**Društvo matematikov, fizikov**
**in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

# Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

45. tekmovanje iz matematike
za Vegovo priznanje
Državno tekmovanje, 18. april 2009

Prilepi nalepko s šifro

# NALOGE ZA SEDMI RAZRED

*Čas reševanja: 120 minut.*

**1.** Kolesar je v eni uri in $12$ minutah prevozil dve sedmini poti od doma do centra mesta. V kolikšnem času bi z enako hitrostjo prevozil polovico poti od doma do centra mesta? Odgovor zapiši v urah in minutah.

**2.** V štirikotniku $ABCD$ sta stranici $AB$ in $BC$ enako dolgi, diagonala $AC$ pa meri toliko kot stranica $CD$. Kot $BAD$ meri $120°$, kot $CBA$ pa $100°$. Izračunaj ostala kota štirikotnika.

**3.** Na izlet se odpravi $15$ ljudi. Ker pričakujejo dež, jih $14$ nosi dežnik, $10$ jih ima gumijaste škornje, $11$ jih nosi pokrivalo, $12$ pa jih ima s sabo pelerino. Najmanj koliko ljudi ima s sabo vsa štiri varovala zoper dež?

**4.** Naj bo $ABC$ enakostranični trikotnik. Iz poljubne točke $D$ na stranici $AC$ narišemo pravokotnico na stranico $AB$. Presečišče pravokotnice in stranice označimo s točko $E$. Iz točke $E$ narišemo pravokotnico na stranico $BC$ in presečišče označimo s $F$. Dokaži, da je trikotnik $DEF$ enakostraničen, če je $|AE| = |BF|$.

**5.** Poišči vsa naravna števila $m$ in $n$, za katera je največji skupni delitelj naravnih števil $m$ in $18$ enak $n$, najmanjši skupni večkratnik števil $n$ in $4$ pa enak $m$. Utemelji, da so to vse rešitve.

45. tekmovanje iz matematike
za Vegovo priznanje
Državno tekmovanje, 18. april 2009

Prilepi nalepko s šifro

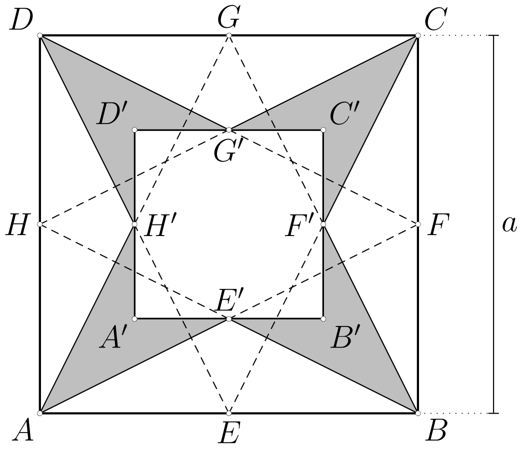
# NALOGE ZA OSMI RAZRED

*Čas reševanja: 120 minut.*

**1.** Posoda, ki drži $10$ litrov, je do vrha napolnjena z napitkom, v katerem je $40$ % soka. Iz posode iztočimo polovico vsebine in do vrha dolijemo napitek, v katerem je $20$ % soka. Postopek ponavljamo, vsakokrat dolijemo napitek, v katerem je $20$ % soka. Koliko odstotkov soka je v napitku, ki ga dobimo po treh dolivanjih?

**2.** V pravilnem večkotniku meri vsota notranjih kotov $1800^\circ$. Zbrišemo tri zaporedne stranice v tem večkotniku, da dobimo lomljeno črto. Prosti krajišči lomljenke povežemo z daljico in nastane novi večkotnik. Koliko meri najmanjši notranji kot v novonastalem večkotniku?

**3.** Znotraj kvadrata $ABCD$ leži kvadrat $A'B'C'D'$, katerega stranice so paroma vzporedne stranicam kvadrata $ABCD$. Središči kvadratov $ABCD$ in $A'B'C'D'$ sovpadata. Točke $E$, $F$, $G$ in $H$ so razpolovišča stranic večjega kvadrata, točke $E'$, $F'$, $G'$ in $H'$ pa so razpolovišča stranic manjšega kvadrata. Izrazi ploščino osenčenega dela z dolžino stranice večjega kvadrata (glej sliko).




**4.** Pokaži, da je $\dfrac{10^n + 35}{45}$ naravno število za vsako naravno število $n$.

**5.** Za štiri cela števila velja $a < b < c < d$. Izračunamo vse možne vsote po dveh izmed števil $a$, $b$, $c$ in $d$. Največje štiri vsote so: $8$, $7$, $5$ in $4$. Določi število $a$.

