Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge
DMFA Slovenije

43. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 21. april 2007

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

NALOGE ZA OSMI RAZRED

1. V posodi imamo slano raztopino, v kateri je 24 % soli, ostalo pa je voda. Iz posode vsak dan izhlapi 0.5 litra vode. Po treh dneh izhlapevanja vsebuje raztopina že 48 % soli. Koliko slane raztopine je bilo na začetku v posodi?

2. Enakokrakemu trapezu $ABCD$ z osnovnicama AB in CD lahko včrtamo kvadrat z oglišči E, F, C, D tako, da oglišči E in F ležita na daljši osnovnici AB. Ploščina kvadrata $EFCD$ meri 1.44 m^2 in predstavlja 80 % ploščine trapeza. Izračunaj dolžino osnovnice AB.

3. Navijaška skupina se odpravlja spodbujat svoje moštvo na gostovanje. Na pot gredo lahko z nekaj kombiji in enim osebnim avtomobilom ali pa z nekaj osebnimi avtomobili in enim kombijem. V vsakem primeru bi se s kombijem peljalo po 9 oseb, z osebnim avtomobilom pa po 4 osebe. V drugem primeru bi za prevoz potrebovali 10 vozil več. Koliko navijačev šteje skupina?

4. Z ravnilom in šestilom načrtaj pravilni osemkotnik, katerega najkrajša diagonala meri 85 mm, in konstrukcijo kratko opiši.

5. Za katera realna števila x velja $\dfrac{(\sqrt{18}-\sqrt{8}+x)\cdot(x-\sqrt{2})}{(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)} < 0$?

Čas reševanja: 120 minut.

43. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 21. april 2007

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

NALOGE ZA DEVETI RAZRED

1. Pri nas merimo temperaturo v stopinjah Celzija, v ZDA pa v stopinjah Fahrenheita. Voda zamrzne pri 0 °C oziroma 32 °F, zavre pa pri 100 °C oziroma 212 °F. Zapiši linearno funkcijo, ki stopinje Celzija pretvarja v stopinje Fahrenheita.

Pri kateri temperaturi obe lestvici pokažeta isto številsko vrednost?

2. List v obliki pravokotnika, ki ima dimenziji 40 cm $\times$ 60 cm, prerežemo po simetrali daljše stranice in dobljena pravokotnika položimo tesno drug na drugega, da se prekrivata. Tak postopek rezanja in zlaganja ponovimo vsega skupaj osemkrat. Vsakokrat prerežemo cel kupček zloženih pravokotnikov. Debelina lista na začetku je bila 0.1 mm, plasti pa smo stisnili tako, da med njimi ni zraka. Kolikšna je površina tako dobljenega kvadra? Rezultat naj bo na 1 mm^2 natančen.

3. V enakostraničnem trikotniku ABC točka D deli stranico AB na dela z dolžinama $|AD| = 2$ in $|DB| = 3$. Na stranici BC leži točka E, na stranici AC pa točka F tako, da sta tudi trikotnika DBE in ADF enakostranična. Koliko meri ploščina trikotnika DEF?

4. Imamo tri posode s sokom. V prvi je sok s 24 % sadnim deležem, v drugi je sok s 15 % sadnim deležem, v tretji pa je sadni delež soka enak 35 %. Zmešamo 60 litrov soka, tako da vzamemo iz druge posode 14 ℓ več kot iz prve, iz tretje posode pa $\frac{1}{9}$ prostornine tekočine, ki jo vzamemo iz prvih dveh posod skupaj. Koliko litrov soka vzamemo iz prve posode in koliko odstotkov sadnega deleža je v dobljeni mešanici?

5. Koliko naravnih števil med vključno 1 in vključno 300 ni deljivih niti z dva niti s tri in niti s pet? Odgovor utemelji.

Čas reševanja: 120 minut.

