Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge
DMFA Slovenije

51. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje
Državno tekmovanje, 18. april 2015

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 7. razred

N1	N2	N3	N4	N5

Čas reševanja: 120 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

1. Izračunaj vrednost izraza

$$\left(\frac{\frac{4}{3}+1}{\frac{4}{3}-1}-1\right)\cdot\frac{1}{3}-\left(\left(\left(\frac{\frac{4}{3}-1}{\frac{4}{3}+1}+1\right):\frac{4}{3}\right):\left(\frac{1}{\frac{4}{3}-1}+\frac{1}{\frac{4}{3}+1}\right)\right)\cdot 4.$$

2. Miha je 1. januarja 2014 začel varčevati. Dneve v letu je oštevilčil z naravnimi števili, in sicer: 1. januar 1, 2. januar 2, $\ldots$, 31. december 365.

- Vsak dan, ki je bil oštevilčen s številom, deljivim s tri, je v hranilnik dal 30 centov.
- Vsak dan, oštevilčen s sodim številom, ki ni bilo deljivo s tri, je v hranilnik dal 20 centov.
- Vsak preostali dan je v hranilnik dal 10 centov.

Koliko evrov je imel Miha v hranilniku, ko je pričakal novo leto 2015?

3. Točki K in M ležita na hipotenuzi AB pravokotnega trikotnika ABC, tako da velja $|AK| = |AC|$ in $|BM| = |BC|$. Nariši skico ter izračunaj velikost kota $\sphericalangle MCK$.

4. Trimestno naravno število $2a4$ prištejemo k številu 329. Dobimo vsoto $5b3$, ki je deljiva s 3. Katere so vse možne vrednosti za števko a?

5. Kateta AC pravokotnega trikotnika ABC s pravim kotom v oglišču C je dolga 7 cm, polmer temu trikotniku včrtane krožnice pa 2 cm. Konstruiraj trikotnik ABC samo s šestilom in ravnilom ter zapiši in utemelji postopek konstrukcije.

51. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje
Državno tekmovanje, 18. april 2015

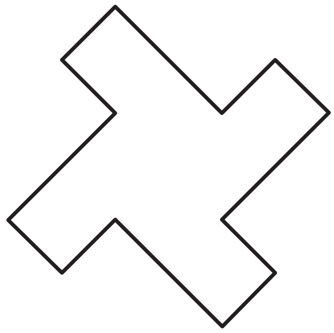
Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 8. razred

N1	N2	N3	N4	N5

Čas reševanja: 120 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

1. Ploščina lika na sliki je enaka $200\ \mathrm{cm}^2$. Vse krajše stranice so enako dolge, pa tudi vse daljše so enako dolge in so dvakrat toliko dolge kot krajše. Vsi koti na sliki so pravi. Kolikšen je obseg tega lika?



2. Izračunaj:

$$\sqrt{(-2)^{12} \cdot \left(\frac{(-2)^3 \cdot (-2)^4}{(-2)^2 \cdot (-2)^7}\right)^3} + \sqrt{(2 \cdot 3)^4 + (3^2)^3} + 13 \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}+1} : \frac{1}{\sqrt{8}-1}.$$

3. Kruh zamesijo iz $30\ \%$ bele moke, $60\ \%$ ržene moke in $10\ \%$ vode. Zaradi slabe letine se je bela moka podražila za $25\ \%$, ržena pa za $20\ \%$. Cena vode je ostala nespremenjena. Za koliko odstotkov se je podražil kruh zaradi dviga cen moke?

4. Dolžina krajše osnovnice enakokrakega trapeza je enaka polovici dolžine daljše osnovnice. Velikost kota ob daljši osnovnici je enaka $75°$. Izrazi ploščino trapeza z dolžino kraka.

5. Jan se je z gorskim kolesom peljal na 12 km oddaljen hrib. Na pot je šel ob 9.15 in na vrh prispel ob 10.27. Nazaj se je spustil ob 11.18 in je bil doma spet ob 11.38. Ob poti stoji čebelnjak. Od trenutka, ko se je Jan peljal mimo na poti navzgor, do trenutka, ko se je peljal mimo na poti nazaj, sta minili natanko 2 uri. Kako daleč od vrha hriba je postavljen čebelnjak?

51. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 18. april 2015

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 9. razred

N1	N2	N3	N4	N5

Čas reševanja: 120 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

1. Samo in Janina bosta igrala namizni tenis. Odločila sta se, da bosta odigrala največ šest setov in da bosta prenehala z igro, če bo eden izmed njiju zmagal v dveh zaporednih setih.

a) Koliko je vseh različnih potekov igre? Koliko iger se konča z zmago Janine v zadnjem odigranem setu?

b) Kako bi si po vrsti sledili zmagovalci posameznih setov, če bi se igra zaključila z drugo zaporedno zmago Sama šele v šestem setu?

c) Samo in Janina imata vsak po 10 pomaranč. Po koncu vsakega seta bo poraženec dal eno pomarančo zmagovalcu. Kako bo potekala igra, če bosta na koncu oba imela enako število pomaranč?