Prilepi nalepko s šifro

# NALOGE ZA DEVETI RAZRED

*Čas reševanja: 120 minut.*

**1.** Zapiši enačbo premice, ki seka abscisno os pri vrednosti $-6$, če je ploščina pravokotnega trikotnika, ki ga omejuje ta premica s koordinatnima osema, enaka $13.5$ kvadratnih enot. Poišči vse rešitve.

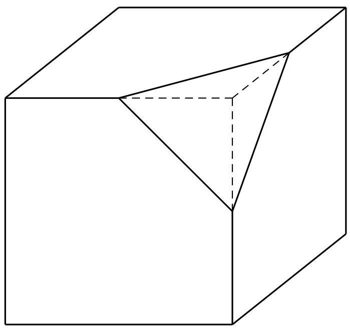
**2.** Kraji $A$, $B$ in $C$ ležijo v tem vrstnem redu ob ravni cesti. Razdalja med krajema $A$ in $B$ je za $10$ km krajša, kot je razdalja med krajema $B$ in $C$. Ko prvi motorist, ki vozi iz kraja $A$ v kraj $B$, prevozi $\frac{2}{7}$ svoje poti, drugi motorist, ki vozi iz kraja $C$ v kraj $B$, prevozi $\frac{4}{9}$ svoje poti. Tedaj sta oba enako oddaljena od kraja $B$. Koliko kilometrov sta oddaljena kraja $A$ in $C$?

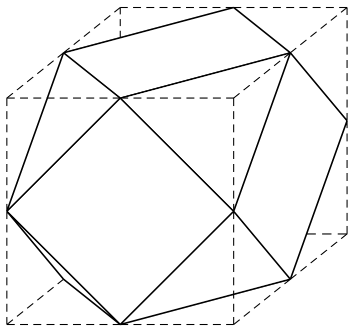
**3.** V trapezu $ABCD$ je osnovnica $AB$ dolga $12$ cm, osnovnica $DC$ pa $3$ cm. Notranji kot pri oglišču $D$ je skladen s kotom, ki ga diagonala $AC$ oklepa s krakom $BC$.

a) Izračunaj dolžino diagonale $AC$.

b) Koliko meri obseg trapeza, če je krak $BC$ dolg $8$ cm?

**4.** Mizar je leseni kocki odrezal vogal, tako da je raven rez potekal skozi razpolovišča treh pripadajočih robov (glej levo sliko). Na enak način je kocki odrezal še ostale vogale (glej desno sliko).





Površino nastalega telesa je pobarval. Koliko barve je potreboval, če bi prvotno kocko lahko pobarval s šestimi litri barve?

**5.** Palindromno število je število, ki ga enako beremo z leve in z desne strani, npr. $13531$.

a) Poišči najmanjši šestmestni palindrom, ki je deljiv z $18$.

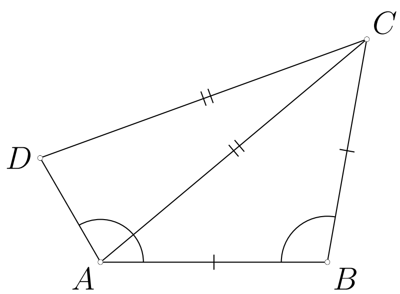
b) Dokaži, da noben štirimestni palindrom ni praštevilo.

# Rešitve za 7. razred

**1.** Kolesar je $\frac{2}{7}$ poti prevozil v $72$ minutah ali $\frac{6}{5}$ ure, torej je za $\frac{1}{7}$ poti porabil $36$ minut ali $\frac{6}{5} : 2 = \frac{3}{5}$ ure. Celo pot bi prevozil v $7 \cdot 36 = 252$ minutah ali $\frac{3}{5} \cdot 7 = \frac{21}{5}$ ure. Polovico poti bi prevozil v $126$ minutah, to je v dveh urah in $6$ minutah.

**Pretvorba časa, ki ga porabi za $\frac{2}{7}$ poti v $72$ minut ali $\frac{6}{5}$ ure . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 točki**
**Izračunan čas, v katerem kolesar prevozi $\frac{1}{7}$ poti: $36$ minut ali $\frac{3}{5}$ ure . . . . . . . 2 točki**
**Izračunan čas za celotno pot: $252$ minut ali $\frac{21}{5}$ ure . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 točke**
**Izračunan čas za polovico poti: $126$ minut ali $\frac{21}{10}$ ure . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 točki**
**Odgovor: Polovico poti bi prevozil v $2$ urah in $6$ minutah . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 točka**

**2.** Trikotnik $ABC$ je enakokrak, kota $BAC$ in $BCA$ sta zato skladna in merita vsak po $40°$, saj je $\sphericalangle CBA = 100°$. Tudi trikotnik $ACD$ je enakokrak. Ker je $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD - \sphericalangle BAC = 120° - 40° = 80°$, merita kota osnovnici $80°$. Kot ob vrhu trikotnika $ACD$ potem meri $20°$. Kot $BCD$ meri $60°$ in kot $CDA$ meri $80°$.