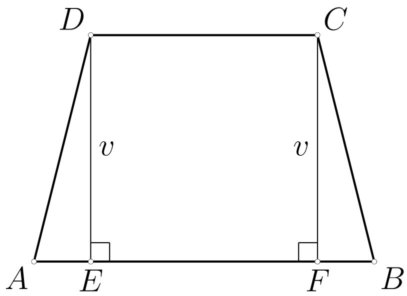
43. tekmovanje iz matematike
za Vegovo priznanje
Državno tekmovanje, 21. april 2007

Rešitve za 8. razred

1. Na začetku imamo x litrov slane raztopine in v njej je $0.24x$ litrov soli. Po treh dneh izhlapevanja se bo količina slane raztopine zmanjšala za 1.5 litra, količina soli v njej pa bo ostala nespremenjena in bo predstavljala 48 % nove količine raztopine. Torej je $0.24x = 0.48(x - 1.5)$. Rešitev te enačbe je $x = 3$, zato je bilo na začetku v posodi 3 litre slane raztopine.

Ugotovitev, da je v posodi z x litri tekočine $0.24x$ litra soli. .... **1 točka**
Ugotovitev, da se količina slanice zmanjša za 1.5 litra na $x - 1.5$. ..... **1+1 točka**
Sklep, da je v dobljeni tekočini $0.48(x - 1.5)$ litra soli. .... **2 točki**
Izenačitev $0.24x = 0.48(x - 1.5)$. .... **2 točki**
Urejena enačba $0.24x = 0.72$ (ali $x = 2x - 3$ ali podobno). .... **1 točka**
Rešitev enačbe $x = 3$. .... **1 točka**
Odgovor: V posodi je bilo 3 litre slane raztopine. .... **1 točka**
(Če pride tekmovalec do pravilnega odgovora z napačnimi sklepi, ne dobi točk. Če odgovor zapiše brez utemeljitve, naredi pa preizkus, dobi največ 3 točke.)

2. Krajša osnovnica CD trapeza $ABCD$ je stranica vrisanega kvadrata $EFCD$, njena dolžina pa je enaka višini v trapeza $ABCD$. Ploščina trapeza je enaka $\frac{|AB|+|CD|}{2} \cdot v = \frac{|AB|+|CD|}{2} \cdot |CD|$, ploščina kvadrata pa $|CD|^2$. Ker je $|CD|^2 = 1.44\ \text{m}^2$, je $|CD| = 1.2$ m. Ker predstavlja ploščina kvadrata 80 % ploščine trapeza, je $0.8 \cdot \frac{|AB|+|CD|}{2} \cdot |CD| = |CD|^2$. Ker $|CD| \neq 0$, iz enačbe sledi $|AB| = \frac{1}{0.4}|CD| - |CD| = 3 - 1.2 = 1.8$ m.



Ugotovitev, da je stranica kvadrata enaka krajši osnovnici CD in višini trapeza v. .... **(1 + 1) točka**
Zapis ploščine trapeza $\frac{|AB|+|CD|}{2} \cdot v = \frac{|AB|+|CD|}{2} \cdot |CD|$. .... **2 točki**
Zapis ploščine kvadrata $|CD|^2 = 1.44$ m^2. .... **1 točka**
Nastavljena enačba $0.8 \cdot \frac{|AB|+|CD|}{2} \cdot |CD| = |CD|^2$. .... **2 točki**
Upoštevanje pogoja $|CD| \neq 0$. .... **1 točka**
Izpeljava zveze $0.4|AB| = 0.6|CD|$ (ali ekvivalentne). .... **1 točka**
Odgovor: $|AB| = 1.8$ m. .... **1 točka**