2. Točka E je razpolovišče stranice AB kvadrata $ABCD$, točka F pa razpolovišče stranice BC. Daljici AF in ED se sekata v točki P. Izračunaj razmerje dolžin daljic AP in PF.

3. Tetiva AB krožnice k je dolga 14 cm, njej vzporedna tetiva CD pa je dolga 18 cm. Razdalja med tetivama je enaka 8 cm. Izračunaj polmer krožnice k. Rezultat naj bo točen. Ali obstaja več rešitev?

4. Eden izmed dveh večkotnikov ima 6 oglišč več kot drugi in 63 diagonal več kot drugi. Za katera večkotnika gre?

5. Žan, Lan in Dan so imeli vsak svojo košaro jabolk. Žan je dal polovico jabolk iz svoje košare v Lanovo košaro. Nato je dal Lan tretjino jabolk iz svoje košare v Danovo košaro. Za njim pa je dal Dan četrtino jabolk iz svoje košare v Žanovo košaro. Na koncu je bilo v vsaki košari 12 jabolk. Koliko jabolk je imel na začetku vsak v svoji košari?

51. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 18. april 2015

Rešitve za 7. razred

1. Računajmo:

$$\left(\frac{\frac{4}{3}+1}{\frac{4}{3}-1}-1\right)\cdot\frac{1}{3}-\left(\left(\left(\frac{\frac{4}{3}-1}{\frac{4}{3}+1}+1\right):\frac{4}{3}\right):\left(\frac{1}{\frac{4}{3}-1}+\frac{1}{\frac{4}{3}+1}\right)\right)\cdot 4=$$

$$=\left(\frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}}-1\right)\cdot\frac{1}{3}-\left(\left(\left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}}+1\right):\frac{4}{3}\right):\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\frac{7}{3}}\right)\right)\cdot 4=$$

$$=(7-1)\cdot\frac{1}{3}-\left(\left(\left(\frac{1}{7}+1\right):\frac{4}{3}\right):\left(3+\frac{3}{7}\right)\right)\cdot 4=$$

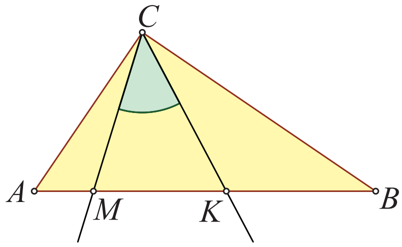
$$=6\cdot\frac{1}{3}-\left(\left(\frac{8}{7}\cdot\frac{3}{4}\right):\frac{24}{7}\right)\cdot 4=2-\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{24}\right)\cdot 4=2-\frac{1}{4}\cdot 4=1$$

Izračunane vrednosti $\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}$. .... 1 točka
Izračunane vrednosti $\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$. .... 1 točka
Izračunani vsi štirje dvojni ulomki. .... 2 točki
Izračunana vrednost prvega člena: 2. .... 1 točka
Izračunana vrednost prvega količnika v drugem členu: $\frac{6}{7}$. .... 2 točki
Izračunana vrednost vsote obeh dvojnih ulomkov v drugem členu: $\frac{7}{24}$. .... 1 točka
Izračunan prvi faktor v drugem členu: $\frac{1}{4}$. .... 1 točka
Izračunana vrednost izraza: 1. .... 1 točka

2. Leto 2014 je imelo 365 dni, saj ni prestopno. Število vseh dni označenih s številom, ki je deljivo s tri je enako $\frac{1}{3}$ od 365, torej 121. V teh dnevih je Miha privarčeval $121 \cdot 0.3$ EUR $=$ 36.3 EUR. Število vseh dni, ki jim pripada sodo število, je enako 182. Pri tem je potrebno izvzeti dneve, ki jim pripada število deljivo s šest, takih je $\frac{1}{6}$, torej 60. Število dni, ko je Miha dal v hranilnik 20 centov, je enako 122 $(182 - 60 = 122)$. Skupno je v teh dnevih privarčeval $122 \cdot 0.2$ EUR $= 24.4$ EUR. Ostanejo le še dnevi, ko je dal v hranilnik 10 centov, število le-teh je enako $365 - 121 - 122 = 122$. V teh dnevih je Miha privarčeval 12.2 EUR. Torej je v celem letu 2014 privarčeval $36.3 + 24.4 + 12.2 = 72.9$ EUR.

