Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

49. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 20. april 2013

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 7. razred

N1	N2	N3	N4	N5

Čas reševanja: 120 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

1. Neko število smo odšteli od 1 ter dobljeno razliko pomnožili s 3. Temu zmnožku smo prišteli $\frac{2}{5}$, dobljeno vsoto pa delili s $\frac{7}{10}$ in dobili 2. Katero število smo odšteli od 1?

2. Točka F leži na stranici AB ostrokotnega trikotnika ABC, točka E pa na stranici BC tako, da je daljica FE vzporedna stranici AC. Dolžina daljice EF je enaka dolžini daljice BE. Točka G leži na stranici AC, tako da je kot $\sphericalangle EGC$ pravi, kot $\sphericalangle CEG$ pa velik $37°27'$. Izračunaj velikosti notranjih kotov trikotnika ABC. Obvezno nariši skico.

3. Letalo poleti iz Ljubljane ob 20.45 proti Dubaju, kamor prispe ob 4.25 po dubajskem času. Iz Dubaja nato ob 9.25 po dubajskem času poleti proti Hongkongu. Postanek v Dubaju je 20 minut daljši od trajanja prvega poleta. Polet v Hongkong traja 6 ur, letalo prileti ob 19.25 po hongkonškem času. Kolikšna je časovna razlika med Ljubljano in Hongkongom? Odgovor utemelji z računi.

Na vsakem poletu nepretrgano predvajajo nekaj enako dolgih epizod TV serije. Vsako epizodo predvajajo v celoti. Predvajanje začnejo ob vzletu in končajo ob pristanku. Največ koliko časa traja posamezna epizoda?

4. Konstruiraj krožnico, pri kateri središčnemu kotu $52.5°$ pripada tetiva dolžine 4 cm. Kote riši s šestilom. Opiši konstrukcijo..

5. Sostanovalke Tanja, Brina in Ana imajo skupaj 261 EUR. Vsaka bo plačala tretjino najemnine za sobo. Tanji bo ostalo še $75\ \%$ svojega denarja. Brina bo plačala $\frac{1}{3}$ svojega denarja, Ana pa polovico svojega denarja. Kolikšna je najemnina za sobo?

49. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje
Državno tekmovanje, 20. april 2013

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 8. razred

N1	N2	N3	N4	N5

Čas reševanja: 120 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

1. Dan je pravilni petkotnik $ABCDE$. Premica p je nosilka stranice CD, premica s je simetrala stranice BC, premica t pa je simetrala stranice ED. Nariši skico.

a) Izračunaj velikost kota $\sphericalangle CBD$.

b) Izračunaj velikost ostrega kota med premicama p in s.

c) Izračunaj velikost ostrega kota med premicama t in s.

2. Na nekem testu izbirnega tipa je v prvem delu 5 vprašanj vrednih po 4 točke, v drugem delu 5 vprašanj po 5 točk in v tretjem delu 5 vprašanj po 6 točk. Učenec za napačen odgovor izgubi polovico vrednosti vprašanja. Lana je iz vsakega dela pravilno odgovorila na enako število vprašanj, ostalih pa ni reševala. David pa je v vsaki skupini pravilno odgovoril na vsaj eno vprašanje in v drugem delu je imel en pravilen odgovor več kot v prvem delu, v tretjem delu pa en pravilen odgovor več kot v drugem delu. Na vsa ostala vprašanja je David odgovoril napačno. Skupno je zbral 12 točk manj kot Lana. Na koliko vprašanj je pravilno odgovorila Lana?

3. Cena peska se zniža za $30\ \%$. Po znižani ceni dobimo pri plačilu 105 EUR za 1.25 m^3 več peska, kot bi ga za znesek 120 EUR dobili pred znižanjem. Kolikšna je bila cena peska pred znižanjem?

4. Določi število n, če je notranji kot pravilnega $2n$-kotnika za 6° večji od notranjega kota pravilnega n-kotnika. Odgovor utemelji.

5. Jure zapisuje datume v letošnjem letu s šestimi števkami (dan, mesec, leto). Na primer 4. julij 2013 bo zapisal 040713. Če je zmnožek števk na lihih mestih enak zmnožku števk na sodih mestih, je za Jureta to »poseben dan«. Koliko posebnih dni ima leto 2013?

49. tekmovanje iz matematike
za Vegovo priznanje
Državno tekmovanje, 20. april 2013

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 9. razred

N1	N2	N3	N4	N5

Čas reševanja: 120 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

1. Jan, Rok in Luka so za letovanje skupaj plačali 770 EUR. Ta znesek so poravnali v razmerju svojih starosti. Luka je opazil, da je za vsake 4 EUR, ki jih je plačal Jan, Rok plačal 3 EUR. Rok pa je opazil, da je za vsakih 6 EUR, ki jih je plačal Jan, Luka plačal 7 EUR. Vsota njihovih starosti je 35 let. Določi njihove starosti in zneske, ki jih je plačal vsak izmed njih.

