazen.) V nekem trenutku začnemo enakomerno dvigati dielektrik iz enega od kondenzatorjev tako, da je po 3 minutah v kondenzatorju le zrak (glej sliko).



   a) Kolikšen je skupni naboj na kondenzatorjih po odklopu?

   b) Kolikšna je končna napetost na kondenzatorjih?

   c) Po kolikšnem času od začetka dviganja doseže napetost na kondenzatorjih 1,5 kratnik začetne vrednosti?

3. V pokončnem valju s ploščino osnovne ploskve 1 dm^2 je 10 g vode s temperaturo 20 °C. Vodo pokriva lahek pokrov, ki se tesno prilega valju, da vodo zapira pod seboj, a se znotraj valja premika gor ali dol brez trenja. Pokrov je narejen iz idealnega toplotnega izolatorja. Spodnjo ploskev valja segrevamo, dokler vsa voda ne izpari. Zunanji tlak je 1 bar, stene valja oblivamo s hladno vodo, da ima zunanjost valja ves čas temperaturo 20 °C.

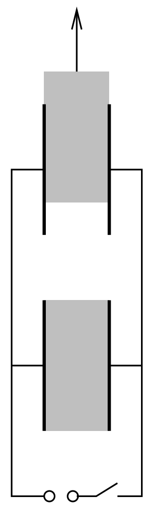
   a) Na kolikšni višini je pokrov v trenutku, ko vsa voda izpari?

   b) Debelina sten valja je 0,5 cm, toplotna prevodnost sten je 0,2 W/m K. Kolikšno moč ima grelnik na spodnji ploskvi valja, če se pokrov iz primera a) v trenutku, ko vsa voda izpari, ne dviga več, čeprav grelnik ves čas greje?

   c) Poskus ponovimo, a pred segrevanjem na pokrov postavimo utež z maso 20 kg. Na kolikšni višini je pokrov v trenutku, ko vsa voda izpari? Privzemi, da voda zavre pri 100 °C tudi, ko je na pokrovu utež.

   d) Ko voda zavre, grelnik še naprej greje notranjost valja. Na kolikšni višini se ustavi pokrov z utežjo? Kolikšna je takrat temperatura pare v valju?

Skupina III



1. Dva enaka ploščata vzporedno vezana kondenzatorja priključimo na vir z napetostjo 6 V. Ko sta kondenzatorja nabita, odklopimo vir. Oba kondenzatorja imata navpično postavljeni kvadratni plošči. V vsakem kondenzatorju je telo (vložek) v obliki kvadra iz snovi z dielektričnostjo $\varepsilon = 5$, ki popolnoma zapolnjuje notranjost kondenzatorja. (Če je kondenzator napolnjen s snovjo z dielektričnostjo ε, je njegova kapaciteta ε-krat večja, kot kadar je prazen.) V nekem trenutku začnemo enakomerno dvigati dielektrik iz enega od kondenzatorjev tako, da je po 3 minutah v kondenzatorju le zrak (glej sliko).

   a) Kolikšna je končna napetost na kondenzatorjih?

   b) Po kolikšnem času od začetka dviganja doseže napetost na kondenzatorjih 1,5 kratnik začetne vrednosti?

2. Valjasto snežno kepo s polmerom 30 cm spustimo z vrha zasneženega klanca, da se kotali brez podrsavanja. Naklon klanca je 30°, dolžina pa 50 m.

   a) Kolikšna je hitrost kepe ob vznožju klanca? Predpostavi, da je sneg na klancu zbit in se ne prijemlje na kepo.

   b) Zapade nov sneg. Debelina plasti novega snega je 3 cm. Pri kotaljenju se ves novi sneg pod kepo prime na kepo. Predpostavi, da je novi sneg že toliko poležan, da je gostota novega snega enaka gostoti snega v kepi. Izračunaj polmer kepe ob vznožju, če je polmer valjaste kepe na vrhu 30 cm.

   c) Izračunaj hitrost kepe ob vznožju klanca, če je kepa na vrhu mirovala.

3. Tanka votla palica z zanemarljivo maso ima dolžino 70 cm. Na enem krajišču je do razdalje 30 cm od krajišča popolnoma napolnjena z elastičnim kitom z gostoto 2,0 kg/dm^3. Kit v vodi ni topen. Palico na drugem krajišču zapremo, da voda v palico ne more vdreti. Vržemo jo v mirno globoko jezero in počakamo, da se povsem umiri.

   a) Koliko palice gleda iz vode?

   b) Palico za nekaj milimetrov potegnemo navpično iz vode in jo spustimo, da zaniha v navpični smeri. S kolikšnim nihajnim časom niha?

   c) Naredimo še drug poskus. Mirujočo palico nagnemo za majhen kot tako, da je potopljen v vodo enak del palice kot v mirnem jezeru. S kolikšnim nihajnim časom niha palica v tem primeru? Za majhne kote nagiba privzemi, da težišče palice med nihanjem miruje.