**Skica . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 točka**
**Ugotovitev, da sta kota $BAC$ in $BCA$ skladna in merita vsak $40°$ . . . . . . . . . 3 točke**
**Ugotovitev, da kota $DAC$, $ADC$ merita $80°$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 točki**
**Izračun velikosti kota $\sphericalangle ACD = 20°$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 točki**
**Odgovor: Kot $BCD$ meri $60°$ in kot $CDA$ meri $80°$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (1 + 1) točka**

**3.** **1. način.** Ker ima $14$ oseb dežnik, $1$ oseba dežnika nima. Podobno jih $5$ nima gumijastih škornjev, $4$ nima pokrivala, $3$ pa nimajo pelerine. Torej največ $1 + 5 + 4 + 3 = 13$ oseb nima vsaj enega varovala, zato imata vsaj $15 - 13 = 2$ osebi vsa $4$ varovala zoper dež.

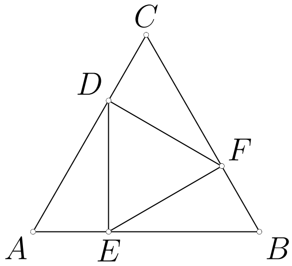
**Ideja, da izračunamo, koliko oseb nima določenega varovala . . . . . . . . . . . . 2 točki**
**Dežnika nima 1 oseba . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 točka**
**Gumijastih škornjev nima 5 oseb . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 točka**
**Pokrivala nimajo 4 osebe . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 točka**
**Pelerine nimajo 3 osebe . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 točka**

**Največ $13$ oseb nima vsaj enega varovala .................................. 2 točki**
**Vsaj $2$ osebi imata vsa 4 varovala ........................................ 2 točki**

Ker ima $14$ ljudi dežnik, $12$ pelerino, skupaj pa jih je $15$, jih mora vsaj $14+12-15=11$ imeti oboje. Ker jih ima $11$ oboje, $11$ pa tudi pokrivalo, ima tri varovala že $11+11-15=7$ ljudi od petnajstih. Če jih $7$ nosi pelerino, pokrivalo in dežnik, še $10$ pa jih ima gumijaste škornje, sta med njimi vsaj $7+10-15=2$, ki imata vse štiri stvari.

**Minimalno število ljudi, ki imajo dežnik in pelerino, je $11$ ................. 4 točke**
**Minimalno število ljudi, ki imajo dežnik, pelerino in še pokrivalo, je $7$ ... 4 točke**
**Minimalno število ljudi, ki imajo vse štiri pripomočke, je $2$ ................ 2 točki**

**4.** Trikotnik $AED$ je polovica enakostraničnega trikotnika, ker merijo njegovi notranji koti $60°$, $90°$ in $30°$. Podobno je tudi trikotnik $BFE$ polovica enakostraničnega trikotnika. Ker je $|AE|=|BF|$, sta trikotnika $AED$ in $BFE$ skladna. Torej je trikotnik $DEF$ enakokrak ($|DE|=|EF|$). Ker pa kot pri vrhu $E$ trikotnika $DEF$ meri $60°$, je trikotnik $DEF$ enakostraničen.




**Zapis kotov trikotnika $AED$: $\sphericalangle EAD=60°$, $\sphericalangle DEA=90°$, $\sphericalangle ADE=30°$ ... 2 točki**
**Ugotovitev, da je trikotnik $AED$ polovica enakostraničnega trikotnika ... 1 točka**
**Ugotovitev, da je trikotnik $BFE$ polovica enakostraničnega trikotnika ... 1 točka**
**Ugotovitev, da sta trikotnika $AED$ in $BFE$ skladna ....................... 2 točki**
**Ugotovitev, da je trikotnik $DEF$ enakokrak ................................ 1 točka**
**Izračun $\sphericalangle DEF=60°$ .................................................... 2 točki**
**Enakokrak trikotnik $DEF$ s kotom $60°$ v vrhu je enakostraničen ......... 1 točka**

**5. 1. način.** Ker je največji skupni delitelj števil $m$ in $18$ enak $n$, je $n$ delitelj števila $18$, torej je $n \in \{1,2,3,6,9,18\}$. Število $m$ je najmanjši skupni večkratnik števil $n$ in $4$. Če je $n=1$ ali $n=2$, je $m=4$. Če je $n=3$ ali $n=6$, je $m=12$. Pri $n=9$ ali $n=18$ pa je $m=36$.