2. Obravnavaj enačbo $5 + 25x = xa^2 + a$, kjer je a parameter.

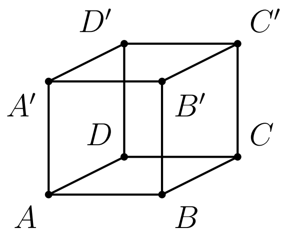
3. Operacijo $\heartsuit$ med realnima številoma a in b vpeljemo na način $a \heartsuit b = (a - b) \cdot a$. Npr.: $2 \heartsuit 3 = (2 - 3) \cdot 2 = -2$.

a) Za katero realno število velja $a \heartsuit 2 = -1$?

b) Za katere pare realnih števil a in b velja $a \heartsuit b = b \heartsuit a$?

4. Višina na hipotenuzo razdeli pravokotni trikotnik na dva trikotnika s ploščinama $\sqrt{2}$ cm^2 in $8\sqrt{2}$ cm^2. Izračunaj dolžine stranic prvotnega trikotnika. Rezultat naj bo natančen.

5. Akvarij v obliki kocke $ABCDA'B'C'D'$ (glej sliko) z dolžino roba 12 dm je delno napolnjen z vodo. Debelino stene akvarija zanemarimo.



a) Zlata ribica se nahaja v točki T, ki rob AB deli v razmerju $|AT| : |TB| = 1 : 3$. Najkrajša pot ribice do točke, kjer se gladina vode dotika roba CC', je dolga 17 dm. Koliko vode je v akvariju?

b) Akvarij napolnemo z vodo. Polž se nahaja v oglišču A akvarija, morski konjiček pa v razpolovišču roba AB. Koliko je dolga najkrajša pot konjička do točke C'? Koliko pa najkrajša pot polža do točke C', če polž leze po steni akvarija?

49. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

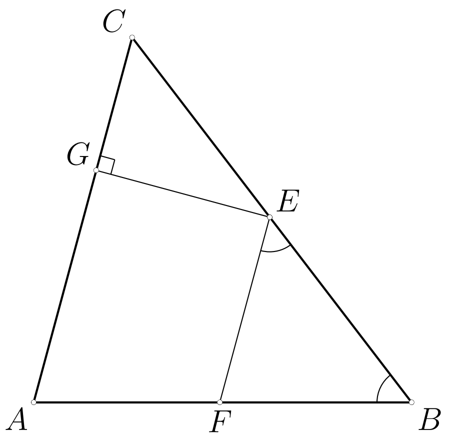
Državno tekmovanje, 20. april 2013

Rešitve za 7. razred

1. Označimo iskano število z x. Če to število odštejemo od 1 in dobljeno razliko pomnožimo s 3, dobimo število $(1-x)\cdot 3$. Zmnožku prištejemo $\frac{2}{5}$, dobljeno vsoto pa delimo s $\frac{7}{10}$ in dobimo 2, kar lahko zapišemo z enačbo $\left((1-x)\cdot 3+\frac{2}{5}\right) : \frac{7}{10} = 2$. Rešitev te enačbe je $x=\frac{2}{3}$.

Zapisana razlika $1-x$**.** .... **1 točka**
Zapisan zmnožek $(1-x)\cdot 3$. .... **1 točka**
Zapisana vsota $(1-x)\cdot 3+\frac{2}{5}$**.** .... **1 točka**
Zapisana enačba $\left((1-x)\cdot 3+\frac{2}{5}\right) : \frac{7}{10} = 2$**.** ....**2 točki**
Množenje enačbe s $\frac{7}{10}$**:** $(1-x)\cdot 3+\frac{2}{5} = 2\cdot\frac{7}{10}$**.** .... **1 točka**
Odštevanje $\frac{2}{5}$ **na obeh straneh enačbe:** $(1-x)\cdot 3 = \frac{14}{10}-\frac{2}{5}$**.** ....**1 točka**
Deljenje enačbe s 3**:** $1-x=\frac{1}{3}$**.** .... **1 točka**
Zapisana rešitev: $x=\frac{2}{3}$**.** ....**2 točki**

2. V trikotniku ABC kot γ meri $\gamma = 90° - 37°27' = 52°33'$. Trikotnik BFE je enakokrak z osnovnico BF, zato je kot $\sphericalangle EBF = \beta$ enak kotu $\sphericalangle BFE$. Daljica FE je vzporedna z daljico AC, torej je kot $\sphericalangle BFE$ enak kotu $\sphericalangle BFE = \alpha$. Od tod sledi, da je trikotnik ABC enakokrak. Velja $2\cdot\alpha + 52°33' = 180°$. Kot $\alpha = \beta = 63°43'30''$.