1. $v_1 = 90$ km/h, $d_1 = 50$ m, $l_a = 4$ m, $v_2 = 30$ km/h, $\Delta t = 2$ s, $t = 10$ min, $d_0 = 1$ m.

a) Da pride naslednji avto v koloni do mirujočega opazovalca, mora prevoziti pot, ki je enaka vsoti razmika in dolžine avtomobila. Za pot porabi čas

$$\Delta t_1 = \frac{d_1 + l_a}{v_1} = 2{,}16\ \mathrm{s}\,.$$

V minuti pride mimo opazovalca $N = 60\ \mathrm{s}/\Delta t_1 = 27{,}8$ avtomobilov; temu ustreza frekvenca $\nu_1 = 27{,}8\ \mathrm{min}^{-1}$.

[2 t.]

b) Če se frekvenca ne spremeni, pomeni, da se tudi čas, ko avtomobil prevozi pot, ki je enaka razmiku med avtomobiloma in dolžini avtomobila, $d_2 + l_a$, ne spremeni:

$$d_2 + l_a = v_2 \Delta t_1\,, \qquad d_2 = v_2\Delta t_1 - l_a = 14{,}0\ \mathrm{m}\,.$$

Avtomobili torej vozijo v razmiku 14 m.

[2 t.]

c) Varnostna razdalja pri hitrosti v_2 je $s_2 = v_2\Delta t = 16{,}7\ \mathrm{m}$, kar je res več od razmika med avtomobili, izračunanega pri b).

[1 t.]

d) Da bi avtomobili v naselju vozili po predpisih, bi moral voziti v časovnih razmikih

$$\Delta t_2 = \frac{s_2 + l_a}{v_1} = 2{,}48\ \mathrm{s}\,,$$

kar ustreza frekvenci

$$\nu_2 = \frac{60}{\Delta t_2} = 24{,}2\ \mathrm{min}^{-1}\,.$$

[1 t.]

V $t = 10$ minutah skozi naselje odpelje $N_2 = \nu_2 t = 242$, po odprti cesti pa v tem času pripelje $N_1 = \nu_1 t = 278$, kar bi pomenilo, da se v koloni v tem času nabere

$$N_0 = N_1 - N_2 = (\nu_1 - \nu_2)t = 36 \tag{1}$$

avtomobilov.

[2 t.]

Rezultat bi bil točen v primeru, če bi se vsi avtomobili zaustavili tik pred vstopom v naselje. Zaradi končne dolžine avtomobilov in razmika med njimi, pa se avtomobili zaustavljajo že preden dospejo do naselja. Kolona stoječih avtomobilov je zato daljša za vse tiste avtomobile, ki bi se po 10 minutah še vozili od mesta, kjer se začenja kolona, do vstopa v naselje. Zadnji avtomobil, ki pripelje do kolone po 10 minutah, bi za pot do naselja porabil čas

$$t_k = \frac{N(d_0 + l_a)}{v_1}\,,$$

če je N število stoječih avtomobilov in $N(d_0 + l_a)$ njihova skupna dolžina.

Če računamo število zaustavljenih avtomobilov tako kot v (1), moramo v primeru prihajajočih avtomobilov vzeti čas, daljši za t_k:

$$N = \nu_1(t + t_k) - \nu_2 t = (\nu_1 - \nu_2)t + \frac{\nu_1(d_0 + l_a)}{v_1}\, N\,, \qquad N = \frac{(\nu_1 - \nu_2)t}{1 - \frac{\nu_1(d_0+l_a)}{v_1}}$$

Upoštevamo rezultat za frekvenco, ki smo ga izpeljali pri a):

$$N = \frac{(\nu_1 - \nu_2)t}{1 - \frac{(d_0+l_a)}{(d_1+l_a)}} = \frac{N_0}{(1 - \frac{5}{54})} = 39\,.$$

Rezultat je seveda negotov vsaj za ± 1, saj v kolono ves čas prihajajo in iz nje odhajajo avtomobili.

[2 t.]

2. $m = 10$ kg, $M = 60$ kg, $k_1 = 0{,}1$, $k_1 = 0{,}2$, $s = 40$ m, $l = 10$ m.

a) Potencialno energijo merimo od vznožja klanca. Potencialno energijo, ki jo ima sankač na vrhu klanca z višino h, sanke oddajo okolici; izgubo zapišemo kot delo trenja.

$$Mgh = F_{\mathrm{tr}} s = k_1 Mgs \,, \qquad h = k_1 s = 4{,}0 \text{ m} \,.$$

[2 t.]

b) Iskano dolžino poti označimo z x; sankač opravi del poti, l, po mokrem snegu, preostanek $x - l$ pa po suhem snegu. Velja

$$Mgh = k_2 Mgl + k_1 Mg(x - l) = (k_2 - k_1)Mgl + k_1 Mgx \,.$$

Celotna pot v ravnini je enaka

$$x = \frac{h - (k_2 - k_1)l}{k_1} = s - \frac{(k_2 - k_1)l}{k_1} = 30 \text{ m} \,.$$

[2 t.]

c) Hitrost tik preden doseže vznožje klanca označimo z v_0. Skupna kinetična energija je tedaj enaka začetni potencialni energiji, saj pri gibanju po klancu ni izgub. Od to izračunamo hitrost

$$Mgh = \tfrac{1}{2} M v_0^2 \,, \qquad v_0 = \sqrt{2gh} = 8{,}85 \text{ m/s} \,.$$

[2 t.]