Največji skupni delitelj $m$ in $18$ mora biti $n$, zato so ustrezne rešitve le $m=4$ in $n=2$, $m=16$ in $n=6$ ter $m=36$ in $n=18$.

**Ugotovitev, da $n \mid 18$ ...................................................... 2 točki**
**Zapis vseh deliteljev števila $18$ ........................................... 3 točke**
**(Po 1 točko za vsaka dva delitelja.)**
**Izračun pripadajočih $m$ ...................................................... 3 točke**
**(Po 1 točko za vsaka dva pravilno izračunana $m$.)**
**Zapis vseh rešitev ........................................................... $2$ točki**
**(V rešitvi mora biti razvidno, kateri so ustrezni pari števil $m$ in $n$.)**

**2. način.** Ker je $m$ najmanjši skupni večkratnik $n$ in $4$, je $m$ deljiv s $4$. Največji skupni delitelj števil $m$ in $18$ je zato sodo število. Največji skupni delitelj števil $m$ in $18$ je $n$, zato je $n$ sodi delitelj števila $18$, torej je $n \in \{2,6,18\}$.

Število $m$ je najmanjši skupni večkratnik števil $n$ in $4$. Če je $n = 2$, je $m = 4$. Če je $n = 6$, je $m = 12$. Pri $n = 18$ pa je $m = 36$. Preverimo, da za ta števila velja $D(18, m) = n$.

**Ugotovitev, da $4 \mid m$ .......................................................... 1 točka**
**Ugotovitev, da $n$ sodo število .............................................. 1 točka**
**Ugotovitev, da $n \mid 18$ ....................................................... 1 točka**
**Zapis vseh sodih deliteljev števila $18$ ................................. 3 točke**
**Izračun pripadajočih $m$ ....................................................... 3 točke**
**Zapis vseh rešitev (skupaj s preverjanjem, da je $D(18, m) = n$.) .......... $1$ točka**

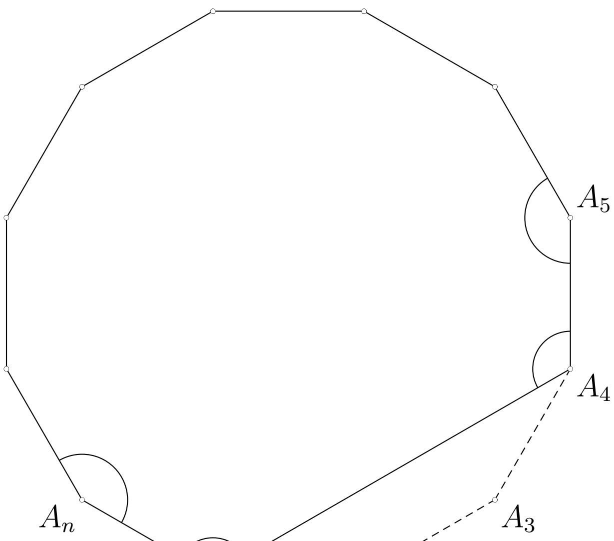
## Rešitve za 8. razred

**1.** Ko izpraznimo polovico posode, ostane $5$ litrov napitka, v katerem je $2$ litra soka in $3$ litre vode. Ko dolijemo $5$ litrov napitka z $20\%$ soka, dolijemo $1$ liter soka in $4$ litre vode. Dobimo napitek, v katerem so $3$ litri soka in $7$ litrov vode.

Ko drugič izpraznimo polovico posode, ostane $1.5$ litra soka in $3.5$ litrov vode. Ko dolijemo $5$ litrov napitka z $20\%$ soka ($1$ liter soka in $4$ litre vode), je v napitku $2.5$ litra soka in $7.5$ litrov vode. Po tretjem praznenju ostane v posodi $1.25$ litra soka in $3.75$ litrov vode, po ponovnem dolivanju pa je v posodi $2.25$ litra soka in $7.75$ litrov vode. V napitku je $22.5$ % soka.