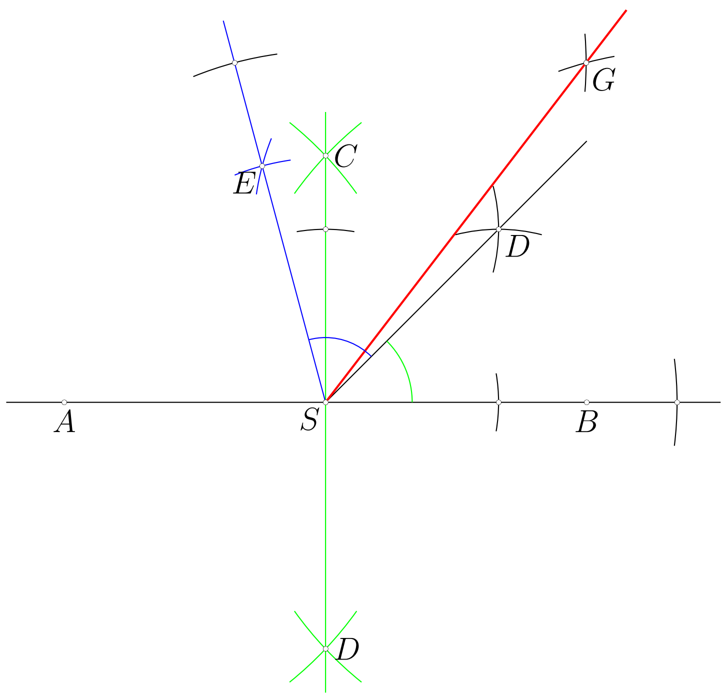
Narisana skica. .... **1 točka**
Izračunan kot $\gamma = 52°33'$**.** .... **2 točki**
Ugotovitev, d aje kot $\sphericalangle EBF = \beta$**.** .... **1 točka**
Ugotovitev: $\sphericalangle BFE = \sphericalangle BAC$**.** .... **1 točka**
Utemeljen sklep, da je trikotnik ABC **enakokrak.** .... **2 točki**
Račun: $2\cdot\alpha + 52°33' = 180°$**.** .... **1 točka**
$\alpha = \beta = 63°43'30''$**.** .... **2 točki**

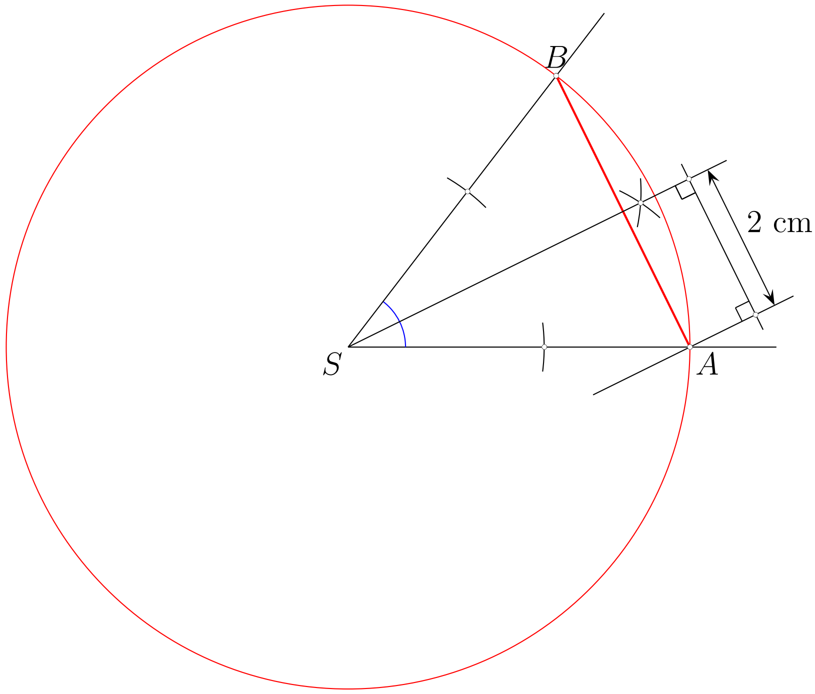
3. Postanek v Dubaju traja 5 ur, prvi polet pa 4 ure in 40 minut. Letalo prispe v Dubaj ob 1.25 po ljubljanskem času. Ob 6.25 po ljubljanskem času letalo poleti v Hong Kong in pristane ob 12.25 po ljubljanskem oziroma 19.25 po hongkonškem času. Torej je časovna razlika med Ljubljano in Hong Kongom 7 ur.

Čas trajanja posamezne epizode deli 280 minut in 360 minut, kolikor trajata posamezna leta. Torej je potrebno izračunati največji skupni delitelj teh dveh števil. $D(280, 360) = 40$, zato je lahko najdaljša taka epizoda dolga 40 minut.