Pri metu nahrbtnika se ohranja skupna gibalna količina sankača, sank in nahrbtnika. Če končno hitrost sankača na sankah označimo z v_1 in hitrost, s katero sankač odvrže nahrbtnik glede na sanke, z v, je hitrost nahrbtnika glede na okolico enaka $v_1 - v$. Velja

$$Mv_0 = (M - m)v_1 + m(v_1 - v) \,, \qquad v = \frac{M(v_1 - v_0)}{m} \,.$$

[2 t.]

Kinetična energija sankača s sankami se pri gibanju po ravnini pretvori v izgube zaradi sile trenja:

$$\tfrac{1}{2}(M - m)v_1^2 = k_2(M - m)gl + k_1(M - m)g(s - l) = (M - m)g\left((k_2 - k_1)l + k_1 s\right) \,.$$

Od tod sledi za hitrost sankača po izmetu

$$v_1 = \sqrt{2g\left((k_2 - k_1)l + k_1 s\right)} = 9{,}90 \text{ m/s} \,.$$

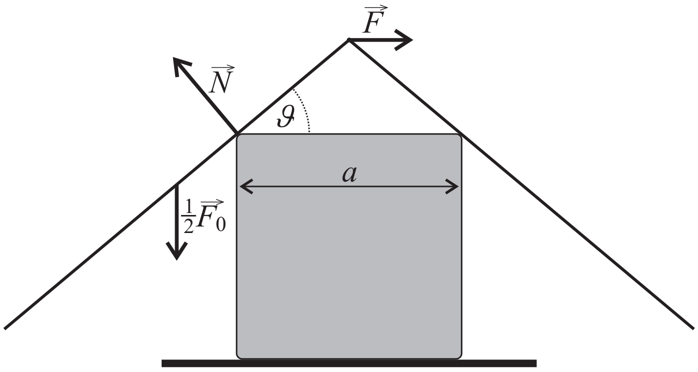
Hitrost, s katero sankač odvrže nahrbtnik, pa je

$$v = \frac{M(v_1 - v_0)}{m} = 6{,}3 \text{ m/s} \,.$$

[2 t.]

3. $a = 30$ cm, $b = 60$ cm, $F_0 = 10$ N.

a) Med lesom in ploščo ni trenja, zato deluje sila kocke na ploščo N pravokotno na ploščo. Zaradi simetrije lahko sila ene plošče na drugo v osi na vrhu strehe deluje le v vodoravni smeri. Označimo naklon strehe ϑ, kot kaže slika za levo ploščo.



Ravnovesje sil v navpični smeri da $N\cos\vartheta = F_0/2$. Navor okoli osi na vrhu strehe povzročata sili N in teža plošče $F_0/2$, prva vrti v nasprotno smer kot druga. Iz slike vidimo, da lahko ročico r sile N povežemo s polovico širine kocke, $r\cos\vartheta = a/2$, tako da je navor sile N enak $Nr = Na/2\cos\vartheta$. Ravnovesje navorov nam da

$$N\frac{a}{2}\frac{1}{\cos\vartheta} = \frac{F_0}{2}\frac{b}{2}\cos\vartheta\,.$$

Ravnovesje sil v vodoravni smeri je doseženo z ustrezno silo F ene plošče na drugo v osi na vrhu strehe, zato ga v računu ni potrebno ne zapisati ne uporabiti. Iz ravnovesja sil v navpični smeri izrazimo N

$$N = \frac{F_0}{2\cos\vartheta}\,,$$

dobljeni izraz za N nesemo v enačbo za ravnovesje navorov in končno dobimo

$$\cos^3\vartheta = \frac{a}{b} \qquad \text{oziroma} \qquad \vartheta = \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right) = 37{,}5^\circ\,.$$

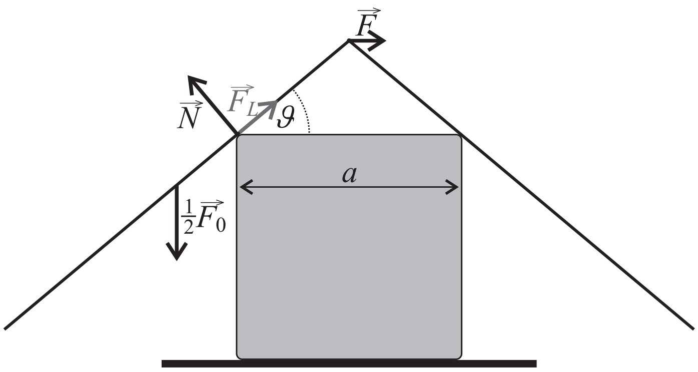
[4 t.]