Ugotovitev, da je število vseh dni, ko je dal v hranilnik 30 centov, enako 121. 2 točki
Izračun števila vseh dni s sodo oznako. ....1 točka
Ugotovitev, da je potrebno izvzeti dneve s števili, ki so deljiva s 6. .... 2 točki
Sklep, da je število vseh dni, ko je dal v hranilnik 20 centov, enako 122. ....1 točka
Sklep, da je število dni, ki ustrezajo tretji lastnosti, enako 122.. .... 2 točki
Izračunan končni znesek privarčevanega denarja. ....2 točki

3. Označimo kota v trikotniku ABC: $\sphericalangle BAC = \alpha$ in $\sphericalangle CBA = \beta$.



Razberemo, da je trikotnik MBC enakokrak z osnovnico MC. Torej sta kota $\sphericalangle BMC$ in $\sphericalangle MCB$ skladna. Kot $\sphericalangle CBM$ je enak kotu β, zato je velikost kota $\sphericalangle BMC$ enaka $\frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \beta)$. Podobno velja za trikotnik AKC, ki je enakokrak z osnovnico CK in v katerem sta kota $\sphericalangle CKA$ in $\sphericalangle ACK$ skladna. Kot $\sphericalangle KAC = \alpha$, torej je velikost kota $\sphericalangle CKA$ enaka $\frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \alpha)$. Velikost kota $\sphericalangle MCK$ je enaka $180^\circ - \sphericalangle BMC - \sphericalangle CKA$. Upoštevamo, kar smo že izpeljali in dobimo: $180^\circ - \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \beta) - \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta)$. Vemo, da ostra kota pravokotnega trikotnika skupaj merita 90°. Torej je velikost kota $\sphericalangle MCK$ enaka: $\frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$.

Enako velja, če obrnemo orientacijo trikotnika ali če je kateta a krajša od obeh katet.

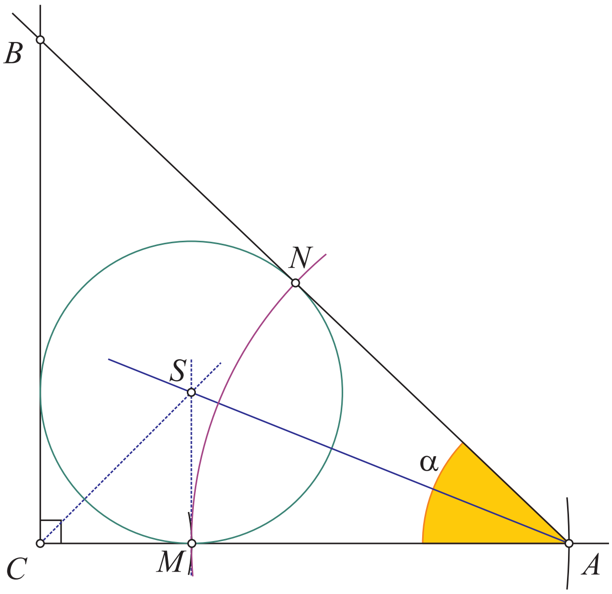
Narisana skica z označenima točkama K in M. .... 1 točka
Ugotovitev, da je trikotnik MBC enakokrak. .... 1 točka
Sklep, da sta kota $\sphericalangle BMC$ in $\sphericalangle MCB$ skladna. .... 1 točka
Zapisana velikost kota $\sphericalangle BMC$. .... 1 točka
Ugotovitev, da je trikotnik AKC enakokrak s skladnima kotoma $\sphericalangle CKA$ in $\sphericalangle ACK$. 1 točka
Zapisana velikost kota $\sphericalangle CKA$. .... 1 točka
Zapisana velikost kota $\sphericalangle MCK = \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta)$. .... 2 točki
Upoštevanje, da ostra kota pravokotnega trikotnika skupaj merita 90° ter izračunana velikost kota $\sphericalangle MCK = 45^\circ$. .... 2 točki

4. Število $5b3$ je deljivo s 3, kar pomeni, da je seštevek števk deljiv s 3. Torej je števka b lahko 1, 4 ali 7. Obravnavajmo vse tri možnosti. Če je $b = 1$, velja $2a4 + 329 = 513$. Izračunamo $2a4$ in dobimo $513 - 329 = 184$. Ta rešitev ne ustreza. Če je $b = 4$, je razlika $2a4$ enaka $543 - 329 = 214$. Torej je števka a enaka 1. V zadnjem primeru je $b = 7$. Razlika $2a4$ je enaka $573 - 329 = 244$ in števka a je enaka 4.