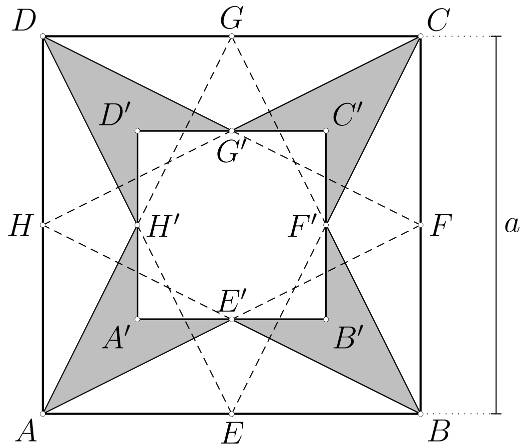
**Izračunan ostanek pri prvem praznjenju: $2$ l soka in $3$ l vode .............1 točka**
**Ugotovitev sestave v dolitku ($1$ l soka in $4$ l vode) .........................2 točki**
**Izračunane količine v mešanici po prvem dolivanju ......................1 točka**
**Izračunan ostanek po drugem praznjenju: $1.5$ l soka in $3.5$ l vode ........1 točka**
**Izračunane količine v mešanici po drugem dolivanju .................... 1 točka**
**Izračunan ostanek po tretjem odlivanju: $1.25$ l soka in $3.75$ l vode ........1 točka**
**Izračunan delež čistega soka po tretjem prilivanju $2.25$ l soka in $7.75$ l vode ....2 točki**
**Odgovor: Po tretjem prilivanju dobimo $22.5\%$ soka .......................1 točka**

**2.** Vsota notranjih kotov večkotnika je $(n-2)\cdot 180°$, zato je $n = 12$. Ko zbrišemo tri sosednje stranice (recimo $A_1A_2$, $A_2A_3$ in $A_3A_4$), in povežemo oglišči $A_1$ in $A_4$ (glej sliko), dobimo desetkotnik. Vsota njegovih notranjih kotov je $8\cdot 180° = 1440°$. Notranji koti pri $A_5$, $A_6$, $\ldots$, $A_{12}$ se ujemajo z notranjimi koti prvotnega dvanajstkotnika, zato merijo po $150°$. Vsota notranjih kotov ob stranici $A_1A_4$ desetkotnika meri $1440° - 8\cdot 150° = 240°$. Ker sta kota $\sphericalangle A_4A_1A_{12}$ in $A_5A_4A_1$ enaka, merita po $120°$ in sta tudi najmanjša kota v nastalem desetkotniku.



**Izračunano število oglišč:** $(n-2) \cdot 180°$**,** $n = 12$ **.......... 2 točki**
**Ugotovitev, da dobimo desetkotnik .......... 1 točka**
**Izračunana vsota notranjih kotov v desetkotniku** $1440°$ **.......... 2 točki**
**Ugotovitev, da sedem kotov meri** $150°$ **.......... 2 točki**
**Izračunana vsota kotov ob najdaljši stranici** $240°$ **.......... 1 točka**
**Izračun enega od kotov ob najdaljši stranici:** $120°$ **in ugotovitev, da sta to tudi najmanjša kota v nastalem večkotniku .......... 2 točki**

**3.** Stranica kvadrata $A'B'C'D'$ meri $\frac{a}{2}$, njegova ploščina je $(\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$. Točka $E'$ je za $\frac{a}{4}$ oddaljena od stranice $AB$. Ploščina trikotnika $ABE'$ je $\frac{a \cdot \frac{a}{4}}{2} = \frac{a^2}{8}$. Ploščino osenčenega lika dobimo, če od ploščine kvadrata $ABCD$ odštejemo ploščine skladnih trikotnikov $ABE'$, $BCF'$, $CDG'$ in $DAH'$ ter ploščino kvadrata $A'B'C'D'$. Osenčeni del ima ploščino $a^2 - (4\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{4}) = \frac{a^2}{4}$.




**Ugotovitev, da stranica kvadrata** $A'B'C'D'$ **meri** $\frac{a}{2}$ **.......... 1 točka**
**Izračunana ploščina tega kvadrata** $\frac{a^2}{4}$ **.......... 1 točka**
**Razdalja točke** $E'$ **od stranice** $AB$ **je** $\frac{a}{4}$ **.......... 2 točki**
**Ploščina trikotnika** $ABE'$ **je** $\frac{a^2}{8}$ **.......... 2 točki**
**Ploščina kvadrata** $ABCD$ **je** $a^2$ **.......... 1 točka**
**Zapis formule za ploščino osenčenega lika in rezultat** $\frac{a^2}{4}$ **.......... (2 + 1) točke**

**4.** Ulomek predstavlja naravno število, če je števec večkratnik imenovalca. Zato mora biti $10n + 35$ deljivo s $45$. Število je deljivo s $45$, če je hkrati deljivo s $5$ in z $9$. $10n + 35$ ima v desetiškem zapisu števke $1$, $3$, $5$, ostalo so ničle (razen v primeru $n = 1$, ko dobimo število $45$), tako je vsota števk tega števila $9$, kar pomeni, da je število deljivo z $9$. Ker se konča s števko $5$, je deljivo tudi s $5$ in s tem s $45$.