b) Z znanim kotom ϑ izračunamo silo N kocke na ploščo

$$N = \frac{F_0}{2\cos\vartheta} = 6{,}3\,\mathrm{N}.$$

[2 t.]

c) Zdaj je vrednost kota $\vartheta = 40^\circ$. Ker Alenka vrh strehe dvigne do najvišje možne stabilne lege, je takrat streha na meji, da zdrsne navzdol. Zato sila lepenja F_L (sivo na sliki spodaj) med lesom in ploščo deluje na ploščo vzporedno s ploščo proti osi vrtenja.



Hkrati za silo trenja velja $F_L \leq k_L N$, kjer je k_L koeficient lepenja. Enačba za ravnovesje navorov ostane enaka

$$N \frac{a}{2} \frac{1}{\cos\vartheta} = \frac{F_0}{2} \frac{b}{2} \cos\vartheta\,,$$

medtem ko dobimo iz ravnovesja sil v navpični smeri enačbo

$$N\cos\vartheta + F_L \sin\vartheta = F_0/2 \qquad \text{oziroma} \qquad F_L = \frac{F_0 - 2N\cos\vartheta}{2\sin\vartheta}\,.$$

Iz ravnovesja navorov izrazimo N in neenačbo za silo lepenja preoblikujemo v

$$\frac{F_0 - 2N\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \leq k_L \frac{bF_0\cos^2\vartheta}{a}$$

oziroma

$$k_L \geq \frac{a/b - \cos^3\vartheta}{\sin\vartheta\cos^2\vartheta} = 0{,}134\,.$$

[4 t.]

1. $P = 1$ W, $U_0 = 6$ V, $I_{\rm max} = 0{,}20$ A, $I_{\rm min} = 0{,}12$ A, $U = 12$ V.

a) Najprej izračunamo upor žarnice iz zveze za moč:

$$P = \frac{U^2}{R}\,, \qquad R = \frac{U^2}{P} = 36\ \Omega\,.$$

Največja napetost je torej pri največjem možnem toku:

$$U_{\rm max} = I_{\rm max}R = 7{,}2\ {\rm V}\,,$$

in najmanjša

$$U_{\rm min} = I_{\rm min}R = 4{,}32\ {\rm V}\,.$$

[2 t.]

b) Tri žarnice lahko vežemo na vir zaporedno, vzporedno ali pa dvema vzporedno vezanima žarnicama zaporedno vežemo tretjo.

Pri zaporedni vezavi je napetost na posamezni žarnici tretjina celotne napetosti 12 V, torej 4 V. Ta napetost pa je manjša od $U_{\rm min}$, izračunane pri a), zato žarnice ne svetijo.

Pri vzporedni vezavi je na vsaki žarnici celotna napetost vira, kar je več od $U_{\rm max}$, torej žarnice pregorijo.

Pri tretji možnosti upoštevamo, da je nadomestni upor dveh vzporedno vezanih žarnic $R_{12} = \frac{1}{2}R = 18\Omega$. Napetost se razdeli v razmerju uporov:

$$U_{12} = \frac{R_{12}}{R_{12}+R} = 4\ {\rm V}\,, \qquad U_3 = \frac{R}{R_{12}+R} = 8\ {\rm V}\,.$$

Na prvih dveh žarnicah je napetost premajhna, da bi svetili, napetost na tretji pa prevelika in tretja žarnica pregori.

[2 t.]

c) Na vsaki od dveh zaporedno vezanih žarnic v spodnji veji (glej sliko v besedilu naloge) je polovica skupne napetosti, na vsaki od treh zaporedno vezanih žarnic v zgornji veji pa tretjina. Če bo napetost vira prevelika, bosta najprej pregoreli žarnice v spodnji veji. Največja dovoljena napetost vira je torej enaka dvojni maksimalni napetosti, izračunani pri a):

$$U'_{\rm max} = 2U_{\rm max} = 14{,}4\ {\rm V}\,.$$

Če bo napetost vira zmanjšujemo, bodo najprej ugasnile tri žarnice v zgornji veji; minimalna napetost je torej enaka

$$U'_{\rm min} = 3U_{\rm min} = 12{,}96\ {\rm V}\,.$$

[3 t.]