Zapisana dolžina postanka v Dubaju, 5 ur. .... 1 točka
Izračunana dolžina prvega leta, 4 ur in 40 minut. .... 1 točka
Sklep, da letalo prispe v Dubaj ob 1.25 po ljubljanskem času. .... 1 točka
Ugotovitev, da letalo pristane v Hong Kongu 12.25 po ljubljanskem času. 1 točka
Odgovor: Časovna razlika je 7 ur. .... 1 točka
Ugotovitev, da dolžina epizode deli 280 in 360 minut. .... 2 točki
Izračunan največji skupni delitelj, $D(280, 360) = 40$. .... 2 točki
Odgovor: Najdaljša dolžina epizode je 40 minut. .... 1 točka

4. Postopek:
Konstruiramo kot $52.5° = \frac{60°+45°}{2}$.
Konstruiramo simetralo kota.
Narišemo pas širine 2 cm (vzporednica k simetrali kota).
Presečišče vzporednice in kraka kota, točka A, je eno krajišče tetive.
Narišemo krožnico s središčem v vrhu kota S in polmerom $|SA|$.





Ugotovitev $52.5° = 30° + 22.5°$ **.......... 1 točka**
Konstrukcija kota $60°$ **in njegove simetrale. .... 2 točki**
Konstrukcija kota $45°$ **in njegove polovice** $22.5°$**. .... 1 točkai**
Narisan kot $52.5°$**.......... 1 točka**
Narisan pas. .... 1 točka
Točka na krožnici. .... 1 točka
Narisana krožnica. .... 1 točka
Zapisan postopek konstrukcije. .... 2 točki

Opomba: Če ni razvidno, kako je tekmovalec do posameznega koraka konstrukcije prišel, mu točka po točkovniku ne pripada.

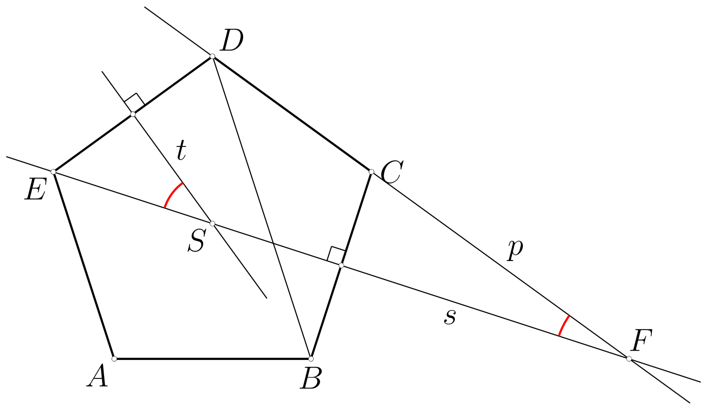
5. Označimo z x tretjino celotne najemnine. Tanja bo plačala $\frac{1}{4}$ svojega denarja, torej ima $4x$ denarja. Brina bo plačala $\frac{1}{3}$ svojega denarja, torej ima $3x$ denarja, Ana pa ima $2x$ denarja. Skupaj imajo $9x$ denarja. Vsaka bo plačala $261 : 9 = 29$ EUR, torej je najemnina za sobo 87 EUR.

Ugotovitev, da bo Tanja plačala $\frac{1}{4}$ **svojega denarja. .... 2 točki**
Sklep, da ima $4x$ **denarja. .... 2 točki**
Ugotovitev, da ima Brina $3x$ **denarja. .... 2 točki**
Ugotovitev, da ima Ana $2x$ **denarja. .... 1 točka**
Sklep, da imajo skupaj $9x$ **denarja. .... 1 točka**
Izračunan $x = 29$ **EUR. .... 1 točka**
Odgovor: Najemnina za sobo je 87 **EUR. .... 1 točka**

Opomba: Če tekmovalec pride do rešitve z deljenjem, 261:3=87 in ne utemelji, da zneska 87 EURO oziroma 29 EURO ustrezata pogojem naloge, dobi kvečjemu 1 točko.

Rešitve za 8. razred

1. Notranji kot pravilnega petkotnika meri $108°$. Trikotnik BCD je enakokrak, torej kot $\sphericalangle BCD$ meri $(180° - 108°) : 2 = 36°$. Zunanji kot pravilnega petkotniku meri $72°$, premica s je pravokotna na stranico BC, torej kot med premicama p in s meri $90° - 72° = 18°$. Premica s je tudi simetrala notranjega kota, torej kot med premicama s in t meri $90° - 54° = 36°$, saj je premica t pravokotna na stranico ED.



