**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

57. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje
Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 5. razred

Čas reševanja: **90 minut**. *V sklopu A bomo pravilen odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilnega pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2

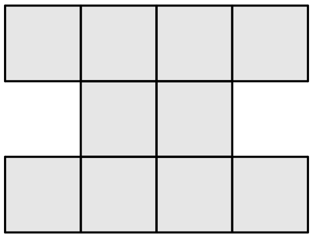
1. Polovica števila znamk v zbirki je za 10 večja od četrtine števila znamk v zbirki. Koliko je vseh znamk v zbirki?

(**A**) 32 (**B**) 36 (**C**) 40 (**D**) 48 (**E**) 60

2. Luka je ob prihodu iz šole odčital uro 12.21. V posteljo se je odpravil ob 21.12 in takoj zaspal. Spal je toliko časa, kolikor ga je preteklo med prihodom iz šole in odpravljanjem v posteljo. Ob kateri uri se je zbudil?

(**A**) 6.33 (**B**) 7.07 (**C**) 6.03 (**D**) 6.06 (**E**) 7.03

3. Obseg lika na sliki, ki je sestavljen iz skladnih kvadratov, je 54 cm. Koliko je ploščina lika na sliki?

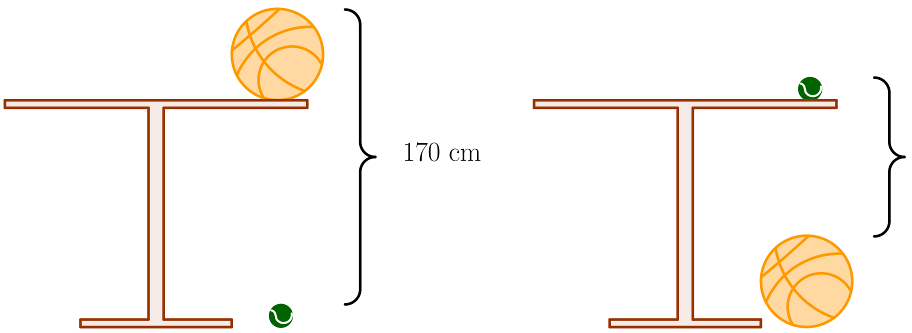


(**A**) $10\ \mathrm{cm}^2$ (**B**) $12\ \mathrm{cm}^2$ (**C**) $20\ \mathrm{cm}^2$ (**D**) $72\ \mathrm{cm}^2$ (**E**) $90\ \mathrm{cm}^2$

4. Jaka ima na listu papirja narisane štiri vzporedne premice. Sam nariše na list še štiri premice tako, da vsaka preseka čim več do tedaj narisanih premic. Največ koliko presečišč lahko s tem dobi?

(**A**) 16 (**B**) 18 (**C**) 22 (**D**) 30 (**E**) 60

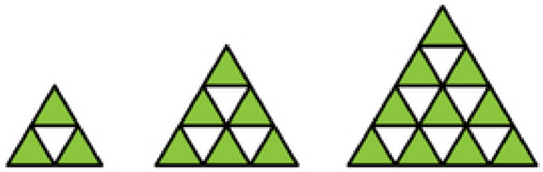
5. Na sliki sta enako visoki mizi, enako veliki žogi za košarko in enako veliki žogi za tenis.



Kako visoka je miza?

(**A**) 130 cm (**B**) 148 cm (**C**) 150 cm (**D**) 164 cm (**E**) 170 cm

6. Narisani so prvi trije trikotniki v zaporedju, vsak je sestavljen iz manjših belih in zelenih trikotnikov. Zaporedje se po istem pravilu nadaljuje naprej. Koliko manjših zelenih trikotnikov je v trikotniku na 10. mestu tega zaporedja?



(**A**) 30 (**B**) 55 (**C**) 66 (**D**) 90 (**E**) 121

7. Na pašniku se pasejo krave, ovce in koze. Če ne štejemo krav, je na pašniku 12 živali. Če ne štejemo ovc, je na pašniku 22 živali. Če ne štejemo koz, je na pašniku 26 živali. Koliko živali se pase na pašniku?

(**A**) 16 (**B**) 30 (**C**) 34 (**D**) 48 (**E**) 60

8. V maju so bili datumi treh četrtkov soda števila. Kateri dan v tednu je bil 29. maj?

(**A**) ponedeljek (**B**) torek (**C**) sreda (**D**) sobota
(**E**) ni mogoče določiti

B1. Izračunaj vrednost izraza:

$$1813 : 37 \cdot 3 + (5 + 5 \cdot 2) \cdot 2^3 - 250 : 5 : 5$$

B2. Gasilsko društvo zbira denar za nakup nove zaščitne opreme. Najprej prebivalci vsake hiše v vasi prispevajo toliko evrov, kolikor je hiš v vasi. Predsednik društva primakne 10 EUR. Ko zavarovalnica prispeva svoj delež, imajo zbranega petkrat toliko denarja, kolikor so ga imeli do tedaj. Mesarstvo Pujsek na koncu na račun društva nakaže 150 EUR in tako imajo zahtevanih 2200 EUR za nakup opreme. Koliko je prispevala zavarovalnica in koliko prebivalci vsake hiše v vasi?

dMFA

57. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 6. razred

Čas reševanja: **90 minut**. *V sklopu A bomo pravilen odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilnega pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2

1. S katerim od naštetih števil je deljivo število 20200202?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 9 (**E**) 11

2. Naslednik katerega števila je z rimskimi števili zapisana razlika MCMXL $-$ MCDXCIX ?

(**A**) CDLX (**B**) DCXL (**C**) DCIL (**D**) 640 (**E**) CDXL

3. Dne $18.\,4.\,2021$ je sonce vzšlo ob 6.08 in bo zašlo ob 19.53. Za koliko je bil dan $18.\,2.\,2021$ krajši, če veš, da je tega dne sonce vzšlo ob 6.59 in zašlo ob 17.31?