d) V tem primeru je nadomestni upor dveh vzporedno vezanih žarnic $R_2 = \frac{1}{2}R$, nadomestni upor treh vzporedno vezanih žarnic pa $R_3 = \frac{1}{3}R$. Če napetost vira označimo z U, je napetost na vsaki od dveh vzporedno vezanih žarnic

$$U_2 = \frac{\frac{1}{2}R}{\frac{1}{2}R+\frac{1}{3}R}\,U = \frac{3}{5}\,U$$

in na vsaki od treh vzporedno veznih žarnic

$$U_3 = \frac{\frac{1}{3}R}{\frac{1}{2}R+\frac{1}{3}R}\,U = \frac{2}{5}\,U\,.$$

Če povečujemo U, bosta pri $U_2 > U_{\rm max}$ pregoreli dve vzporedno vezani žarnici; če pa U zmanjšujemo, bodo pri $U_3 < U_{\rm min}$ ugasnile tri vzporedno vezane žarnice. Torej

$$U''_{\rm max} = \frac{5}{3}\,U_{\rm max} = 12{,}0\ {\rm V} \qquad \text{in} \qquad U''_{\rm min} = \frac{5}{2}\,U_{\rm min} = 10{,}8\ {\rm V}\,.$$

[3 t.]

2. $U = 6$ V, $\varepsilon = 5$, $t_0 = 3$ min, $S = 100$ cm^2, $d = 1$ cm, $k = \frac{3}{2}$.

a) Kapaciteta dveh enakih vzporedno vezanih kondenzatorjev je dvakrat večja od kapacitete posameznega kondenzatorja. Skupni naboj je

$$e = 2\,\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}\,U_0 = 0{,}53\ \mathrm{nAs}\,.$$

[2 t.]

b) Po odklopu se skupni naboj ohranja. Na koncu imamo dva vzporedno vezana kondenzatorja, prvega s kapaciteto C_1 v katere ni dielektrika in drugi kondenzator, napolnjen z dielektrikom s kapaciteto C_2:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\,, \qquad C_2 = \varepsilon C_1\,.$$

Če naboja označimo e_1 in e_2, velja $e_1 + e_2 = e$. Napetost je enaka na obeh kondenzatorjih:

$$\frac{e_1}{C_1} = \frac{e_2}{C_2}\,, \qquad e_1 = e_2\,\frac{C_1}{C_2} = \frac{e_2}{\varepsilon}\,.$$

Iz $e_1 + e_2 = e = 2C_2U_0$ sledi

$$e_2 = \frac{eC_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,e = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,2C_2U_0\,.$$

Končno napetost izrazimo kot

$$U_\infty = \frac{e_2}{C_2} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\,U_0 = 10\ \mathrm{V}\,.$$

[3 t.]

c) Če označimo z a dolžino stranice kondenzatorja in z x dolžino dela prvega kondenzatorja, ki ga po času t napolnjuje le zrak, velja

$$x = a\,\frac{t}{t_0}\,.$$

Prvi kondenzator nadomestimo z dvema vzporedno vezanima kondenzatorjema s kapacitetama:

$$C_{x1} = \frac{\varepsilon_0\,xa}{d}\,, \qquad C_{x2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\,(a-x)a}{d}\,,$$

Nadomestna kapaciteta je vsota obeh ($S = a^2$)

$$C_x = C_{x1} + C_{x2} = \frac{\varepsilon_0\,a}{d}\,(x + \varepsilon(a-x)) = C_1\left(\varepsilon - (\varepsilon-1)\frac{x}{a}\right)\,.$$

Podobno kot pri b) sedaj izrazimo naboj

$$e_2 = \frac{C_2}{C_x + C_2}\,e = \frac{\varepsilon}{2\varepsilon - (\varepsilon-1)\frac{x}{a}}\,2C_2U_0\,.$$

Napetost na kondenzatorjih pa je enaka

$$U_x = \frac{e_2}{C_2} = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon - (\varepsilon-1)\frac{x}{a}}\,U_0\,.$$

Od tod izrazimo x/a s podanim razmerjem $k = \frac{U_x}{U_0}$:

$$\frac{x}{a} = \frac{2(k-1)\varepsilon}{k(\varepsilon-1)} = \frac{5}{6}\,.$$

Razmerje doseže po

$$t = \frac{x}{a}\,t_0 = 2{,}5\ \mathrm{minute}\,.$$

[5 t.]

3. $S = 1\ \mathrm{dm}^2$, $m = 10$ g, $T_1 = 20\,°\mathrm{C}$, $p_0 = 10^5$ Pa, $d = 5$ mm, $\lambda = 0{,}2$ W/m K, $m = 20$ kg.

a) Iz plinske enačbe

$$p_0 V = p_0 S h_0 = \frac{mRT_2}{M}$$

dobimo iskano višino

$$h_0 = \frac{mRT_2}{p_0 SM} = 1{,}72\,\mathrm{m},$$

kjer je $T_2 = 100\,°\mathrm{C} = 373$ K temperatura vrelišča vode, R splošna plinska konstanta in h_0 iskana višina pokrova, ko vsa voda povre.