**Ugotovitev, da mora biti števec večkratnik imenovalca .......... 1 točka**
**Zapis ali upoštevanje:** $45 = 9 \cdot 5$ **.......... 1 točka**
**Ugotovitev, da mora biti deljivo hkrati z** $9$ **in** $5$ **.......... 1 točka**
**Ugotovitev, da je vsota števk enaka** $9$ **in je zato deljivo z** $9$ **.......... 4 točke**
**Ugotovitev, da je zadnja števka** $5$ **in zato število deljivo s** $5$ **.......... 2 točki**

**Sklep: Ker je število hkrati deljivo s $5$ in $9$, je deljivo tudi s $45$ ............1 točka**

**5.** Možne vsote vseh štirih števil si po velikosti sledijo:

$$a + b < a + c < a + d \leq b + c < b + d < c + d$$

ali

$$a + b < a + c < b + c \leq a + d < b + d < c + d.$$

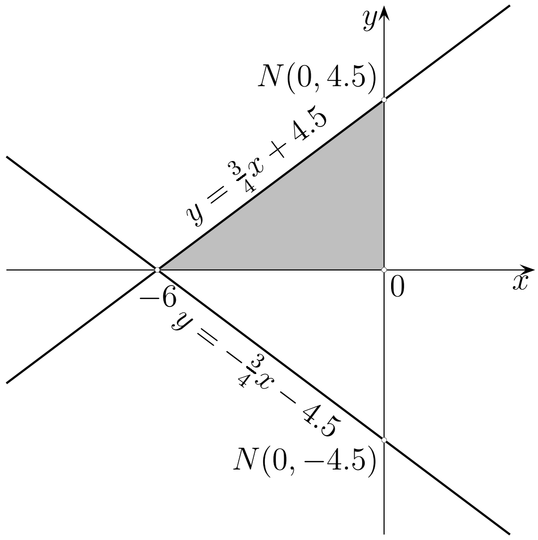
V prvem primeru je $c + d = 8$, $b + d = 7$ in $a + d = 5$, kar pomeni: $b = a + 2$, $c = a + 3$. Če zapišemo še četrto zvezo $b + c = 4$, dobimo $2a + 5 = 4$ in $a = -\frac{1}{2}$, kar ni celo število.

V drugem primeru je: $c + d = 8$, $b + d = 7$, $a + d = 4$, kar pomeni $b = a + 3$, $c = a + 4$. Upoštevamo še zvezo med $b$ in $c$, $b + c = 5$, dobimo $2a + 7 = 5$ in $a = -1$.

**Ugotovitev, da dobimo $6$ možnih vsot po dve števil izmed štirih .........1 točka**
**Ugotovitev, da si vsote parov vseh štirih števil po velikosti sledijo: $a+b < a+c < a + d \leq b + c < b + d < c + d$ ali $a + b < a + c < b + c \leq a + d < b + d < c + d$ 1 točka**
**(Točko priznamo tudi, če je v gornjih verigah neenakosti namesto $\leq$ zapisan znak $<$.)**
**Upoštevanje zvez za prvi primer: $c + d = 8$, $b + d = 7$ in $a + d = 5$ .........1 točka**
**Zapis števil $b$ in $c$ s pomočjo $a$: $b = a + 2$, $c = a + 3$ .......................1 točka**
**Zapis zveze $b + c = 4$, $2a + 5 = 4$ ............................................1 točka**
**Rešitev: $a = -\frac{1}{2}$ in sklep, da $a$ ni celo število. ............................1 točka**
**Zveze v drugem primeru: $c + d = 8$, $b + d = 7$, $a + d = 4$ ..................1 točka**
**Zapis: $b = a + 3$, $c = a + 4$ ................................................1 točka**
**Upoštevanje $b + c = 5$, $2a + 7 = 5$ ..........................................1 točka**
**Rešitev: $a = -1$ .............................................................1 točka**

## Rešitve za 9. razred

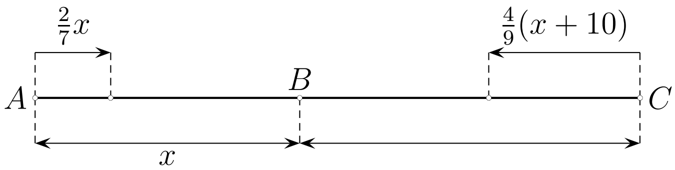
**1.** Premica s koordinatnima osema tvori pravokotni trikotnik (glej sliko). Ena kateta trikotnika meri $6$ enot. Dolžino druge katete izračunamo iz ploščine: $13.5 = \frac{6x}{2}$, zato druga kateta meri $4.5$ enote. Premica seka ordinatno os v točki $N(0, 4.5)$ ali $N(0, -4.5)$.