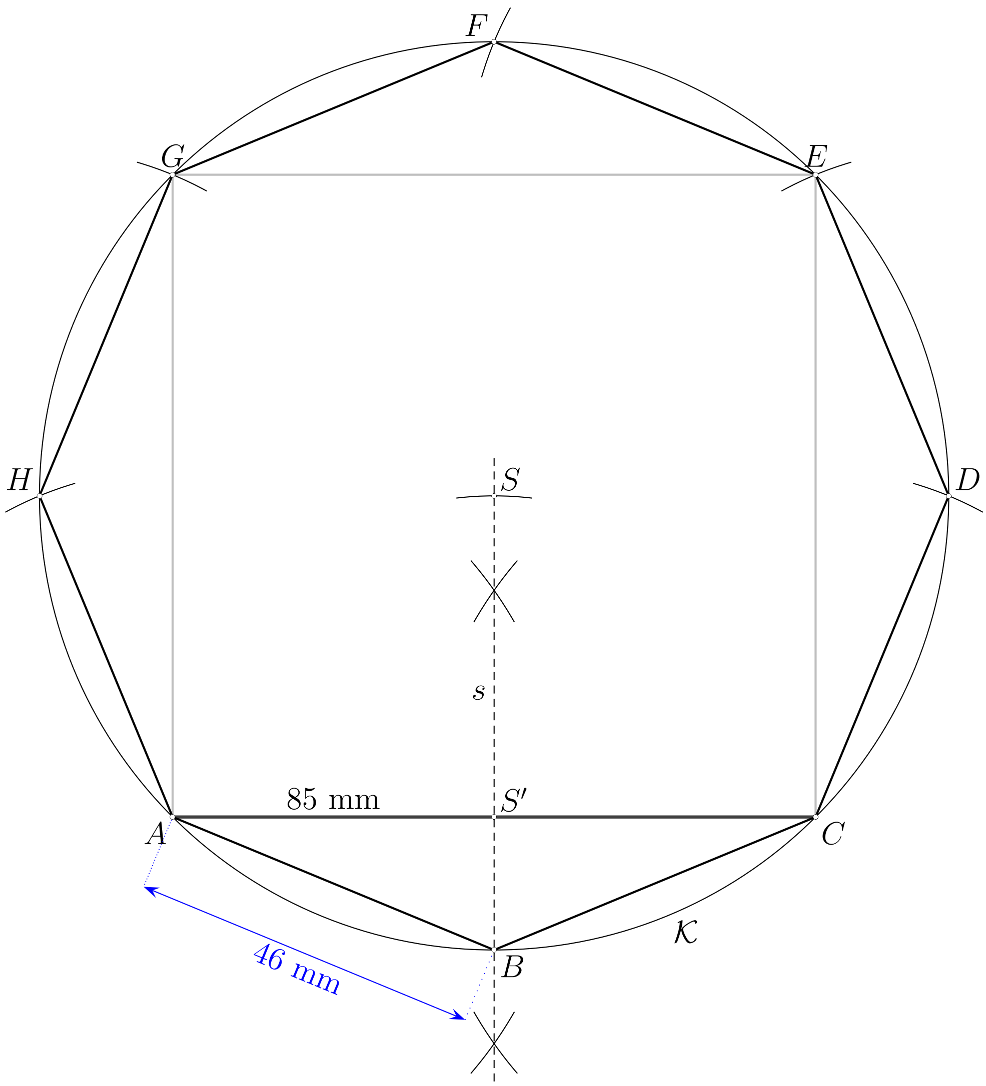
3. V prvem primeru bi se člani navijaške skupine peljali z enim avtom in x kombiji, zato jih je $4 + 9x$. V drugem primeru pa bi uporabili 1 kombi in $x + 10$ osebnih avtomobilov, ker bi v drugem primeru potrebovali 10 vozil več. Navijačev je tako enako $9 + 4(x + 10)$. Sledi $4 + 9x = 9 + 4(x + 10)$, kar nam da $x = 9$. Ekipa ima 85 navijačev.