[2 t.]

b) Toplota uhaja le skozi plašč valja S_p, torej velja

$$P_b = jS_p = \lambda\frac{T_2 - T_1}{d}2\pi r h_0 = \lambda\frac{T_2 - T_1}{d}2h_0\sqrt{\pi S} = 1{,}95\,\mathrm{kW},$$

kjer uporabimo $S = \pi r^2$ oziroma $r = \sqrt{S/\pi}$.

[2 t.]

c) Zaradi uteži je zdaj pod pokrovom ves čas tlak $p_c = p_0 + mg/S$. Iz plinske enačbe

$$p_c V_c = p_c S h_c = \frac{mRT_2}{M}$$

dobimo iskano višino

$$h_c = \frac{mRT_2}{p_c SM} = \frac{p_0}{p_0 + mg/S}h_0 = \frac{h_0}{1{,}196} = 1{,}44\,\mathrm{m}.$$

[2 t.]

d) V tem delu upoštevamo, da toplota uhaja skozi stene in da se mora temperatura pare pod pokrovom še malo povečati, da bo oddana toplotna moč enaka moči grelca P_b. Energijska bilanca da enačbo

$$P_b = j(T_d)S_p(h_d) = \lambda\frac{T_d - T_1}{d}2\pi r h_d = \lambda\frac{T_d - T_1}{d}2h_d\sqrt{\pi S}\,,$$

kjer sta h_d in T_d iskani višina in temperatura. Plinska enačba da zdaj

$$p_c V_d = p_c S h_d = \frac{mRT_d}{M}\,.$$

Iz plinske enačbe izrazimo

$$T_d = \frac{SMp_c h_d}{mR}$$

in izraz vstavimo v enečbo za energijsko bilanco. Z nekaj premetavanja dobimo za brezdimenzijsko spremenljivko $X \equiv h_d/h_0$ kompaktno zapisano kvadratno enačbo

$$X^2 - \frac{p_0 T_1}{p_c T_2}X - \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)\frac{p_0}{p_c} = 0$$

z rešitvama

$$X = \frac{1}{2}\left[\frac{p_0 T_1}{p_c T_2} \pm \sqrt{\left(\frac{p_0 T_1}{p_c T_2}\right)^2 + 4\frac{p_0}{p_c}\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)}\right]\,.$$

Fizikalno smiselna je rešitev s $+$ znakom pred korenom, saj je rešitev z $-$ znakom negativna. Dobimo $X = 0{,}864$ in $h_d = 1{,}49$ m.

Iz prej dobljenega izraza za T_d izračunamo še $T_d = 112{,}6\,°\mathrm{C} \approx 113\,°\mathrm{C}$.

[4 t.]

1. $U = 6$ V, $\varepsilon = 5$, $t_0 = 3$ min, $k = 1{,}5$.

a) Po odklopu se skupni naboj na kondenzatorjih, e, ohranja. Če naboja označimo e_1 in e_2, velja $e_1 + e_2 = e$.

Na koncu imamo dva vzporedno vezana kondenzatorja, prvega s kapaciteto C_1, v katerem ni dielektrika, in drugi kondenzator, napolnjen z dielektrikom, s kapaciteto C_2:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d}\,, \qquad C_2 = \varepsilon C_1\,.$$

Z a smo označili dolžino stranice plošče kondenzatorja. Napetost je enaka na obeh kondenzatorjih:

$$\frac{e_1}{C_1} = \frac{e_2}{C_2}\,, \qquad e_1 = e_2\frac{C_1}{C_2} = \frac{e_2}{\varepsilon}\,.$$

Iz $e_1 + e_2 = e$ sledi

$$e_2 = \frac{eC_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,e$$

Skupni naboj izračunamo ob času pred odklopom, ko je kapaciteta prvega kondenzatorja enaka kapaciteti drugega kondenzatorja. Nadomestna kapaciteta dveh vzporedno vezanih kondenzatorjev je potem $2C_2$ in skupni naboj $e = 2C_2U_0$. Naboj na drugem kondenzatorju je tako

$$e_2 = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,2C_2U_0\,.$$

Končno napetost lahko izrazimo kot

$$U_\infty = \frac{e_2}{C_2} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\,U_0 = 10\ \text{V}\,.$$

[4 t.]

b) Če z x označimo dolžino dela prvega kondenzatorja, ki ga po času t napolnjuje le zrak, velja

$$x = a\,\frac{t}{t_0}\,.$$

Prvi kondenzator nadomestimo z dvema vzporedno vezanima kondenzatorjema s kapacitetama:

$$C_{x1} = \frac{\varepsilon_0\, xa}{d}\,, \qquad C_{x2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\,(a-x)a}{d}\,,$$

Nadomestna kapaciteta je vsota obeh

$$C_x = C_{x1} + C_{x2} = \frac{\varepsilon_0\, a}{d}\,(x + \varepsilon(a-x)) = C_1\left(\varepsilon - (\varepsilon-1)\frac{x}{a}\right)\,.$$