(**A**) 3 h 13 min (**B**) $2{,}73$ h (**C**) 551 min (**D**) $3{,}1$ h (**E**) 3 h 45 min

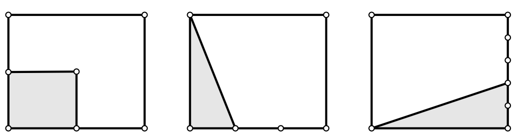
4. V knjigarno pride pošiljka 60 knjig. Med njimi so knjige za odrasle in za otroke. Nekatere imajo trde, druge pa mehke platnice. 22 knjig za odrasle ima trde platnice. Otroških knjig je skupaj 25. Knjig z mehkimi platnicami pa je skupaj 20. Koliko otroških knjig ima mehke platnice?

(**A**) 2 (**B**) 7 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 17

5. Daljica je razdeljena na 4 dele tako, da je dolžina drugega dela dvakratnik dolžine prvega, dolžina tretjega trikratnik dolžine prvega in dolžina četrtega dvakratnik dolžine drugega. Razdalja med središčem prvega in drugega dela je 3 cm. Kolikšna je dolžina celotne daljice?

(**A**) 10 cm (**B**) 12 cm (**C**) 16 cm (**D**) 20 cm (**E**) 24 cm

6. Anže, Bor in Cene od enakih pravokotnikov odrežejo vsak en pobarvan lik, kot kaže slika. Anže odreže pravokotnik, pred tem pa razdeli stranici prvotnega pravokotnika na pol. Bor odreže trikotnik in pred tem dolžino pravokotnika razdeli na 3 enake dele. Tudi Cene odreže trikotnik, s tem da višino razdeli na 5 enakih delov. Komu ostane del z največjo ploščino?



(**A**) Anžetu. (**B**) Boru.

(**C**) Cenetu. (**D**) Vsem trem ostane enako.

(**E**) Odvisno je od dolžin stranic pravokotnika.

7. Kolikšen kot oklepata urni in minutni kazalec, ko je ura 9.40 (določi manjšega izmed kotov)?

(**A**) $30°$ (**B**) $50°$ (**C**) $40°$ (**D**) $240°$ (**E**) $120°$

8. Kekec je našel obroč. Sedaj bi rad več o svoji najdbi povedal Mojci. Ugotovil je, da se obroč na $13{,}5$ m dolgi poti zavrti 15-krat. Kako dolgo pot bo naredil obroč, ko se bo zavrtel 40-krat?

(**A**) 9 m (**B**) 25 m (**C**) 36 m (**D**) 40 m (**E**) 42 m

B1. Pek Mišmaš postavi na tehtnico $1{,}8$ dag moke, doda $0{,}342$ kg sladkorja in 100 g masla. V škatli ima $0{,}1$ kg kakava. Polovico kakava iz škatle strese na tehtnico. Na koncu nasuje še 3050 čokoladnih mrvic, od katerih vsaka tehta $0{,}2$ g. Koliko dag pokaže tehtnica?

B2. Število je sestavljeno iz nizov števil 134. Število, sestavljeno iz treh nizov, je tako enako 134134134.

- Koliko nizov vsebuje najmanjše tako število, deljivo z 9? Utemelji.
- Najmanj koliko nizov bi morali dodati številu, sestavljenemu iz 2021 nizov, da bo nastalo število, deljivo z 9? Utemelji.
- Poišči 117. števko tako sestavljenega števila.

57. tekmovanje iz matematike
za Vegovo priznanje
Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 7. razred

Čas reševanja: **120 minut**. *V sklopu A bomo pravilen odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilnega pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10

B1	B2

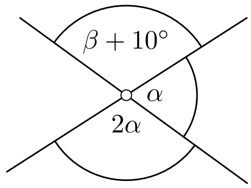
1. Kekec je našel obroč. Sedaj bi rad več o svoji najdbi povedal Mojci. Ugotovil je, da se obroč na $13\frac{1}{2}$ m dolgi poti zavrti 15-krat. Kako dolgo pot bo naredil obroč, ko se bo zavrtel 40-krat?

(**A**) 9 m (**B**) 25 m (**C**) 36 m (**D**) 40 m (**E**) 42 m

2. Miha je pojedel $\frac{1}{3}$ čokolade, Tina polovico ostanka in nato je Tomi pojedel še $\frac{2}{5}$ preostanka. Koliko odstotkov čokolade je ostalo?

(**A**) 20 % (**B**) 50 % (**C**) 60 % (**D**) 80 % (**E**) 21 %

3. Koliko je vsota kotov α in β z narisane slike?



(**A**) $90°$ (**B**) $130°$ (**C**) $170°$ (**D**) $180°$ (**E**) $240°$

4. Anže, Aljaž in Andrej se trikrat odpravijo na ribolov. Anže vedno ujame pol manj rib kot Aljaž, Andrej pa vedno ujame 3 ribe več kot Anže. Na prvem ribolovu je Anže ujel 13 rib, na drugem ribolovu je Aljaž ujel 16 rib, na tretjem ribolovu je Andrej ujel 21 rib. Koliko rib je na vseh treh ribolovih skupaj ujel Anže?