Skica s pravilno narisanimi premicami p, s in t ter označenima kotoma. . 2 točki
Ugotovitev, da je trikotnik BCD enakokrak. .... 1 točka
Upoštevanje velikosti notranjega kota, $108°$ ter izračunan kot $\sphericalangle CBD = (180° - 108°) : 2 = 36°$. .... 2 točki
Ugotovitev, da zunanji kot meri $72°$. .... 1 točka
Upoštevanje, da je premica s pravokotna na BC, ter izračunan kot med premicama: $90° - 72° = 18°$. .... 2 točki
Upoštevanje, da simetrala s razdeli notranji kot na dva enaka dela. ..... 1 točka
Izračunan kot med premicama s in t: $90° - 54° = 36°$. .... 1 točka

2. Označimo z x število vprašanj iz posameznega dela, na katera je Lana pravilno odgovorila. Zbrala je celo število točk, saj ostalih vprašanj ni reševala. Torej je zbrala $4x + 5x + 6x = 15x$ točk, prav toliko pa jih je zbral tudi David. Imamo 3 možnosti za število pravilnih Davidovih odgovorov po posameznih delih: 1, 2, 3 ali 2, 3, 4 ali 3, 4, 5. V prvem primeru bi zbral: $1 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2.5 + 3 \cdot 6 - 2 \cdot 3$ točk, kar ni celo število, podobno pa velja tudi v tretjem primeru. Zato je edina možnost, da je David pravilno odgovoriti na 2 vprašanji iz prvega dela, 3 iz drugega in 4 iz tretjega. Skupaj je tako prejel: $2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 - 2 \cdot 2.5 + 4 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 33$. Torej jih je Lana zbrala 45. V vsakem delu je rešila tri naloge, skupno pa 9.

Ugotovitev, da je Lana zbrala $15x$ točk. .... 1 točka
Sklep, da sta oba zbrala celo število točk. .... 1 točka
Ugotovitev, da je David lahko po delih pravilno rešil: 1, 2, 3 ali 2, 3, 4 ali 3, 4, 5 odgovorov. .... 2 točki
Izračunano število točk v prvem primeru in izločitev le tega. .... 2 točki
Ugotovitev, da tudi v tretjem primeru število točk ni celo število. .... 1 točka
Izračunano število točk, ki jih je dosegel David. .... 1 točka
Sklep, da je Lana dosegla 45 točk. .... 1 točka

Odgovor: Lana je pravilno odgovorila na 9 vprašanj. ....1 točka

3. Količino peska označimo z x. Cena pred znižanjem je znašala $\frac{120}{x}$, po 30% znižanju pa $0.7 \cdot \frac{120}{x}$. Prav tako je znižana cena enaka $\frac{105}{x+1.25}$. Zapišemo enačbo $0.7 \cdot \frac{120}{x} = \frac{105}{x+1.25}$. Upoštevamo zakonitost o enakosti ulomkov in dobimo enačbo $84 \cdot (x + 1.25) = 105 \cdot x$, Katere rešitev je $x = 5$. Torej je bila cena peska pred znižanjem 24 EUR.

Zapisana cena pred znižanjem: $\frac{120}{x}$. ....1 točka
Ugotovitev, da je ta cena po znižanju enaka: $0.7 \cdot \frac{120}{x}$. ....2 točki
Zapis znižane cene: $\frac{105}{x+1.25}$. ....1 točka
Zapisana enačba: $0.7 \cdot \frac{120}{x} = \frac{105}{x+1.25}$. ....1 točka
Upoštevanje zakonitosti o enakosti ulomkov in zapisana enačba $84 \cdot (x + 1.25) = 105 \cdot x$. ....2 točki
Izračunana rešitev enačbe: $x = 5$. ....2 točki
Odgovor: Cena pred znižanjem je bila 24 EUR. ....1 točka

4. 1. način
Velikost notranjega kota v pravilnem n-kotniku je: $180° - \frac{360°}{n}$, v $2n$-kotniku pa: $180° - \frac{360°}{2n}$. Razlika med drugim in prvim kotom je $6°$, torej je potrebno rešiti enačbo: $180° - \frac{360°}{2n} - 180° + \frac{360°}{n} = 6°$. Levo stran enačbe preoblikujemo v $\frac{360°}{n} - \frac{180°}{n} = 6°$ oziroma $\frac{180°}{n} = 6°$. Rešitev enačbe je $n = 30$.

Zapis velikosti notranjega kota v pravilnem n-kotniku: $180° - \frac{360°}{n}$. ....2 točki
Zapis velikosti notranjega kota v pravilnem $2n$-kotniku: $180° - \frac{360°}{2n}$. ......2 točki
Zapisana enačba: $180° - \frac{360°}{2n} - 180° + \frac{360°}{n} = 6°$. ....2 točki
Preoblikovanje enačbe do enačbe: $\frac{180°}{n} = 6°$. ....2 točki
Rešitev enačbe: $n = 30$. ....2 točki

Opomba: Za uganjeno in preverjeno rešitev dobi tekmovalec največ 6 točk. Za sistematično poskušanje, brez utemeljitve, zakaj se razlike velikosti kotov manjšajo dobi tekmovalec največ 8 točk.