Podobno kot pri b) sedaj izrazimo naboj

$$e_2 = \frac{C_2}{C_x + C_2}\,e = \frac{\varepsilon}{2\varepsilon - (\varepsilon-1)\frac{x}{a}}\,2C_2U_0\,.$$

Napetost na kondenzatorjih pa je enaka

$$U_x = \frac{e_2}{C_2} = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon - (\varepsilon-1)\frac{x}{a}}\,U_0\,.$$

Od tod izrazimo x/a s podanim razmerjem $k = \frac{U_x}{U_0}$:

$$\frac{x}{a} = \frac{2(k-1)\varepsilon}{k(\varepsilon-1)} = \frac{5}{6}\,.$$

Razmerje doseže po

$$t = \frac{x}{a}\,t_0 = 2{,}5\ \text{minute}\,.$$

[6 t.]

2. $r = 30$ cm, $s = 50$ m, $\alpha = 30°$, $d = 3$ cm.

a) Potencialna energija kepe na vrhu se pretvori v kinetično in rotacijsko energijo ob vznožju:

$$mgs\sin\alpha = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}J\omega^2\,.$$

Vztrajnostni moment valja je $\frac{1}{2}mr^2$. Ker kepa ne spodrsava, velja $\omega = v/r$. Sledi

$$mgs\sin\alpha = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{4}mv^2 = \tfrac{3}{4}mv^2\,, \qquad v = \sqrt{\frac{4gs\sin\alpha}{3}} = 18{,}1 \text{ m/s}\,.$$

[4 t.]

b) Prostornina valjaste kepe ob vznožju je enaka prostornini kepe na vrhu in prostornini snega, ki se na klancu nabere na kepi. Če z l označimo širino kepe, velja

$$\pi R^2 l = \pi r^2 l + sdl\,, \qquad R = \sqrt{r^2 + \frac{sd}{\pi}} = 75{,}3 \text{ cm}\,.$$

[2 t.]

c) V tem primeru upoštevamo še začetno potencialno energijo plasti snega, ki se na koncu na klancu nabere na kepi. Težišče plasti je na polovični višini klanca:

$$mgs\sin\alpha + \tfrac{1}{2}m_p gs\sin\alpha = \tfrac{3}{4}Mv^2\,.$$

Mase izrazimo s prostorninami in gostoto snega:

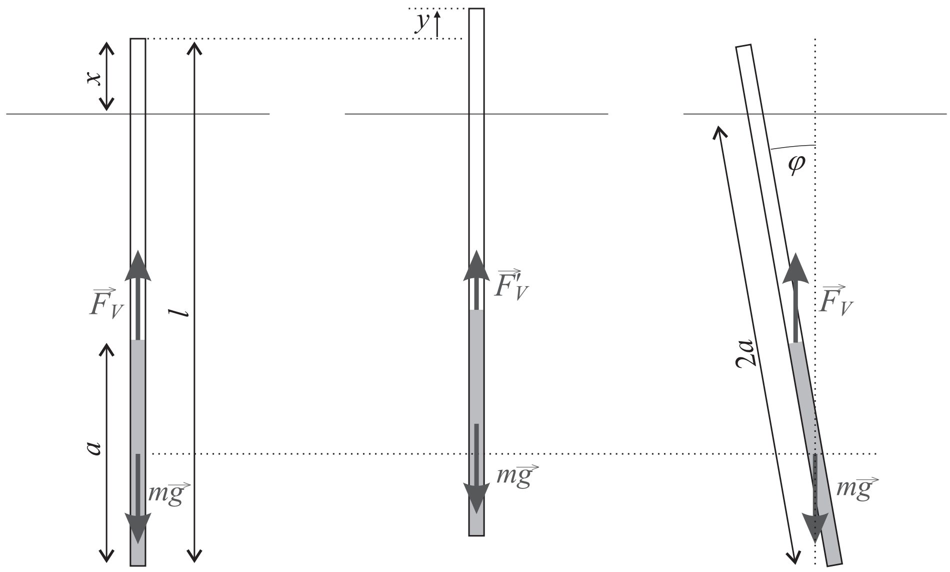
$$\rho\,\pi r^2 l\, gs\sin\alpha + \tfrac{1}{2}\rho\, sdl\, gs\sin\alpha = \tfrac{3}{4}\,\rho\,\pi R^2 l\, v^2\,.$$

Po okrajšanju gostote in širine kepe sledi

$$v = \sqrt{\frac{(4\pi r^2 + 2sd)gs\sin\alpha}{3\pi R^2}} = 13{,}7 \text{ m/s}\,.$$

[4 t.]