(**A**) 18 (**B**) 36 (**C**) 39 (**D**) 48 (**E**) 50

5. Ploščini pravokotnika in kvadrata sta enaki. Dolžina pravokotnika je 4-krat tolikšna kot dolžina kvadrata. Kolikšen del obsega kvadrata predstavlja obseg pravokotnika?

(**A**) $\frac{17}{8}$ (**B**) $\frac{16}{7}$ (**C**) $\frac{1}{2}$ (**D**) 2 (**E**) $\frac{7}{16}$

6. Koliko 7-mestnih števil, deljivih s 6, lahko sestavimo s števkama 0 in 1?

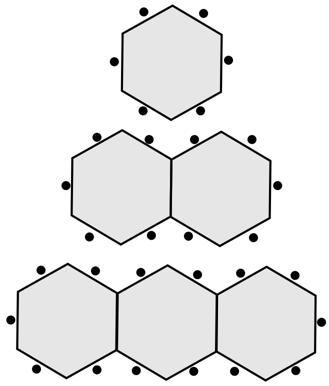
(**A**) 10 (**B**) 11 (**C**) 16 (**D**) 21 (**E**) 33

7. Katero število x reši enačbo?

$$\frac{3}{41} \cdot \left(4 - \frac{2}{7} : x\right) + 2\frac{2}{5} = 2\frac{24}{35}$$

(**A**) $\frac{1}{7}$ (**B**) 1 (**C**) 3 (**D**) 7 (**E**) 2021

8. V prostoru v obliki trikotnika postavljamo omizja iz šestkotnih miz, kot kaže slika. Vsako omizje ima eno mizo več od predhodnega. Sedišča so označena s pikami. Najmanj koliko miz moramo postaviti za 126 gostov?



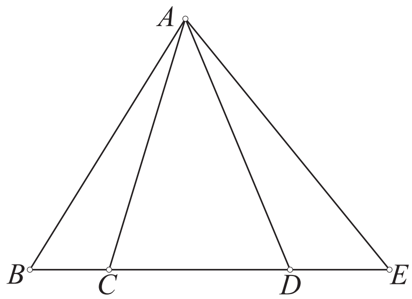
(**A**) 30 (**B**) 29 (**C**) 28 (**D**) 26 (**E**) 23

9. Prvi teden v mesecu v šoli manjka 10 % učencev. Drugi teden se vrne v šolo 10 % manjkajočih iz prvega tedna, doma pa ostane 10 % učencev, ki so prvi teden bili v šoli. Kolikšen odstotek vseh učencev je drugi teden prisotnih v šoli?

(**A**) 18 % (**B**) 80 % (**C**) 82 % (**D**) 91 % (**E**) 100 %

10. Obseg trikotnika ABC je 24 cm. Obseg trikotnika ACD je 32 cm in obseg trikotnika ADE je 35 cm. Kolikšen je obseg trikotnika ABE, če je stranica AC dolga 10 cm, stranica AD pa 14 cm?

(**A**) 41 cm (**B**) 42 cm (**C**) 43 cm (**D**) 44 cm (**E**) 45 cm



B1. Premici t in u se sekata v točki P pod kotom $20°20'$. Na premici t izberi točko R, različno od točke P. Prezrcali točko R čez premico u in jo označi z R'. Točko R' prezrcali čez točko P in dobljeno točko označi z R''. Izračunaj velikosti notranjih kotov trikotnika $RR'R''$.

B2. Miha se je od doma odpravil k babici. Ko je prehodil $\frac{2}{5}$ poti, je ugotovil, da je izgubil ključe, zato se je odpravil nazaj proti domu. Ko je v smeri proti domu prehodil $1{,}4$ km, je ključe našel. Če bi se tedaj odpravil v smeri babice, bi moral prehoditi 800 m več kot tri četrtine poti od doma do babice. Izračunaj, koliko je dolga pot od Mihovega doma do babice.

57. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Prilepi nalepko s šifro

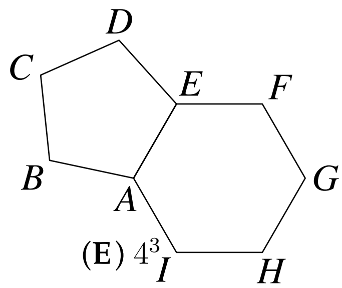
Naloge za 8. razred

Čas reševanja: **120 minut**. *V sklopu A bomo pravilen odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilnega pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

1. Lik $ABCDE$ je pravilen petkotnik. Lik $AEFGHI$ je pravilen šestkotnik. Kolikšna je velikost kota CEI?



(**A**) $102°$ (**B**) $108°$ (**C**) $112°$ (**D**) $120°$ (**E**) $126°$

2. Kolikšna je vrednost izraza $\sqrt{\sqrt{4^2+4^4+4^5}}$?

(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 36 (**D**) 2^4 (**E**) 4^3

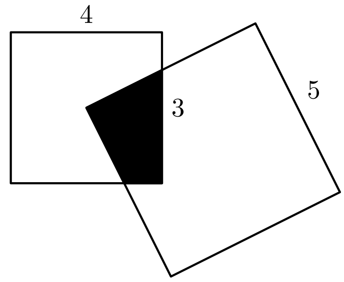
3. Kolikšna je vrednost izraza $\frac{4^{2021}-4^{2020}}{2^{2021}+2^{2020}}$?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 2^{2020} (**E**) 4^{2020}

4. V množici realnih števil je definirana operacija $x \oplus y = x+y+1$. Kateri izraz je enak $(x \oplus 1) \oplus y$?

(**A**) $x+y$ (**B**) $x+y+1$ (**C**) $x+y+2$ (**D**) $x+y+3$ (**E**) $x+y+4$

5. Kvadrata, katerih stranici sta dolgi 4 cm in 5 cm, se prekrivata tako, da je eno oglišče večjega kvadrata v težišču manjšega kvadrata. Kolikšna je ploščina osenčenega štirikotnika, če je njegova najdaljša stranica dolga 3 cm?