Zapis števila navijačev v prvem primeru: $4 + 9x$. .... **2 točki**
Zveza med številom kombijev v prvem in avtov v drugem primeru x, $10 + x$. **2 točki**

Zapis števila v drugem primeru: $9 + 4(x + 10)$. .... **1 točka**
Izenačitev: $4 + 9x = 9 + 4(x + 10)$. .... **2 točki**
Rešitev enačbe: $x = 9$. .... **2 točki**
Odgovor: V skupini je 85 navijačev. .... **1 točka**

4. Če v pravilnem osemkotniku povežemo vsako drugo oglišče, dobimo kvadrat. Dolžina stranice tega kvadrata je enaka dolžini najkrajše diagonale osemkotnika.

Najprej konstruiramo daljico AC, dolgo 85 mm, in njeno simetralo s. Krožnica s središčem v razpolovišču S' daljice AC in polmerom $|AS'|$ seka simetralo daljice AC v dveh točkah. Eno izmed njiju označimo s S in narišemo krožnico $\mathcal{K}$ s središčem v S in polmerom $|AS|$. Krožnica $\mathcal{K}$ je očrtana krožnica iskanega osemkotnika. Točko B določimo kot presečišče krožnice $\mathcal{K}$ in premice s, preostala oglišča osemkotnika pa določimo tako, da upoštevamo, da so njegove stranice enako dolge.



Ugotovitev, da s povezavo vsakega drugega oglišča dobimo kvadrat. ..... **1 točka**
Sklep, da je stranica kvadrata najkrajša diagonala osemkotnika. .... **2 točki**
Ugotovitev, da ostala oglišča ležijo na sredi med oglišči kvadrata

na očrtani krožnici. .... 2 točki
Konstrukcija kvadrata. .... 1 točka
Narisani diagonali in očrtana krožnica. .... 2 točki
Narisani simetrali stranic kvadrata. .... 1 točka
Narisan osemkotnik s stranico dolgo 46 mm (± 2 mm). .... 1 točka

5. Ker je $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ in $(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}^2-1^2=1$, lahko zapišemo

$$\frac{(\sqrt{18}-\sqrt{8}+x)\cdot(x-\sqrt{2})}{(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)}=(\sqrt{2}+x)(x-\sqrt{2}).$$

Da bi bila vrednost tega izraza negativna, mora biti en faktor negativen, drugi pa pozitiven. Ker je $\sqrt{2}+x>x-\sqrt{2}$, mora biti $\sqrt{2}+x>0>x-\sqrt{2}$. Iz leve neenakosti sledi $x>-\sqrt{2}$, iz desne pa $x<\sqrt{2}$. Torej je $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$.

Delno korenjenje $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. .... 1 točka
Izračun $\sqrt{18}-\sqrt{8}+x=\sqrt{2}+x$. .... 1 točka
Izračun imenovalca: $(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}^2-1^2=1$. .... 1 točka
Sklep $(\sqrt{2}+x)(x-\sqrt{2})<0$. .... 1 točka
Sklep, da morata $\sqrt{2}+x$ in $x-\sqrt{2}$ različno predznačena. .... 1 točka
Sklep $\sqrt{2}+x>x-\sqrt{2}$. .... 1 točka
Sklep $\sqrt{2}+x>0>x-\sqrt{2}$. .... 1 točka
(Točko priznajte tudi, če tekmovalec pogoja $\sqrt{2}+x>x-\sqrt{2}$ eksplicitno ne zapiše, vendar v nadaljevanju ovrže možnost $\sqrt{2}+x<0$ in $x-\sqrt{2}>0$.)
Sklep $x>-\sqrt{2}$. .... 1 točka
Sklep $x<\sqrt{2}$. .... 1 točka
Odgovor: Neenačbo rešijo realna števila x, za katera velja:
$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$. .... 1 točka
(Da tekmovalec dobi to točko, mora pogoja $x>-\sqrt{2}$ in $x<\sqrt{2}$ združiti ali eksplicitno zapisati, da veljata hkrati.)