Premica ima enačbo $y = kx + n$. V prvem primeru dobimo $0 = k\cdot(-6)+4.5$ in od tod $k = \frac{3}{4}$, v drugem primeru pa iz $0 = k \cdot (-6) - 4.5$ sledi $k = -\frac{3}{4}$. Enačbi premic sta $y = \frac{3}{4}x + 4.5$ in $y = -\frac{3}{4}x - 4.5$.

**Ugotovitev, da je trikotnik pravokoten in da ena kateta meri $6$ enot. (1 + 1) točka**
**Uporaba obrazca za ploščino pravokotnega trikotnika. .................. 2 točki**
**Izračun dolžine druge katete: $4.5$ .................................... 1 točka**
**Ugotovitev, da druga kateta predstavlja prosti člen v enačbi premice ... 1 točka**
**Izračun smernih koeficientov $k = \frac{3}{4}$ in $k = -\frac{3}{4}$ ............................ 2 točki**
**Zapis enačb premic $y = \frac{3}{4}x + 4.5$ in $y = -\frac{3}{4}x - 4.5$ .......................... 2 točki**

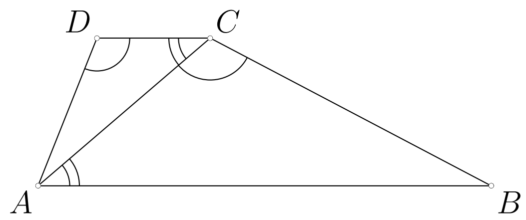
**2.** Če z $x$ označimo razdaljo od $A$ do $B$, razdalja od $B$ do $C$ meri $x + 10$. Del, ki ga prevozi prvi motorist je $\frac{2}{7}x$, od kraja $B$ pa je oddaljen $\frac{5}{7}x$.




Del, ki ga prevozi drugi motorist je $\frac{4}{9}(x + 10)$, od kraja $B$ pa je oddaljen $\frac{5}{9}(x + 10)$. Ker sta enako oddaljena od $B$, velja enačba: $\frac{5}{9}(x + 10) = \frac{5}{7}x$. Rešitev $x$ te enačbe je $35$ km. Razdalja med krajema $A$ in $C$ je $2x + 10 = 80$ km.

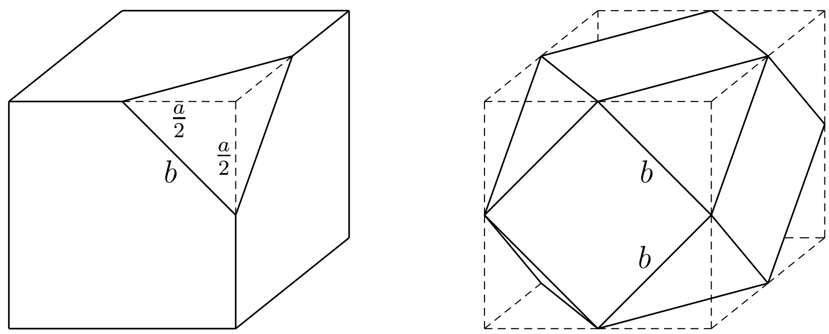
**Z $x$ označena razdalja od $A$ do $B$ in z $x + 10$ razdalja od $B$ do $C$ .......... 1 točka**
**Zapis poti, ki jo prevozi prvi motorist: $\frac{2}{7}x$, od kraja $B$ je oddaljen $\frac{5}{7}x$ ...... 2 točki**
**Zapis poti, ki jo prevozi drugi motorist: $\frac{4}{9}(x+10)$, od kraja $B$ je oddaljen $\frac{5}{9}(x+10)$**
**2 točki**
**Zapis enačbe: $\frac{5}{9}(x + 10) = \frac{5}{7}x$ ........................................ 2 točki**
**Rešitev $x = 35$ ........................................................ 1 točka**
**Odgovor: Razdalja med krajema $A$ in $C$ je $2x + 10 = 80$ km. ............... 2 točki**

**3.** Kota $\sphericalangle DCA$ in $\sphericalangle BAC$ sta skladna, ker imata vzporedne krake. Ker sta skladna tudi kota $\sphericalangle ADC$ in $\sphericalangle ACB$, sta si trikotnika $ACD$ in $BAC$ podobna. Razmerje stranic zapišemo kot: $|AB| : |AC| = |AC| : |CD|$. Diagonala $|AC|$ tako meri $6$ cm. Podobno lahko zapišemo še razmerje, v katerem nastopa krak $AD$: $|AD| : |DC| = |BC| : |AC|$, iz katerega izračunamo krak $|AD| = 4$ cm. Obseg trapeza meri $o = 12 + 3 + 8 + 4 = 27$ cm.