(**A**) $3{,}6$ cm^2 (**B**) 4 cm^2 (**C**) $4{,}2$ cm^2 (**D**) $6{,}25$ cm^2 (**E**) 12 cm^2

6. Za kateri x ulomek $\frac{5}{5x^3-5^{-2}}$ nima pomena?

(**A**) 5 (**B**) $-\frac{1}{5}$ (**C**) 0 (**D**) $\frac{1}{5}$ (**E**) -5

7. Bazen s prostornino 400 m^3 napolnijo 4 enake cevi v petnajstih urah. Prazen bazen so začeli polniti ob 4.00, po treh urah so eno cev zaprli. Kdaj bo bazen poln?

(**A**) Ob 18.45. (**B**) Ob 19.00. (**C**) Ob 20.00. (**D**) Ob 22.00. (**E**) Ob 23.00.

8. Števec drugega ulomka je za 2 % večji od števca prvega ulomka. Imenovalec drugega ulomka je za 40 % manjši od imenovalca prvega ulomka. Za koliko odstotkov je drugi ulomek večji od prvega, če oba predstavljata pozitivni števili?

(**A**) 100 % (**B**) 80 % (**C**) 70 % (**D**) 42 % (**E**) 20 %

B1. Izračunaj vrednost številskega izraza.

$$\frac{14}{\sqrt{3}-3\sqrt{5}}+\frac{28}{\sqrt{3}+3\sqrt{5}}-\frac{6}{\sqrt{3}}$$

B2. Dora je opazovala nastop 22-članskega moškega pevskega zbora. Opazila je, da je imel vsak izmed pevcev vsaj eno od značilnosti: bil je plešast, nosil je očala ali je imel brado. Pevcev z brado je bilo toliko kot plešastih. Plešastih z očali in brez brade je bilo toliko kot tistih, ki so imeli samo brado. Pet pevcev je bilo plešastih in je imelo brado. Dva pevca sta imela vse tri lastnosti, samo eden pa je imel brado in očala in ni bil plešast. Preštela je tudi še, da je imelo očala dvakrat toliko pevcev, kot je bilo plešastih.

- Koliko plešastih pevcev je nosilo očala?
- Poišči še število pevcev, ki so imeli očala, niso pa imeli brade in niso bili plešasti.

B3. Velikost kota pri vrhu enakokrakega trikotnika ABC je enaka $\frac{4}{7}$ velikosti kota ob osnovnici. Načrtamo simetralo kota CBA tega trikotnika, ki seka stranico AC v točki D. Načrtamo še pravokotnico na simetralo skozi točko D. Pravokotnica seka nosilko osnovnice v točki F. Nariši sliko. Izračunaj velikost kota med simetralo kota BFD in višino na osnovnico trikotnika ABC.

dMFA

57. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 9. razred

Čas reševanja: **120 minut**. *V sklopu A bomo pravilen odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilnega pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

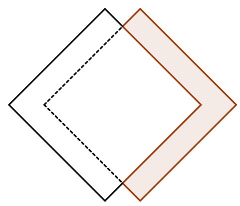
1. Učitelj je na tablo zapisal niz ocen, urejenih po velikosti, pri čemer jih je nekaj izpustil. Zapisal je: $1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, x, x, x, x, y, y, 5, 5$. Kolikšen je modus ocen, če sta x in y različni oceni ter je mediana podatkov enaka modusu, ki je en sam?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** ni mogoče določiti

2. Zlatokop naj bi za 1 leto dela dobil 12 000 EUR in kepo zlata. Delavec je prenehal z delom po 7 mesecih. Dobil je 5 000 EUR in kepo zlata. Kolikšna je vrednost kepe zlata?

(A) 1 200 EUR **(B)** 1 400 EUR **(C)** 2 600 EUR **(D)** 4 800 EUR **(E)** 7 000 EUR

3. Nika je imela 2 enako velika kvadrata, belega in sivega. Beli kvadrat je postavila na sivega, da je nastal simetričen lik. Ploščina sivega dela nastalega lika je 48 cm^2 in predstavlja četrtino ploščine nastalega simetričnega lika. Koliko je dolga stranica belega kvadrata?

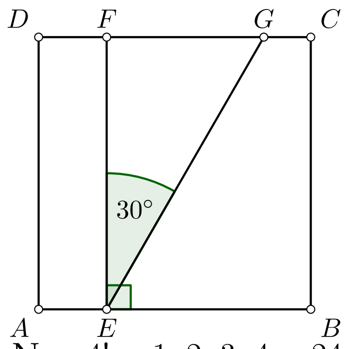


(A) 12 cm **(B)** $6\sqrt{2}$ cm **(C)** 8 cm **(D)** $4\sqrt{6}$ cm **(E)** $4\sqrt{3}$ cm

4. Izmed praštevil, ki so manjša od 15, na slepo izberemo dve in ju zmnožimo. Kolikšna je verjetnost, da je zmnožek teh dveh praštevil sodo število, ki ni deljivo s 3?

(A) $\frac{4}{15}$ **(B)** $\frac{5}{6}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{7}{30}$ **(E)** 0

5. Dan je kvadrat $ABCD$. Na stranici AB je točka E, da velja $|AE| : |EB| = 1 : 3$. Na stranici CD sta točki F in G, kakor je razvidno s slike. Kolikšno je razmerje med dolžinama daljic DF in FG?