3. $l = 70$ cm, $a = 30$ cm, $\rho = 2$ kg/dm^3, $\rho = \eta\rho_0$, kjer sta $\eta = 2$ in $\rho_0 = 1$ kg/dm^3 gostota vode. $g = 9{,}8$



a) Označimo presek palice z S in zapišimo ravnovesje teže in vzgona, ko iz vode glede x palice (leva slika):

$$Sa\rho g = S(l - x)\rho_0 g \qquad \text{oziroma} \qquad \eta a = l - x \qquad \text{in} \qquad x = l - \eta a = 10\,\text{cm}.$$

[2 t.]

b) Ko mirujočo palico dvignemo v navpični smeri za y, sile niso več v ravnovesju in rezultanta F_R kaže v nasprotni smeri od premika y (srednja slika). Dobimo

$$F_R = \rho_0 S(l - x - y)g - \rho S a g = -Sg\rho_0 y\,.$$

Vemo, da dobimo v primeru $F = -kx$ iz 2. Newtonovega zakona ($F = ma$, kjer je a pospešek in m masa telesa) nihanje s krožno frekvenco

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\,.$$

Za naš primer je $k = Sg\rho_0$ in $m = \eta\rho_0 a S$ in od tu krožna frekvenca

$$\omega_b^2 = \frac{k}{m} = \frac{g}{\eta a} = \frac{g}{2a}$$

in iskani nihajni čas

$$t_b = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{g}} = 1{,}55\,\text{s}.$$

Z vrednostjo $g = 10$ m/s^2 je numerični rezultat enak $t_b = 1{,}54$ s.

[4 t.]

c) Ker palico nagnemo, niha kot težno nihalo. Ker je vsa masa v delu, ki je napolnjen s kitom, je težišče palice $a/2 = 15$ cm od spodnjega krajišča palice. Palica je nagnjena za majhen kot φ, kar pomeni, da je ves čas potopljen enak del palice s dolžino $\eta a = 2a$ in je v prvem približku težišče palice ves čas na isti višini (izkaže se, da je sprememba višine težišča popravek drugega reda v kotu φ, da je torej $\delta y \propto \varphi^2$). To pomeni, da palica niha okoli svojega težišča in sta po velikosti sila vzgona in sila teže ves čas uravnoteženi: ker ni gibanja težišča v navpični smeri, velja $F_V = mg$. Nihanje poganja navor vzgona, saj teža prijemlje v težišču, ki je hkrati os, okoli katere se palica suče (desna slika).

Podobno kot pri b) vemo, da dobimo v primeru, ko velja za navor zveza $M = -D\varphi$, iz 2. Newtonovega zakona za vrtenje ($M = J\alpha$, kjer je J vztrajnosnti moment okoli dane osi in α kotni pospešek za zasuk okoli te osi) nihanje s krožno frekvenco

$$\omega^2 = \frac{D}{J}\,.$$

V našem primeru je navor vzgona za majhen kot nagiba φ po velikosti enak

$$M = F_V r = mg\frac{a}{2}\sin\varphi \approx \frac{amg}{2}\varphi\,,$$

kjer je $r = \frac{a}{2}\sin\varphi$) ročica sile vzgona okoli težišča, saj vzgon prijemlje na sredini potopljenega dela palice, torej na razdalji a od spodnjega krajišča palice. Ker navor vrti palico v nasprotni smeri od zasuka palice, res drži $M = -D\varphi$ in dobimo $D = (amg)/2$. Vztrajnostni moment palice okoli težišča je posledica kita v palici, zato je vztrajnostni moment cele palice enak vztrajnostnemu momentu dela, ki je napolnjen s kitom in ima dolžino a. Velja $J = ma^2/12$ in za krožno frekvenco dobimo

$$\omega_c^2 = \frac{D}{J} = \frac{12amg}{2ma^2} = \frac{6g}{a} = 12\omega_b^2\,.$$

Od tu izrazimo nihajni čas

$$t_c = 2\pi\sqrt{\frac{a}{6g}} = 0{,}45\,\mathrm{s}.$$

Z vrednostjo $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ je numerični rezultat enak $t_c = 0{,}44$ s.
[4 t.]

Opomba: Dijak lahko računa navor tudi drugače. Potopljeni del palice v mislih razdeli na dva dela, tistega votlega z dolžino a zgoraj in tistega zapolnjenega s kitom z dolžino a spodaj. Navor vzgona spodnjega dela je nič, ker prijemlje v težišču. Pri računanju navora vzgona zgornjega votlega dela palice glede na težišče palice mora upoštevati prostornino Sa, ročico a in kot φ. Rezultat je seveda enak kot zgoraj, kjer je v računu navora vzgona upoštevana prostornina $2aS$, a je prijemališče vzgona na sredini potopljenega dela palice, torej je ročica $a/2$.

Opombo dodajamo zato, ker sta oba načina razmišljanja fizikalno ustrezna in vodita do pravilnega rezultata, če je seveda izpeljava v preostalih korakih brez napak.