2. način
Nad vsako stranico pravilnega n-kotnika narišemo enakokraki trikotnik in tako dobimo pravilni $2n$-kotnik. Koti tega enakokrakega trikotnika merijo $3°$, $3°$ in α_{2n}, zato velja $6° + \alpha_{2n} = 180°$ oziroma $\alpha_{2n} = 174°$. Notranji kot pravilnega $2n$-kotnika izračunamo s formulo $180° - \frac{360°}{2n} = 174°$. Rešitev enačbe $\frac{360°}{2n} = 6°$ je $n = 30$.

Ugotovitev, da z risanjem enakokrakega trikotnika nad vsako stranico dobimo pravilni $2n$-kotnik. ....2 točki
Koti tega trikotnika merijo: $3°$, $3°$ in α_{2n}. ....2 točki
Zapisana zveza $6° + \alpha_{2n} = 180°$ oziroma $\alpha_{2n} = 174°$. ....1 točka
Zapisana formula za velikost notranjega kota pravilnega n-kotnika. ......2 točki
Zapisana enačba $180° - \frac{360°}{2n} = 174°$ oziroma $\frac{360°}{2n} = 6°$. ....1 točka
Izračunana rešitev $n = 30$. ....2 točki

Opomba: Za uganjeno in preverjeno rešitev dobi tekmovalec največ 6 točk. Za

sistematično poskušanje, brez utemeljitve, zakaj se razlike velikosti kotov manjšajo dobi tekmovalec največ 8 točk.

5. Datume v letu 2013 zapišemo s številom oblike $abcd13$, kjer je ab dan v mesecu, cd pa predstavlja mesec. Števka a je lahko 0, 1, 2 ali 3, b pa je lahko katerakoli števka (odvisno od a). Števka c je lahko samo 0 ali 1, d pa katerakoli števka (odvisno od c). Ker je produkt števk na lihih mestih enak produktu števk na sodih, velja zveza: $ac = 3bd$.

- Če je $c = 0$, mora biti $b = 0$, saj d ne more biti hkrati s c enak 0. To pomeni vse datume v mesecih od januarja do septembra, ki se končajo z 0: 10, 20, 30, takih je skupaj $27 - 1 = 26$ (saj februarja ni 30. dne).
- Če je $c = 1$ (meseci od oktobra do decembra), je $a = 3bd$, torej je števka a deljiva s 3. Ločimo dve možnosti:
  - $a = 0$ (potem b ni 0), torej je tudi $d = 0$. To so vsi dnevi v oktobru od $1.$ do $9.$ oktobra, torej jih je 9.
  - $a = 3$, potem sta b in d oba enaka 1, kar bi pomenilo datum $31.11.$, ki pa seveda ne obstaja.

Posebnih dni je zato v letu 2013 skupaj 35.

Ugotovitev, da je števka a lahko samo 0, 1, 2 ali 3, b pa katerakoli števka odvisna od nje. .... 1 točka
Ugotovitev, da je števka c lahko samo 0 ali 1, d pa katerakoli števka odvisna od c. .... 1 točka
Zapisana zveza: $ac = 3bd$. .... 1 točka
Sklep: Če je $c = 0$, mora biti $b = 0$. .... 1 točka
Ugotovitev, da to pomeni vse datume od januarja do septembra, ki se končajo z 0, in da je le-teh 26. .... 1 točka
Sklep: Če je $c = 1$, je a lahko le 0 ali 3. .... 1 točka
Sklep: Če je $a = 0$, je tudi $d = 0$. .... 1 točka
Ugotovitev, da so to vsi datumi od 1. do 9. oktobra, torej jih je 9. .... 1 točka
Sklep: Če je $a = 3$, sta b in d oba enaka 1. Takega datuma pa ni. .... 1 točka
Odgovor: Posebnih dni v letu 2013 je 35. .... 1 točka

Rešitve za 9. razred

1. Označimo njihove starosti:
$x\ldots$ Janova starost
$y\ldots$ Rokova starost
$z\ldots$ Lukova starost
Glede na to kako si razdelijo denar, lahko zapišemo razmerji $x : y = 4 : 3$ in $x : z = 6 : 7$. Iz prvega razmerja izrazimo $y = \frac{3}{4}x$, iz drugega pa $z = \frac{7}{6}x$. Upoštevamo vsoto njihovih starosti in zapišemo enačbo: $x + \frac{3}{4}x + \frac{7}{6}x = 35$, katere rešitev je $x = 12$. Izračunamo še $y = 9$ in $z = 14$. Razmerje med stroškom letovanja in vsoto njihovih starosti je 22. Odgovorimo: Jan ima 12 let in je plačal 264 EUR, Rok ima 9 let in je plačal 198 EUR, Luka je star 14 let in je plačal 308 EUR.