(A) $\sqrt{3} : 4$ **(B)** $1 : 1$ **(C)** $1 : 2$ **(D)** $1 : 2\sqrt{2}$ **(E)** $\sqrt{2} : \sqrt{3}$

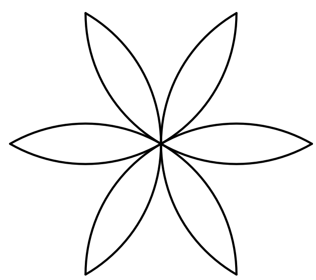
6. Kolikšna je vrednost izraza $a^{2021} + \frac{1}{a^{2021}}$, če je $a^2 + 2a + 1 = 0$?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1 **(E)** 2

7. $n!$ je število, ki predstavlja zmnožek vseh naravnih števil od 1 do n. Npr. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Katera je največja možna vsota števil x in y, da bo vrednost ulomka $\frac{20!}{4^x 9^y}$ naravno število?

(A) 2 **(B)** 8 **(C)** 13 **(D)** 16 **(E)** 24

8. Koliko je vsota obsegov vseh 6 skladnih lističev na sliki, če je vsota ploščin vseh lističev $p = 16(2\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2?



(A) 8π cm **(B)** 16π cm **(C)** 24π cm **(D)** 12π cm **(E)** 15π cm

B1. Izračunaj vrednost izraza:

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}\left(\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}}+2^3\right)+3\left(\sqrt{2^2\cdot 0{,}1^{-2}}-\sqrt{10-10^0}\right)\right)\left(\sqrt[3]{8}\sqrt{36}+2^3\right)+1^0$$

B2. Dolžina stranice AB pravokotnika $ABCD$ je trikrat tolikšna kot dolžina stranice AD. Točka E razpolavlja stranico AD, F pa deli DC v razmerju $|DF| : |FC| = 2 : 1$. Daljici AF in EB se sekata v točki S. Izračunaj dolžini stranic pravokotnika, če je ploščina trikotnika ASE enaka $27\ \mathrm{cm}^2$. Nariši skico.

B3. Za izvedbo poskusa Izločanje molekul DNK potrebujemo 200 g ohlajenega 60-odstotnega etanola. Učiteljica ima na razpolago 70 g destilirane vode ter 96-odstotni in 48-odstotni etanol. Koliko gramov 96-odstotnega etanola in koliko gramov 48-odstotnega etanola bo učiteljica porabila za izvedbo poskusa, če bo porabila vso destilirano vodo?

57. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Rešitve nalog za 5. razred

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
C	C	E	C	C	C	B	C

A1. Polovico sestavljata dve četrtini. To pomeni, da je ena četrtina znamk enaka 10 znamkam. Iz tega sledi, da je vseh znamk 40.

A2. Od takrat, ko je Luka prišel iz šole, do takrat, ko je šel v posteljo, je minilo 8 ur in 51 minut. Če je zaspal ob 21.12 in je spal 8 ur in 51 minut, se je zbudil ob 6.03.

A3. Obseg celotnega lika je sestavljen iz 18 stranic posameznega kvadrata. Če celoten obseg lika, to je 54 cm, delimo z 18, dobimo dolžino stranice enega kvadrata, ki je 3 cm. Ploščina posameznega kvadrata je 9 cm^2. Celoten lik sestavlja 10 kvadratov, zato je njegova ploščina 90 cm^2.

A4. Prvo premico Jaka nariše tako, da ni vzporedna danim premicam in dobi 4 presečišča. Drugo premico nariše tako, da ni vzporedna nobeni premici in ne gre skozi nobeno že narisano presečišče. Dobi novih 5 presečišč. Po enakem postopku nariše tretjo premico in pridobi 6 presečišč ter četrto premico, ki mu da novih 7 presečišč. Vseh presečišč skupaj je 22.

A5. Če postavimo eno mizo na drugo, ugotovimo, da je višina obeh miz skupaj $170 + 130 = 300$ cm. Torej je višina ene mize enaka 150 cm.

A6. V prvem trikotniku v zaporedju so $1 + 2 = 3$ zeleni kvadratki. V drugem trikotniku je $1+2+3 = 6$ zelenih kvadratkov. V tretjem trikotniku je $1+2+3+4 = 10$ zelenih kvadratkov. Sklepamo, da je v desetem trikotniku $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66$ zelenih kvadratkov.

A7. Če ne štejemo krav, je na pašniku 12 živali, kar pomeni, da je na pašniku skupaj 12 ovc in koz. Podobno velja, da je na pašniku skupaj 22 krav in koz ter 26 krav in ovc. Če vse skupaj seštejemo, dobimo $12 + 22 + 26 = 60$ živali, pri čemer smo vsako žival šteli dvakrat. Zato je skupno število živali na pašniku $60 : 2 = 30$.

A8. Preverimo posamezne možnosti. Recimo, da se je mesec maj začel s četrtkom. Tedaj so četrtki $1.$, $8.$, $15.$, $22.$ in $29.$ maj, od tega sta le dva datuma soda. Naslednja možnost so četrtki $2.$, $9.$, $16.$, $23.$ in $30.$ maj. V tem primeru so trije datumi sodi. Tretja možnost so četrtki $3.$, $10.$, $17.$, $24.$ in $31.$ maj, pri čemer sta le dva datuma soda. Pri vseh ostalih možnostih dobimo le štiri četrtke v mesecu, torej dva soda in dva liha. Edina izmed naštetih je druga možnost. Če je $30.$ maj četrtek, je $29.$ maj sreda.