Upoštevanje kriterija za deljivost s 3**. .... 1 točka**
Zapisane vse tri možnosti za števko b**. .... 2 točki**
Obravnavna možnost, če je $b = 1$ **in izračunana vrednost razlike** $2a4 = 184$**. . 2 točki**
Obravnavna možnost, če je $b = 4$ **in izračunana vrednost razlike** $2a4 = 214$**. . 2 točki**
Obravnavna možnost, če je $b = 7$ **in izračunana vrednost razlike** $2a4 = 244$**. . 2 točki**
Sklep, da sta edini možni vrednosti za števko a**:** 1 **in** 4**. .... 1 točka**

5. Postopek:

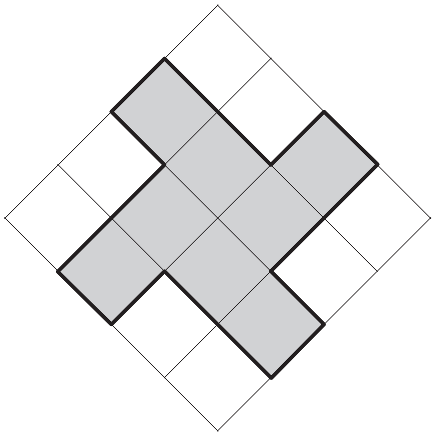
1. Konstruiramo pravi kot in označimo oglišče C.
2. S šestilom iz točke C odmerimo 7 cm in dobimo točko A.
3. Na kraku AC pravega kota iz točke C s šestilom odmerimo 2 cm in dobimo točko M, ki je dotikališče stranice AC z včrtano krožnico.
4. Konstruiramo simetralo pravega kota.
5. Skozi točko M konstruiramo vzporednico p drugemu kraku pravega kota.
6. Presek simetrale pravega kota in premice p je središče trikotniku včrtane krožnice, točka S.
7. Narišemo poltrak AS, ki je po definiciji simetrala notranjega kota trikotnika z vrhom v točki A.
8. Točko M prezrcalimo čez nosilko daljice AS in dobimo točko N. Dobljena točka je dotikališče iskane stranice AB in včrtane krožnice.
   Utemeljitev: trikotnika SAM in SAN sta skladna, ker leži daljica AS na simetrali kota $\sphericalangle NAM = \alpha$. Kota $\sphericalangle SAM$ in $\sphericalangle NAS$ sta skladna, torej je poltrak AS simetrala kota $\sphericalangle NAM = \alpha$.
9. Presečišče poltraka AN z drugim krakom pravega kota označimo s točko B in dobili smo trikotnik ABC, saj velja $\sphericalangle NAM = \alpha$.



Konstrukcija pravega kota. . . . . 1 točka
Odmerjeni točki A in M. . . . . 1 točka
Konstrukcija simetrale pravega kota. . . . . .1 točka
Konstrukcija vzporednice in oznaka središča trikotniku včrtane krožnice. . 2 točki
Sklep, da je poltrak AS simetrala kota z vrhom v točki A. . . . . 1 točka
Zrcaljenje točke M čez nosilko daljice A. . . . . .1 točka
Utemeljitev, da je dobljena točka N, dotikališče iskane stranice in včrtane krožnice. 2 točki
Označeno presečišče poltraka AN in drugega kraka pravega kota ter trikotnik ABC. . . . . 1 točka

Rešitve za 8. razred

1. Lik lahko prekrijemo z 8 skladnimi kvadratki, kot je prikazano na sliki.



Ploščina enega takega kvadratka meri $200\ \mathrm{cm}^2 : 8 = 25\ \mathrm{cm}^2$, torej je njegova stranica dolga 5 cm. Krajša stranica danega lika tako meri 5 cm, daljša pa 10 cm. Obseg lika je enak $8 \cdot 5\ \mathrm{cm} + 4 \cdot 10\ \mathrm{cm} = 80\ \mathrm{cm}$.

Ugotovitev, da lik lahko prekrijemo z 8 skladnimi kvadratki. .... 2 točki
Izračunana ploščina enega takega kvadratka. .... 2 točki
Izračunana stranica kvadratka. .... 2 točki
Sklep o dolžinah krajše in daljše stranice lika. .... 2 točki
Izračunan obseg lika. .... 2 točki