Zapisani razmerji starosti $x : y = 4 : 3$ in $x : z = 6 : 7$. .... 2 točki
Zapisana $y = \frac{3}{4}x$ in $z = \frac{7}{6}x$. .... 2 točki
Zapisana enačba $x + \frac{3}{4}x + \frac{7}{6}x = 35$. .... 2 točki
Rešitev enačbe $x = 12$. .... 1 točka
Izračunane starosti: 12 let, 9 let in 14 let. .... 1 točka
Ugotovitev, da je razmerje med stroški letovanja in vsoto starosti enako 22. ... 1 točka
Odgovor: Jan ima 12 let in je plačal 264 EUR, Rok ima 9 let in je plačal 198 EUR, Luka je star 14 let in je plačal 308 EUR. .... 1 točka

2. Členi, ki vsebujejo x, naj bodo na levi strani enačbe, ostalo pa na desni strani: $25x - xa^2 = a - 5$. Izpostavimo x na levi strani in dobimo: $x(25 - a^2) = a - 5$. Na levi strani enačbe drugi faktor razstavimo: $x(5 - a)(5 + a) = a - 5$. Delimo jo z $(5 - a)(5 + a)$ in dobimo $x = \frac{a-5}{(5-a)(5+a)}$. Upoštevamo, da velja $a - 5 = -(5 - a)$, zato je rešitev enačbe $x = -\frac{1}{5+a}$, kjer je a različen od -5 in 5. Obravnavamo enačbo za primera $a = -5$ oziroma $a = 5$. V prvem primeru, $a = -5$, dobimo: $x \cdot 0 = -10$, ta enačba pa nima rešitev. V drugem primeru, $a = 5$, dobimo enačbo $x \cdot 0 = 0$, ki jo reši vsako realno število.

Preoblikovanje dane enačbe v $25x - xa^2 = a - 5$. .... 1 točka
Izpostavljanje x na levi strani enačbe. .... 1 točka
Razstavljanje: $x(5 - a)(5 + a) = a - 5$. .... 1 točka
Deljene enačbe z $(5 - a)(5 + a)$ in zapis $x = \frac{a-5}{(5-a)(5+a)}$, kjer je a različen od -5 in 5. 1 točka
Izpostavljanje -1 v števcu. .... 1 točka
Krajšanje ulomka in zapisana rešitev $x = -\frac{1}{5+a}$. .... 1 točka
Obravnava enačbe za $a = -5$ z ugotovitvijo, da ni rešitev. .... 2 točki
Obravnava enačbe za $a = 5$ z ugotovitvijo, da so rešitve vsa realna števila. .... 2 točki

3. a) Zapišemo: $a\heartsuit 2 = (a - 2) \cdot a$. Rešiti moramo enačbo: $a(a - 2) = -1$, ki jo preoblikujemo v $a^2 - 2a + 1 = 0$. Leva stran enačbe je popolni kvadrat, torej se enačba glasi: $(a - 1)^2 = 0$. Rešitev je $a = 1$.

b) Enakost $a \heartsuit b = b \heartsuit a$, velja če je: $(a-b) \cdot a = (b-a) \cdot b$. Odpravimo oklepaje in dobimo $a^2 - ab = b^2 - ab$, torej mora veljati $a^2 = b^2$. Enakost $a \heartsuit b = b \heartsuit a$ velja za vse pare enakih in nasprotnih realnih števil ($a = \pm b$).

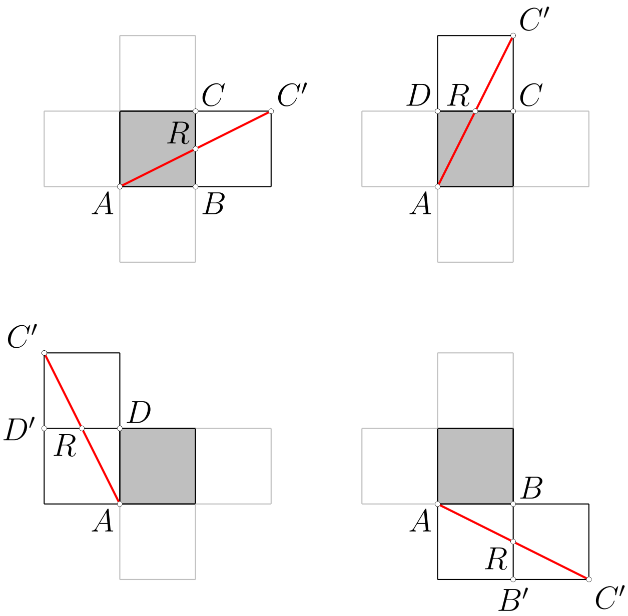
Zapisana enačba: $a(a-2) = -1$. **.. 1 točka**
Zapisana preoblikovana enačba: $a^2 - 2a + 1 = 0$. **...................... 1 točka**
Ugotovitev, da je leva stran enačbe popolni kvadrat: $(a-1)^2 = 0$. **........ 2 točki**
Zapisana rešitev $a = 1$. **.. 1 točka**
Ugotovitev, da velja $a \heartsuit 2 = (a-2) \cdot a$**, če velja** $(a-b) \cdot a = (b-a) \cdot b$. **...... 1 točka**
Odpravljeni oklepaji $a^2 - ab = b^2 - ab$. **............................ 1 točka**
Ugotovitev, da enakost velja, če velja $a^2 = b^2$. **..................... 1 točka**
Ugotovite, da enakost velja za $a = \pm b$. **............................ 2 točki**