B1.

$$
\begin{gathered}
1813 : 37 \cdot 3 + (5 + 5 \cdot 2) \cdot 2^3 - 250 : 5 : 5 = \\
= 49 \cdot 3 + (5 + 10) \cdot 8 - 50 : 5 = \\
= 147 + 15 \cdot 8 - 10 = \\
= 147 + 120 - 10 =
\end{gathered}
$$

$$= 257$$

Izračunan prvi člen: $1813 : 37 \cdot 3 = 147$. .... 1 točka
Izračunana vrednost izraza v oklepaju: $5 + 5 \cdot 2 = 15$. .... 1 točka
Vrednost potence: $2^3 = 8$. .... 1 točka
Izračunan tretji člen: $250 : 5 : 5 = 10$. .... 1 točka
Izračunana skupna vrednost drugega člena: 120. .... 1 točka
Rezultat. .... 1 točka

B2. Od zbranega zneska 2200 EUR odštejemo prispevek mesarstva 150 EUR, dobimo 2050. Vaščani in predsednik društva so zbrali petino tega zneska, torej $2050 : 5 = 410$ EUR. Ostalo je prispevala zavarovalnica: $2050–410 = 1640$ EUR. Ker je predsednik društva daroval 10 EUR, so vaščani zbrali skupaj 400 EUR, kar je 20 prispevkov po 20 EUR.

Izračunan znesek brez nakazila mesarstva. .... 1 točka
Ugotovitev, da so vaščani in predsednik zbrali petino, zavarovalnica pa štiri petine. ... 1 točka
Izračunan znesek pred prispevkom zavarovalnice. .... 1 točka
Izračunan prispevek zavarovalnice. .... 1 točka
Izračunan le prispevek vaščanov. .... 1 točka
Izračunan prispevek posamezne hiše. .... 1 točka

57. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Rešitve nalog za 6. razred

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
E	E	A	B	D	B	B	C

A1. Število 20200202 ni deljivo s 5, saj zadnja števka ni 0 ali 5. Ni deljivo niti s 3 niti z 9, saj je vsota števk 8. Dano število ni deljivo niti s 4, saj njegov dvomestni konec ni deljiv s 4. Torej je deljivo z 11.

A2. Če razliko MCMXL − MCDXCIX zapišemo z desetiškimi številkami, dobimo $1940-1499 = 441$, ki je naslednik števila 440, ki ga z rimsko številko zapišemo CDXL.

A3. Sonce je vzšlo 51 min kasneje in zašlo 2 h in 22 min prej. Torej je dan krajši za 2 h 73 min, kar je 3 h 13 min.

A4. Med 60 knjigami je 25 otroških in 35 knjig za odrasle. Med 35 knjigami za odrasle je 22 takih, ki imajo trde platnice, in 13 knjig z mehkimi platnicami. Ker je vseh knjig z mehkimi platnicami 20 in od tega 13 za odrasle, je torej 7 knjig z mehkimi platnicami za otroke.

A5. Označimo z a dolžino prvega dela. Tedaj je drugi del dolg $2\cdot a$, tretji $3\cdot a$ in četrti $2\cdot 2\cdot a = 4\cdot a$. Skupna dolžina daljice je $10 \cdot a$. Razdalja med središčem prvega in središčem drugega dela je $1{,}5 \cdot a = 3$ cm. Sledi $a = 2$ cm in zato je dolžina daljice 20 cm.

A6. Anže je odrezal četrtino, Bor šestino, Cene pa petino pravokotnika. Bor je odrezal najmanj, zato mu ostane največji del.

A7. Urni kazalec opiše v 1 uri kot $360° : 12 = 30°$. Ker je 40 minut enako $\frac{2}{3}$ ure, pomeni, da urni kazalec v 40 minutah opiše kot $\frac{2}{3}$ od $30° = 20°$. Ob 9.40 kaže minutni kazalec proti številu 8, urni pa v smer, ki s smerjo, ki kaže proti številu 9, oklepa kot $20°$. Smeri, ki kažeta proti številoma 8 in 9, oklepata kot $30°$, zato kazalca oklepata kot $30° + 20° = 50°$.

A8. Ko se obroč zavrti enkrat, naredi $13{,}5 : 15 = 0{,}9$ m dolgo pot. Če se bo zavrtel 40-krat, pa bo naredil $40 \cdot 0{,}9 = 36$ m dolgo pot.

B1.

$$
\begin{aligned}
1{,}8\ \text{dag} + 0{,}342\ \text{kg} + 100\ \text{g} + \frac{1}{2}\ \text{od}\ 0{,}1\ \text{kg} + 3050 \cdot 0{,}2\ \text{g} &= \\
= 18\ \text{g} + 342\ \text{g} + 100\ \text{g} + \frac{1}{2}\ \text{od}\ 100\ \text{g} + 610\ \text{g} &= \\
= 18\ \text{g} + 342\ \text{g} + 100\ \text{g} + 50\ \text{g} + 610\ \text{g} &= \\
= 1120\ \text{g} &= \\
= 112\ \text{dag}
\end{aligned}
$$

Pretvarjanje iz dekagramov v grame: 18 g. .... 1 točka
Pretvarjanje iz kilogramov v grame: 342 g. .... 1 točka

Izračunana masa stresenega kakava na tehtnico: $\frac{1}{2}$ od $0{,}1$ kg $= 50$ g. .... 1 točka
Izračunana masa čokoladnih mrvic: $3050 \cdot 0{,}2$ g $= 610$ g. .... 1 točka
Izračunana vsota mas vseh sestavin: 1120 g. .... 1 točka
Rezultat: 112 dag. .... 1 točka

B2.