2. Izračunajmo:

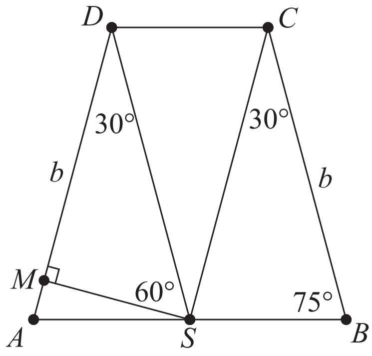
$$
\begin{aligned}
&\sqrt{(-2)^{12} \cdot \left(\frac{(-2)^3 \cdot (-2)^4}{(-2)^2 \cdot (-2)^7}\right)^3} + \sqrt{(2 \cdot 3)^4 + (3^2)^3} + 13 \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}+1} : \frac{1}{\sqrt{8}-1} = \\
= \;& \sqrt{2^{12} \cdot \left(\frac{(-2)^7}{(-2)^9}\right)^3} + \sqrt{2^4 \cdot 3^4 + 3^6} + 13 \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{3+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{8}-1}{1} = \\
= \;& \sqrt{2^{12} \cdot \left(\frac{1}{(-2)^2}\right)^3} + \sqrt{3^4(2^4 + 3^2)} + 13 \cdot \frac{(\sqrt{2}+1)(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} \cdot \frac{\sqrt{8}-1}{1} = \\
= \;& \sqrt{\frac{2^{12}}{2^6}} + \sqrt{25 \cdot 3^4} + 13 \cdot \frac{3\sqrt{2}+3-2-\sqrt{2}}{9-2} \cdot \frac{\sqrt{8}-1}{1} = \\
= \;& \sqrt{2^6} + 5 \cdot 3^2 + 13 \cdot \frac{2\sqrt{2}+1}{7} \cdot \frac{2\sqrt{2}-1}{1} = \\
= \;& 2^3 + 45 + 13 \cdot \frac{(2\sqrt{2})^2 - 1}{7} = 8 + 45 + 13 \cdot \frac{8-1}{7} = 8 + 45 + 13 = 66.
\end{aligned}
$$

Upoštevanje pravil za množenje in deljenje potenc v prvem členu. ....1 točka
Odpravljene negativne osnove pri potencah v prvem členu - potenciranje negativne osnove s sodo stopnjo. ....1 točka
Upoštevanje pravila za potenciranje potenc v prvem členu. ....1 točka
Izračunana vrednost prvega člena. ....1 točka
Odprava oklepajev v drugem členu. ....1 točka
Izpostavljanje skupnega faktorja v drugem členu. ....1 točka
Izračunana vrednost drugega člena. ....1 točka
Izračunana vsota v imenovalcu prvega ulomka tretjega člena ter obratna vrednost drugega ulomka v tretjem členu. ....1 točka
Izračunana vrednost tretjega člena. ....1 točka
Izračunana vrednost izraza. ....1 točka

3. S c označimo ceno kruha pred podražitvijo. Strošek bele moka predstavlja 30% celotne cene, torej $0.3c$. Podobno strošek ržene moke predstavlja $0.6c$ in strošek vode $0.1c$. Po podražitvi moke je strošek bele moke enak $0.3c \cdot 1.25 = 0.375c$, strošek ržene moke pa $0.6c \cdot 1.2 = 0.72c$. Cena kruha po podražitvi je torej enaka $0.375c + 0.72c + 0.1c = 1.195c$, kar pomeni, da se je prvotna cena zvišala za 19.5%.

Zapisan strošek bele moke. .... 1 točka
Zapisan strošek ržene moke. .... 1 točka
Zapisan strošek vode. .... 1 točka
Izračunan strošek bele moke po podražitvi. .... 2 točki
Izračunan strošek ržene moke po podražitvi. .... 2 točki
Zapisana cena kruha po podražitvi. .... 1 točka
Sklep, da gre za 19.5% podražitev. .... 2 točki

4. Dolžini krakov BC in AD trapeza $ABCD$ sta enaki, označimo ju z b. Dolžino osnovnice AB označimo z a. Vzporednica h kraku AD skozi točko C seka daljšo osnovnico v točki S. Dobljeni štirikotnik $ASCD$ je paralelogram s stranicami $\frac{a}{2}$ in b. Podobno je štirikotnik $SBCD$ paralelogram s stranicami $\frac{a}{2}$ in b. Ker sta daljici BC in SD vzporedni, sta kota $\sphericalangle CBA$ in $\sphericalangle DSA$ skladna ter merita $75°$. Podobno velja za kote $\sphericalangle BSC = \sphericalangle SAD = \sphericalangle SDC = \sphericalangle DCS = 75°$. Sklepamo, da so trikotniki ASD, SBC in CDS skladni enakokraki trikotniki. Narišemo višino MS v trikotniku ASD. Velikost kota $\sphericalangle ADS$ je enaka $30°$, kot $\sphericalangle DSM$ pa meri $60°$. Pravokotni trikotnik MSD je torej polovica enakostraničnega trikotnika s stranico b. Dolžina stranice MS je enaka $\frac{b}{2}$. Ploščina trikotnika ASD je enaka $\frac{b \cdot \frac{b}{2}}{2} = \frac{b^2}{4}$. Ker trapez sestavljajo trije taki trikotniki, je njegova ploščina enaka $\frac{3b^2}{4}$.