4. Izračunamo ploščino celotnega trikotnika ABC, $p = \sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ cm^2, torej za kateti a in b velja $\frac{a \cdot b}{2} = 9\sqrt{2}$ cm^2 oziroma $a \cdot b = 18\sqrt{2}$ cm^2. S točko N označimo nožišče višine na hipotenuzo AB. Trikotnika NBC in NCA sta podobna z razmerjem ploščin $8:1$. Istoležne stranice so zato v razmerju $k = \frac{a}{b}$. Izrazimo $a = b\sqrt{8}$ in vstavimo v enačbo $a \cdot b = 18\sqrt{2}$. Dobimo enačbo $b^2\sqrt{8} = \sqrt{18}$ z rešitvijo $b = 3$ cm, torej kateta a meri $a = 6\sqrt{2}$ cm. Dolžino hipotenuze c izračunamo s Pitagorovim izrekom in dobimo $c = 9$ cm.

Izračuna ploščina celotnega trikotnika ABC. **........................... 1 točka**
Zapisana zveza za kateti a **in** b**:** $a \cdot b = 18\sqrt{2}$. **...................... 1 točka**
Ugotovitev, da sta ploščini podobnih trikotnikov v razmerju $k^2 = 8$. **..... 1 točka**
Sklep, da sta istoležni stranici v razmerju $k = \frac{a}{b} = \sqrt{8}$. **................. 1 točka**
Zapisana zveza za kateti a **in** b**:** $a = b\sqrt{8}$. **............................ 1 točka**
Zapisana enačba: $b^2\sqrt{8} = \sqrt{18}$. **.................................... 1 točka**
Izračunana rešitev $b = 3$ **cm. .... 2 točki**
Izračunana dolžina katete $a = 6\sqrt{2}$ **cm. .... 1 točka**
Izračunana dolžina hipotenuze $c = 9$ **cm. .... 1 točka**

5. a) Riba se nahaja v točki, ki je 3 dm oddaljena od oglišča A in 9 dm od oglišča B. Dolžino njene poti do hrane izračunamo iz $\sqrt{9^2 + 12^2 + x^2} = 17$, kjer je x višina vode v decimetrih. Rešitev enačbe $\sqrt{225 + x^2} = 17$ je enaka $x = 8$. Izračunamo količino vode v akvariju $V = 12 \cdot 12 \cdot 8 = 1152$ dm$^3 = 1152$ l.

b) Označimo z R razpolovišče roba BB'. (Ena izmed štirih možnih) polževih najkrajših poti vodi iz oglišča A do točke R ter iz nje do oglišča C'. **Dokažimo**, da je ta pot res najkrajša. Če plašč kocke (brez ploskve $A'B'C'D'$) razgrnemo v ravnino, bo najkraša pot med točkama A in C' po stenah akvarija kar najkrajša pot med točkama A in C' na mreži kocke (v ravnini). Ta razdalja je enaka $|AC'| = \sqrt{(|AB| + |BC|)^2 + |CC'|^2} = \sqrt{24^2 + 12^2} = 12\sqrt{5}$ dm.



Dolžina polževe poti je $12\sqrt{5}$ dm. S P označimo razpolovišče roba AB, dolžina daljice PC' je enaka dolžini poti konjička. Dolžina $|PC'| = \sqrt{6^2 + 12^2 + 12^2} = 18$ dm.

Opomba. Plašč akvarija lahko razgrnemo v ravnino na več kot 4 načine, najkrajše poti od A do C' pa so le 4 in te so narisane na zgornjih skicah. Dno akvarija je označeno z osenčenim kvadratom.

Ugotovitev, kje se na robu AB se nahaja riba. ....1 točka
Zapisana enačba $\sqrt{9^2 + 12^2 + x^2} = 17$. ....2 točki
Izračunana Rešitev enačbe $x = 8$. ....1 točka
Odgovor: V akvariju je 1152 litrov vode. ....1 točka
***Utemeljitev, kako poteka polževa pot. ....2 točki**
Izračunana dolžina polževe poti, $12\sqrt{5}$ dm. ....1 točka
Izračunana dolžina konjičkove poti, 18 dm. ....2 točki

***Opomba.** V nalogi je potrebno v treh primerh poiskati najkrajšo razdaljo med dvema točkama. V dveh primerih lahko točki povežemo z daljico in očitno je, da je to tudi najkrajša pot med njima. V enem primeru pa je najkrajša pot sestavljena iz dveh daljic in **ni očitno**, katera pot je najkrajša. Tekmovalec **se mora zavedati**, da je to podrobnost potrebno dokazati.