- Število je deljivo s številom 9, če je vsota njegovih števk deljiva z 9. Vsota števk enega niza je $1+3+4=8$. Najmanjši večkratnik števila 8, ki je deljiv z 9 je 72. Torej je najmanjše število, ki ga iščemo, sestavljeno iz 9 nizov.
- Število 2021 ni deljivo z 9, saj je vsota števk enaka 5. Iščemo prvo večje število, ki je deljivo z 9. To je 2025. Dodati moramo 4 nize.
- Niz je sestavljen iz treh števk. Ker je število 117 deljivo s 3, je na 117. mestu ravno zadnja števka iz niza, torej 4.

Odgovor: Število vsebuje 9 nizov. 1očka
Utemeljitev. .... 1 točka
Odgovor: Dodati moramo 4 nize. .... 1 točka
Utemeljitev. .... 1 točka
Odgovor: 117. števka je 4. .... 1 točka
Utemeljitev . ... 1 točka

57. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Rešitve nalog za 7. razred

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
C	A	C	C	A	B	C	C	C	C

A1. Ko se obroč zavrti enkrat, naredi $13\frac{1}{2} : 15 = \frac{9}{10}$ m dolgo pot. Če se bo zavrtel 40-krat, pa bo naredil $40 \cdot \frac{9}{10} = 36$ m dolgo pot.

A2. Ko je Miha pojedel $\frac{1}{3}$ čokolade, sta ostali $\frac{2}{3}$ čokolade. Tina je pojedla polovico ostanka, kar pomeni, da je ostala $\frac{1}{2}$ od $\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ čokolade. Tomi je pojedel še $\frac{2}{5}$ ostanka čokolade, kar pomeni, da so ostale $\frac{3}{5}$ od $\frac{1}{3}$ čokolade, kar je $\frac{1}{5}$ čokolade oziroma 20 %.

A3. Kota α in $2 \cdot \alpha$ sta skupaj velika $180°$, kar pomeni, da je kot $\alpha = 60°$. Tudi kota α in $\beta + 10°$ sta skupaj velika $180°$. Ker je $\alpha = 60°$, je $\beta + 10° = 2 \cdot \alpha = 120°$, oziroma $\beta = 110°$. Sledi $\alpha + \beta = 60° + 110° = 170°$.

A4. Na prvem ribolovu je Anže ujel 13 rib. Na drugem ribolovu je Aljaž ujel 16 rib, torej jih je Anže 8, saj jih ujame pol manj. Na tretjem ribolovu je Andrej ujel 21 rib, Andrej pa 18, saj ujame 3 manj kot Andrej. Anže je skupaj ujel $13 + 8 + 18 = 39$ rib.

A5. Ker imata kvadrat in pravokotnik enaki ploščini in je dolžina pravokotnika 4-krat tolikšna kot dolžina kvadrata, je širina pravokotnika enaka četrtini dolžine kvadrata. Če dolžino kvadrata označimo z a, je obseg kvadrata $4 \cdot a$. Obseg pravokotnika je tedaj $2 \cdot 4 \cdot a + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot a = \frac{17}{2} \cdot a$. Obseg pravokotnika predstavlja $\frac{17}{2} : 4 = \frac{17}{8}$ obsega kvadrata.

A6. Če je število deljivo s 6, mora biti hkrati deljivo z 2 in s 3. Da je število deljivo z 2, mora biti števka na mestu enic soda. V danem primeru je lahko samo 0. Da bo število deljivo s 3, mora biti vsota števk deljiva s 3. To v danem primeru pomeni, da 1 nastopi v zapisu števila 3-krat ali 6-krat. Število se začne s števko 1. Možnosti so: 1000110, 1001010, 1001100, 1010010, 1010100, 1011000, 1100010, 1100100, 1101000, 1110000, 1111110, torej je 11 takih števil.

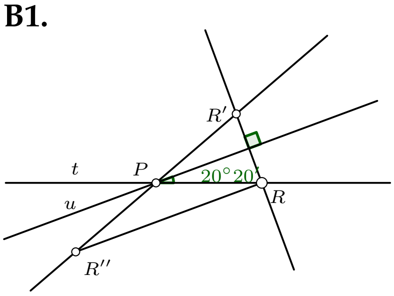
A7. Enačbo rešimo z več premisleki. Prvi seštevanec $\frac{3}{41} \cdot (4 - \frac{2}{7} : x)$ dobimo, če od vsote $2\frac{24}{35}$ odštejemo drugi seštevanec $2\frac{2}{5}$, zato je $\frac{3}{41} \cdot (4 - \frac{2}{7} : x) = \frac{2}{7}$. Drugi faktor $4 - \frac{2}{7} : x$ dobimo, če zmnožek $\frac{2}{7}$ delimo s prvim faktorjem $\frac{3}{41}$. Torej je $4 - \frac{2}{7} : x = \frac{82}{21}$. Odštevanec $\frac{2}{7} : x$ dobimo, če od zmanjševanca 4 odštejemo razliko $\frac{82}{21}$, zato je $\frac{2}{7} : x = \frac{2}{21}$. Delitelj x dobimo, če deljenec $\frac{2}{7}$ delimo s količnikom $\frac{2}{21}$. Torej je $x = 3$.
Nalogo lahko rešimo tudi tako, da za dane rešitve naredimo preizkuse.