Rešitve za 9. razred

1. Linearno funkcijo, ki pretvarja stopinje Celzija v stopinje Fahrenheita, zapišemo v obliki $f(x) = kx + n$. Velja $f(0) = 32$ in $f(100) = 212$. Iz prvega pogoja vidimo, da je $n = 32$, iz drugega pa sledi $212 = 100k + 32$, kar nam da $k = \frac{9}{5}$. Iskana funkcija se glasi

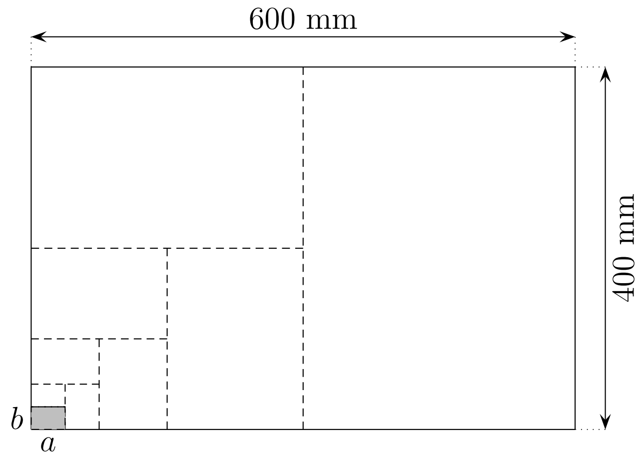
$$f(x) = \frac{9}{5}x + 32.$$

Poiščimo še temperaturo, ki bo imela na obeh lestvicah enako številsko vrednost: $f(x) = x$. Sledi $x = \frac{9}{5}x + 32$, kar preoblikujemo v $5x = 9x + 160$. Zato je $-4x = 160$ in $x = -40$. Torej je temperatura -40 °C enaka temperaturi -40 °F.

Zapis iskane linearne funkcije $f(x) = kx + n$**.** .... **1 točka**
Zapis pogojev $f(0) = 32$ **in** $f(100) = 212$**.** .... **(1 + 1) točka**
Izračun $n = 32$**.** .... **1 točka**
Uporaba $212 = 100k + 32$ **in izračun** $k = \frac{9}{5}$**.** .... **(1 + 1) točka**
Zapis funkcije $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$**.** .... **1 točka**
Zapis pogoja $\frac{9}{5}x + 32 = x$**.** .... **2 točki**
Rešitev in odgovor: $x = -40$**.** .... **1 točka**
(Odgovor je lahko zapisan v °C, °F ali brez enote. Če tekmovalec zapiše funkcijo, ki °F pretvarja v °C, priznajte točke le za drugi del naloge.)

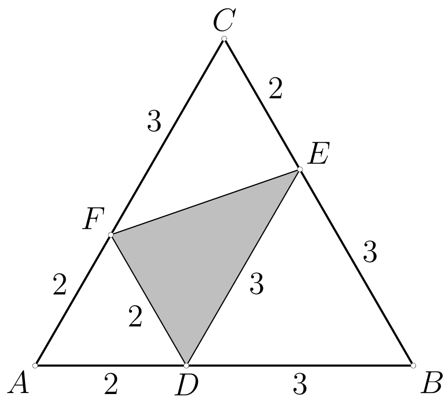
2. Vsak rob prvotnega lista papirja se med rezanjem štirikrat razpolovi. Po zadnjem rezanju bodo vsi pravokotniki imeli dolžino $a = \frac{600}{2^4} = \frac{75}{2} = 37.5$ mm in širino $b = \frac{400}{2^4} = 25$ mm. Nastalo bo 2^8 takih pravokotnikov. Če jih naložimo drug na drugega, bo višina dobljenega kvadra $c = 2^8 \cdot 0.1 = 25.6$ mm. Površina kvadra je

$$P = 2(ab + ac + bc) = 5075 \text{ mm}^2.$$



Ugotovitev, da se vsak rob prvotnega lista papirja štirikrat razpolovi. .... **1 točka**
Izračun stranic končnih pravokotnikov (račun mora biti napisan):
$a = \frac{600}{2^4} = \frac{75}{2} = 37.5$ **mm,** $b = \frac{400}{2^4} = 25$ **mm.** .... **(2 + 2) točki**
Ugotovitev, da pri rezanju nastane 2^8 **pravokotnikov.** .... **2 točki**
Izračun višine kvadra: $c = 2^8 \cdot 0.1 = 25.6$ **mm.** .... **1 točka**
Površina kvadra: $P = 2(ab + ac + bc)$**.** .... **1 točka**
Odgovor: Površina kvadra meri 5075 **mm** ^{2}**.** .... **1 točka**