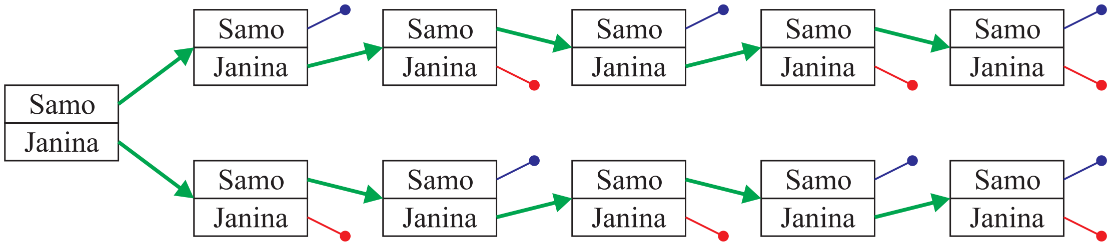
Sklep, da sta štirikotnika $ASCD$ in $SBCD$ paralelograma s stranicama $\frac{a}{2}$ in b. ....1 točka
Ugotovitev, da je velikost kota $\sphericalangle DSA$ enaka $75°$. ....1 točka
Sklep: $\sphericalangle BSC = \sphericalangle SAD = \sphericalangle SDC = \sphericalangle DCS = 75°$. ....1 točka
Sklep, da so trikotniki ASD, SBC in CDS skladni enakokraki trikotniki......2 točki
Ugotovitev, da je trikotnik MSD polovica enakostraničnega trikotnika s stranico b. 2 točki
Sklep, da je višina MS enaka $\frac{b}{2}$. ....1 točka
Izračunana ploščina trikotnika ASD. ....1 točka
Izračunana ploščina trapeza. ....1 točka

5. Za pot navzgor potrebuje Jan 1 uro in 12 minut oziroma 1.2 ure, torej bi s tako hitrostjo v eni uri prekolesaril $\frac{12}{1.2} = 10$ km. Pot navzdol je prevozil v 20 minutah, kar pomeni, da bi s tako hitrostjo v eni uri prekolesaril $12 \cdot 3 = 36$ km. Oddaljenost čebelnjaka od vrha označimo z x. Jan je za pot od čebelnjaka do vrha potreboval $\frac{x}{10}$ ure, čas z vrha do čebelnjaka pa je enak $\frac{x}{36}$ ure. Razberemo, da je na vrhu počival 51 minut, torej je za kolesarjenje od čebelnjaka do vrha in nazaj potreboval 69 minut, kar je enako $\frac{69}{60}$ ure. Vsota časov je enaka $\frac{x}{10} + \frac{x}{36} = \frac{23x}{180}$, kar mora biti enako $\frac{69}{60} = \frac{207}{180}$. Velja, da je $23x = 207$ in $x = 9$, torej stoji čebelnjak 9 km pod vrhom.

Izračunana Janova povprečna hitrost na poti navzgor. ....2 točki
Izračunana hitrost na poti navzdol. ....2 točki
(samo pravilno izračunana časa, ki ju porabi v eno smer - v vsakem primeru po 1 točka)
Izračunan čas, ki ga porabi za pot od čebelnjaka do vrha: $\frac{x}{10}$. ....1 točka
Čas z vrha do čebelnjaka : $\frac{x}{36}$. ....1 točka
Zapisana vsota časov: $\frac{x}{10} + \frac{x}{36} = \frac{23x}{180}$. ....1 točka
Ugotovitev, da mora biti vsota časov 69 min oziroma $\frac{69}{60} = \frac{207}{180}$ ure. ....2 točki
Izračunana vrednost $x = 9$ km. ....1 točka

Rešitve za 9. razred

1. a) Narišemo kombinatorično drevo:



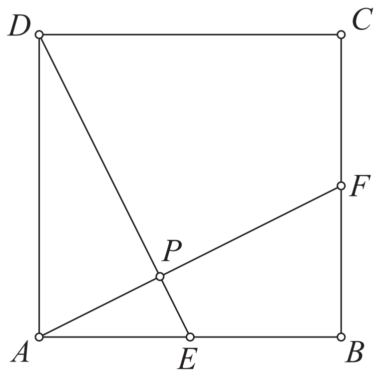
S preštevanjem ugotovimo, da je število vseh različnih potekov igre enako 12 ter da je Janina zmagala 6 krat.

b) Rešitev lahko razberemo iz drevesa: Samo (1. set), Janina (2. set), Samo (3. set), Janina (4. set), Samo (5. set) in Samo (6. set).