**Ugotovitev, da sta kota $\sphericalangle DCA$ in $\sphericalangle BAC$ skladna, ker imata vzporedne krake . 2 točki**
**Ugotovitev, da sta skladna tudi kota $\sphericalangle ADC$ in $\sphericalangle ACB$ in sta trikotnika $ACD$ in $BAC$ podobna ........................................................ 1 točka**
**Zapis razmerja stranic: $|AB| : |AC| = |AC| : |CD|$ ...................... 1 točka**
**Izračunana diagonala $|AC| = 6$ cm ....................................... 3 točke**
**Zapis razmerja s krakom $AD$: $|AD| : |DC| = |BC| : |AC|$ .................. 1 točka**
**Izračunan krak $|AD| = 4$ cm .............................................. 1 točka**
**Obseg: $o = 12 + 3 + 8 + 4 = 27$ cm ........................................ 1 točka**

**4.** Ko mizar kocki odreže vogale, dobi telo, ki ga omejuje $8$ skladnih enakostraničnih trikotnikov in $6$ skladnih kvadratov. Stranica enakostraničnega trikotnika je enako dolga kot hipotenuza pravokotnega trikotnika s krakoma dolžine $\frac{a}{2}$.




Torej meri $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Ploščina enakostraničnega trikotnika je enaka $\frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Stranica kvadrata je enaka stranici enakostraničnega trikotnika, ploščina kvadrata pa meri $\frac{a^2}{2}$. Celotna površina novega telesa meri $P = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8} + 6 \cdot \frac{a^2}{2} = a^2(\sqrt{3} + 3)$. Če bi mizar pobarval prvotno kocko, ki ima površino $6a^2$, bi porabil $6$ litrov barve, zato je za novo nastalo telo porabil $\frac{a^2(\sqrt{3}+3)}{6a^2} \cdot 6 = (\sqrt{3} + 3)$ litrov barve.

**Ugotovitev, da ima telo $14$ ploskev, $8$ skladnih enakostraničnih trikotnikov in $6$ skladnih kvadratov ........................................................ 1 točka**
**Zapisana stranica enakostraničnega trikotnika $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .................. 1 točka**
**Izračunana ploščina enega trikotnika meri $p_1 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ ............. 1 točka**
**Ugotovitev, da meri stranica kvadrata $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ ................................ 1 točka**
**Ploščina enega kvadrata meri $p_2 = \frac{a^2}{2}$ ..................................... 1 točka**
**Površina kocke je $P = 6a^2$ ............................................... 1 točka**
**Zapis formule za površino dobljenega telesa: $P = 8p_1 + 6p_2$ ............. 1 točka**
**Izračun površine: $P = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8} + 6 \cdot \frac{a^2}{2} = a^2(\sqrt{3} + 3)$ ......................... 2 točki**

**Odgovor: Za novo nastalo telo je mizar porabil $(\sqrt{3}+3)$ litrov barve. ....1 točka**

**5.** a) Če hočemo, da bo število deljivo z $18$, mora biti z $2$ in z $9$. Palindrom se torej začne in konča z $2$ (najmanjša soda možna števka, ker na začetku ne sme biti $0$). Vsota števk mora biti soda (ker vsaka izmed treh različnih števk v zapisu palindroma nastopa dvakrat) in deljiva z $9$, torej najmanj $18$. Števke na drugem tretjem, četrtem in petem mestu imajo torej vsoto $14$, druga in četrta pa morata biti čim manjši, torej $0$. Iskani palindrom je $207702$.

b) Štirimestni palindromi so oblike $abba$. Njihov desetiški zapis je $abba = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 91 \cdot 11a + 10 \cdot 11b = 11(91a + 10b)$. Vsi štirimestni palindromi so deljivi z $11$, torej niso praštevila.

a) **Ugotovitev, da mora biti število deljivo z $2$ in z $9$ ....................1 točka**
**Ugotovitev, da je $2$ prva in zadnja števka ............................1 točka**
**Ugotovitev, da mora biti vsota števk $18$ ............................1 točka**
**Ugotovitev, da sta druga in predzadnja števka enaki $0$ .............1 točka**
**Odgovor: Iskani palindrom je $207702$ ................................1 točka**

a) **Ugotovitev, da so štirimestni palindromi oblike $abba$ .................1 točka**
**Uporaba desetiškega zapisa: $abba = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b$ . 1 točka**
**Poenostavitev in izpostavljanje skupnega faktorja: $91 \cdot 11a + 10 \cdot 11b = 11(91a + 10b)$ ............................................................2 točki**
**Sklep: Vsi štirimestni palindromi so deljivi z $11$, torej niso praštevila. .... 1 točka**