3. Ker sta ADF in DBE enakostranična trikotnika, je $|DF| = |AD| = 2$ in $|DE| = |DB| = 3$. Sledi $|FC| = |AC| - |AF| = 5 - 2 = 3$ in $|EC| = |BC| - |BE| = 5 - 3 = 2$. Štirikotnik $FDEC$ je paralelogram, ker ima po dve nasprotni stranici enako dolgi. Ploščina trikotnika DEF pa je enaka polovici ploščine paralelograma $FDEC$.



Računajmo:

$$\begin{aligned} p_{ABC} &= \frac{5^2\sqrt{3}}{4}, \\ p_{ADF} &= \frac{2^2\sqrt{3}}{4}, \\ p_{DBE} &= \frac{3^2\sqrt{3}}{4}, \\ p_{FDEC} &= p_{ABC} - p_{ADF} - p_{DBE} = \frac{(25-9-4)\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}, \\ p_{DEF} &= \frac{1}{2} p_{FDEC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ugotovitev, da je štirikotnik $DECF$ paralelogram. .... **2 točki**
Sklep, da meri ploščina trikotnika DEF polovico ploščine paralelograma. . **2 točki**
Ploščina trikotnika ABC je $S = \frac{25\sqrt{3}}{4}$. .... **1 točka**
Ploščina trikotnika ADF je $S_1 = \frac{4\sqrt{3}}{4}$. .... **1 točka**
Ploščina trikotnika DBE je $S_2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$. .... **1 točka**
Ploščina štirikotnika $DECF$ je $S - S_1 - S_2$. .... **2 točki**
Odgovor: Ploščina trikotnika DEF meri $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. .... **1 točka**

4. Označimo z x količino soka, ki ga vzamemo iz prve posode. Potem iz druge posode vzamemo $x + 14$ litrov soka, iz tretje pa $\frac{1}{9}(x + (x + 14))$. Ker je

$$x + (x + 14) + \frac{1}{9}(x + (x + 14)) = 60,$$

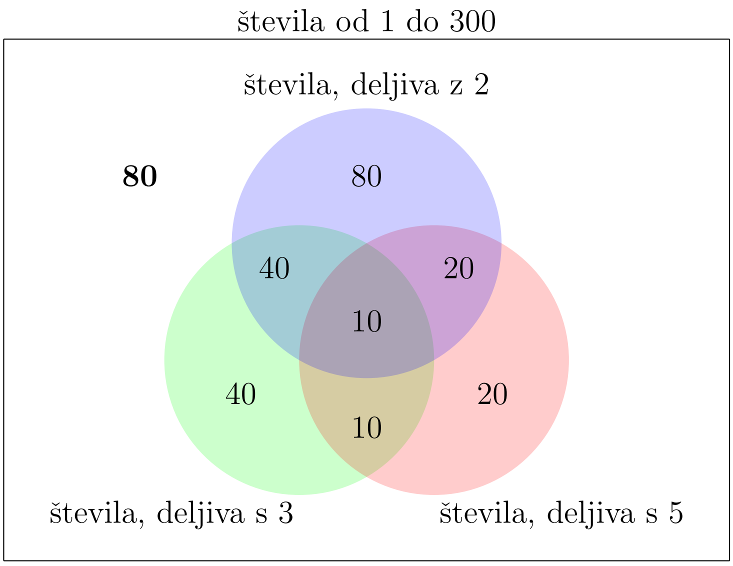
sledi $\frac{10}{9}(2x + 14) = 60$. Torej je $2x + 14 = 54$ in $x = 20$. Iz prve posode vzamemo 20 ℓ soka, iz druge 34 ℓ in iz tretje 6 ℓ. Sadni delež v mešanici pa potem znaša

$$\frac{0.24 \cdot 20 + 0.15 \cdot 34 + 0.35 \cdot 6}{60} = \frac{12}{60} = 20~\%.$$