c) Recimo, da po 1. setu zmaga Samo, torej ima 11 pomaranč, Janina pa 9. Če bi v 2. setu zmagal Samo, se igra konča in Samo bi imel 12 pomaranč, Janina pa 8. Kar ne ustreza zahtevam naloge, torej je zmagala Janina in oba imata 10 pomaranč. Če bi v 3. setu zmagala Janina, bi se igra končala in Janina bi imela 11 pomaranč, Samo pa 9. Zmagal je Samo, ki ima zato 11 pomaranč, Janina pa 9. Če bi v 4. setu zmagal Samo, je igra končana in Samo bi imel 12 pomaranč, Janina pa 8. Zmagala je Janina in oba imata 10 pomaranč. Če bi v 5. setu zmagala Janina, je igra končana in Janina bi imela 11 pomaranč, Samo pa 9. Torej je zmagal Samo, ki ima zato 11 pomaranč, Janina pa 9. Če bi v 6. (zadnjem) setu zmagal Samo, bi imel 12 pomaranč, Janina pa 8. Torej je zmagala Janina in oba imata po 10 pomaranč. Povzetek igre: Samo (1. set), Janina (2. set), Samo (3. set), Janina (4. set), Samo (5. set) in Janina (6. set). Podobno utemeljimo še drugo igro, ki ustreza zahtevam naloge: Janina (1. set), Samo (2. set), Janina (3. set), Samo (4. set), Janina (5. set) in Samo (6. set).

Zapisani vsi različni poteki iger. .... 2 točki
Odgovor, da je število vseh različnih iger enako 12. .... 1 točka
Odgovor, da je Janina zmagala šestkrat. .... 1 točka
Opis igre, ki se konča z drugo zaporedno zmago Sama v šestem setu. ..... 2 točki
Opisa obeh iger, ki se končata tako, da imata oba enako število pomaranč. 2 točki
(samo ena igra .... 1 točka)
Utemeljitev ene izmed obeh iger, ki ustrezata zahtevam naloge. .... 2 točki

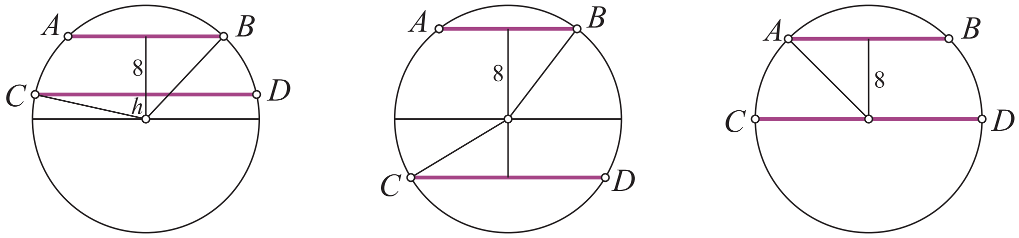
2. Narišimo skico.



Trikotnika AED in BFA sta skladna, torej sta tudi kota $\sphericalangle DEA$ in $\sphericalangle AFB$ skladna. Trikotnika AEP in AFB sta podobna, ker se ujemata v dveh kotih: skupen kot $\sphericalangle BAF$ ter skladna kota $\sphericalangle PEA$ in $\sphericalangle AFB$. S Pitagorovim izrekom izračunamo dolžino daljice AF: $|AF|^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2 = \frac{5a^2}{4}$ oziroma $|AF| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Zapišemo razmerje enakoležnih stranic v obeh podobnih trikotnikih $|AE| : |AF| = |AP| : |AB|$. Upoštevamo dolžine daljic in dobimo $\frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = |AP| : a$. Iz razmerja izrazimo $|AP| = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. Izračunamo še dolžino $|PF| = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$. Iskano razmerje je enako $|AP| : |PF| = 2 : 3$.

Ugotovitev, da sta kota $\sphericalangle DEA$ in $\sphericalangle AFB$ skladna. .... 1 točka
Sklep, da sta trikotnika AEP in AFB podobna. .... 2 točki
Izračunana dolžina daljice $|AF|$. .... 1 točka
Zapisano razmerje enakoležnih stranic $|AE| : |AF| = |AP| : |AB|$. .... 1 točka
Zapisano razmerje $\frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = |AP| : a$. .... 1 točka
Izračunana dolžina daljice $|AP|$. .... 1 točka
Izračunana dolžina daljice $|PF|$. .... 2 točki
Zapisano razmerje $|AP| : |PF| = 2 : 3$. .... 1 točka