Vpeljava neznanke x za količino soka, ki ga vzamemo iz prve posode. .... **1 točka**
Ugotovitev, da iz druge posode vzamemo $x + 14$ litrov soka. .... **1 točka**
Ugotovitev, da iz tretje posode vzamemo $\frac{1}{9}(x + (x + 14))$ litrov soka. ..... **1 točka**
Zapis enačbe: $x + (x + 14) + \frac{1}{9}(x + (x + 14)) = 60$. .... **1 točka**
Rešitev: $x = 20$. .... **1 točka**
Nastavek za izračun sadnega deleža: $0.24 \cdot 20 + 0.15 \cdot 34 + 0.35 \cdot 6$. . **(1+1+1) točka**

Izračun sadnega deleža: $0.24 \cdot 20 + 0.15 \cdot 34 + 0.35 \cdot 6 = 12$. .... **1 točka**
Izračun relativnega deleža $\frac{12}{60} = 20$ **%.** .... **1 točka**
(Če tekmovalec z x označi neznano količino soka v drugi ali tretji posodi, ustrezno prilagodite točkovnik.)

5. Med prvimi 300 naravnimi števili je 150 deljivih z 2 (vsako drugo), 100 deljivih s tri (vsako tretje) in 60 deljivih s 5 (vsako peto). Med temi števili je 50 takih, ki so deljiva z 2 in s 3 hkrati (pomeni, da so deljiva s 6); 20 je takih, ki so deljiva s 3 in s 5 hkrati (torej so deljiva s 15) in 30 je takih, ki so deljiva z 2 in s 5 (torej z 10). Vsa ta števila smo šteli po dvakrat. Trikrat pa smo šteli števila, ki so deljiva z 2, s 3 in s 5: takih števil je 10, to so tista, ki so deljiva s 30. Skupno število naravnih števil med 1 in 300, ki so deljiva vsaj z enim od števil 2, 3 in 5 je torej: $150 + 100 + 60 - 50 - 20 - 30 + 10 = 220$. To pa pomeni, da 80 števil ni deljivih niti z 2, niti s 3, niti s 5.



Ugotovitev, da je 150 **števil deljivih z** 2. .... **1 točka**
Ugotovitev, da je 100 **števil deljivih s** 3. .... **1 točka**
Ugotovitev, da je 60 **števil deljivih s** 5. .... **1 točka**
Ugotovitev, da je 50 **števil deljivih z** 2 **in** 3 **hkrati.** .... **1 točka**
Ugotovitev, da je 20 **števil deljivih s** 3 **in** 5 **hkrati.** .... **1 točka**
Ugotovitev, da je 30 **števil deljivih z** 2 **in** 5 **hkrati.** .... **1 točka**
Ugotovitev, da je 10 **števil deljivih z** 2, 3 **in** 5 **hkrati.** .... **1 točka**
Sklep: število naravnih števil med 1 **in** 300**,**
ki so deljiva vsaj z enim od števil 2, 3 **ali** 5 **je**
$150 + 100 + 60 - 50 - 30 - 20 + 10 = 220$. .... **2 točki**
Odgovor: 80 **števil ni deljivih niti z** 2**, niti s** 3**, niti s** 5. .... **1 točka**
(Če tekmovalec zapiše ustrezna števila med 1 in 30 ter njihovo število pomnoži z 10, ne utemelji pa pravilnost postopka, priznajte največ 9 točk.)