3. Ločimo tri možnosti: obe tetivi sta v istem polkrogu ali pa je vsaka v svojem ali pa je tetiva CD premer krožnice.



Označimo s h oddaljenost središča krožnice od tetive CD. V prvem primeru, ko sta obe tetivi v istem polkrogu, je tetiva AB od središča oddaljena $8+h$. Polmer krožnice izrazimo s pomočjo Pitagorovega izreka $r^2 = 9^2 + h^2$, če upoštevamo tetivo CD. Upoštevajoč tetivo AB velja $r^2 = 7^2 + (8+h)^2$. Izenačimo obe enačbi in dobimo: $81 + h^2 = 49+64+16h+h^2$. Dobljeno enačbo preoblikujemo v $16h = -32$ z rešitvijo $h = -2$. Rešitev odpade, saj je razdalja nenegativno število. V drugem primeru je vsaka tetiva v svojem polkrogu. Tetiva AB je od središča krožnice oddaljena $8 - h$. Podobno kot v zgornjem primeru s pomočjo Pitagorovega izreka izračunamo r ter izenačimo obe enačbi. Dobimo enačbo $81 + h^2 = 49 + 64 - 16h + h^2$ z rešitvijo $h = 2$. Torej je polmer krožnice enak $r = \sqrt{85}$ cm. Če je tetiva CD premer, je polmer krožnice enak 9 cm. Ta možnost odpade, saj ne velja enakost $9^2 = 7^2 + 8^2$.

Izražen polmer krožnice s pomočjo dolžine tetive CD. .... 1 točka
Izražen polmer krožnice s pomočjo dolžine tetive AB v istem polkrogu. ... 1 točka
Zapisana enačba $81 + h^2 = 49 + 64 + 16h + h^2$. .... 1 točka
Ugotovitev, da je rešitev enačbe $h = -2$, ki seveda odpade. .... 1 točka
Izražen polmer krožnice s pomočjo dolžine tetive AB v drugem polkrogu. 1 točka
Zapisana enačba $81 + h^2 = 49 + 64 - 16h + h^2$. .... 1 točka
Izračunan rešitev enačbe $h = 2$. .... 1 točka
Izračunan polmer krožnice $r = \sqrt{85}$ cm. .... 2 točki
Izločitev možnosti, da je tetiva CD premer. .... 1 točka

4. Večkotnik z manj oglišči ima tudi manj diagonal. Označimo z n število oglišč večkotnika z manj diagonalami. Število diagonal v tem večkotniku je enako $\frac{n(n-3)}{2}$. Razberemo, da ima drugi večkotnik $n+6$ oglišč, torej ima $\frac{(n+6)(n+6-3)}{2} = \frac{(n+6)(n+3)}{2}$ diagonal. Zapišemo razliko diagonal večkotnikov: $\frac{(n+6)(n+3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 63$. Odpravimo oklepaje ter ulomka in dobimo: $n^2 + 3n + 6n + 18 - n^2 + 3n = 126$ oziroma $12n + 18 = 126$. Rešitev enačbe je $n = 9$ torej gre za 9-kotnik in 15-kotnik.

Sklep o številu diagonal. .... 1 točka
Zapisani števili oglišč obeh večkotnikov: n in $n+6$. .... 1 točka
Zapisani števili diagonal obeh večkotnikov. .... 2 točki
Zapisana enačba, ki pripada razliki diagonal. .... 2 točki
Zapis enakovredne enačbe. .... 2 točki
Rešitev enačbe: $n = 9$. .... 1 točka
Odgovor, da gre za 9-kotnik in 15-kotnik. .... 1 točka

Opomba: Če je tekmovalec reševal nalogo s poskušanjem, prejme največ 6 točk.

5. 12 jabolk v Danovi košari na koncu predstavlja $\frac{3}{4}$ vseh, preden jih je $\frac{1}{4}$ dal v Žanovo košaro. Torej je dal Žanu 4 jabolka. Ostalih 8 jabolk v Žanovi košari na koncu predstavlja polovico vseh, ki jih je imel na začetku. Kar pomeni, da je imel Žan na začetku 16 jabolk ter jih je 8 dal v Lanovo košaro. Tudi Lan je imel na koncu 12 jabolk, kar predstavlja $\frac{2}{3}$ vseh, preden jih je $\frac{1}{3}$ dal v Danovo košaro. Torej je Danu dal 6 jabolk, kar pomeni, da je imel Dan na začetku $12+4-6=10$ jabolk. Lan pa je imel $12+6-8=10$ jabolk.

Ugotovitev: Dan je dal v Žanovo košaro 4 jabolka. .... 2 točki
Sklep, da je imel Žan na začetku 16 jabolk. .... 2 točki
Ugotovitev: Lan je dal v Danovo košaro 6 jabolk. .... 2 točki
Sklep, da je imel Dan na začetku $12+4-6=10$ jabolk. .... 2 točki
Sklep, da je imel Lan na začetku $12+6-8=10$ jabolk. .... 2 točki

Opomba: Če tekmovalec rešitev ugane in preveri, prejme največ 2 točki.