A8. Opazimo, da v novi vrsti, pri novem omizju sedijo 4 ljudje več kot pri predhodnem. Torej je število gostov za omizji: $6, 10, 14, 18, 22, 26, 30\ldots$ Izračunamo, da za 126 ljudi potrebujemo 7 omizij, kar je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ miz.

A9. Prvi teden je bilo v šoli 90 % vseh učencev. Drugi teden se je v šolo vrnilo 10 % od 10 % vseh učencev, kar je $0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01 = 1$ % vseh učencev. Izmed tistih, ki so bili prvi teden v šoli, jih je doma ostalo 10 % od 90 % vseh učencev, kar pomeni, da jih je v šolo prišlo $0{,}9 \cdot 0,9 = 0,81 = 81$ % vseh učencev. Drugi teden je v šoli 1 % vseh učencev, ki so bili bolni prejšnji teden, in 81 % vseh učencev, ki so zdravi že oba tedna, kar je skupaj 82 % vseh učencev.

A10. Če seštejemo vse tri obsege, dobimo obseg trikotnika ABE, povečan za dve dolžini stranice AC in dve dolžini stranice AD. Zato je obseg trikotnika ABE enak $24+32+35-2\cdot 10-2\cdot 14 = 43$ cm.

B1.



Trikotnik $\triangle RR'P$ je enakokrak, premica u pa je simetrala kota ob vrhu. Zato je velikost kota $\angle RPR'$ enaka dvakratniku kota med premicama u in t, torej $40°40'$. Kot $\angle PR'R$ je kot ob osnovnici in je velik $\frac{180°-40°40'}{2} = 69°40'$. Kota $\angle RPR'$ in $\angle R''PR$ sta sokota, zato je velikost kota $\angle R''PR$ enaka $180° - 40°40' = 139°20'$. Trikotnik $\triangle R''RP$ je enakokrak, zato je kot $\angle RR''P$ velik $\frac{180°-139°40'}{2} = 20°20'$. Tretji kot v trikotniku $RR'R''$ meri $\angle R'RR'' = 180° - 69°40' - 20°20' = 90°$.

Pravilno narisana skica. . . . . 1 točka
Ugotovitev, da je trikotnik $\triangle RR'P$ enakokrak in izračunana velikost kota $\angle PR'R$ . . . . . 1 točka
Izračunana velikost kota $\angle R''PR$. . . . . 1 točka
Ugotovitev, da je $\triangle R''PR$ enakokrak. . . . . 1 točka
Izračunana velikost kota $\angle RR''P$. . . . . 1 točka
Izračunana velikost kota $\angle R'RR''$ in zapis rešitve. . . . . 1 točka

Opomba:
Če tekmovalec pride do rezultata z merjenjem, dobi kvečjemu 1 točko.
Rešitev dobljena iz predpostavke, da je kot $\angle R'RR''$ pravi oziroma, da sta premica u in nosilka daljice RR'' vzporedni, ni korektna.

B2.

Rešitev 1:
Po opravljenih $\frac{2}{5}$ poti, ko mu jo ostalo še $\frac{3}{5}$, se Miha vrne za 1400 m nazaj proti domu. Ker mu do babice v tem trenutku preostane 800 m več kot $\frac{3}{4}$ poti, to pomeni, da bi moral po opravljenih 800 m do babice prehoditi še $\frac{3}{4}$ poti. Do točke na $\frac{2}{5}$ poti, kjer se je prvič obrnil, je 600 m. Zato velja enakost: $600\,\text{m} + \frac{3}{5}\,\text{poti} = \frac{3}{4}$ poti. Razširimo ulomka na skupni imenovalec $600\,\text{m} + \frac{12}{20}\,\text{poti} = \frac{15}{20}$ poti. Sklepamo, da velja enakost $600\,\text{m} = \frac{3}{20}$ poti. Celotna pot je dolga 4 km.

Rešitev 2:
Ko je Miha prehodil $\frac{2}{5}$ poti, mu je ostalo $\frac{3}{5}$ poti. Potem se je vrnil, našel ključe in se odpravil v smeri babice ter prehodil 800 m. Zdaj mu je od babice ostalo še $\frac{3}{5}$ poti in $1400\,\text{m}-800\,\text{m} = 600$ m. Hkrati pa je od nje oddaljen $\frac{3}{4}$ poti. To pa pomeni, da je razlika $\frac{3}{4} - \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$ poti enaka 600 m. Torej je celotna pot dolga 4000 m.

Rešitev 1:
Ugotovitev, da je od mesta, kjer najde ključe, do babice $800\,\text{m} + \frac{3}{4}$ poti. . . . . 1 točka
Zapis enakosti enakovredne: $800\,\text{m} + \frac{3}{4}\,\text{poti} = 1400\,\text{m} + \frac{3}{5}$ poti. . . . . 2 točki
Ugotovitev $\frac{3}{4}\,\text{poti} = 600 + \frac{3}{5}$ poti. . . . . 1 točka
Ugotovitev $\frac{3}{20}\,\text{poti} = 600$ m. . . . . 1 točka
Izračunana dolžina poti 4 km. . . . . 1 točka

Rešitev 2:

Izračun preostanka poti. .... 1 točka
Ugotovitev enakosti poti. .... 2 točki
Sklep, da je razlika enaka 600 m. .... 1 točka
Izračun razlike. .... 1 točka
Izračun celotne poti. .... 1 točka

Opombi:

Za rešitev z nekorektnim zapisom tekmovalec dobi največ 5 točk.
Za rešitev pridobljeno z merjenjem brez utemeljitve tekmovalec dobi največ 4 točke.

57. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Rešitve nalog za 8. razred

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
A	B	D	D	B	D	E	C

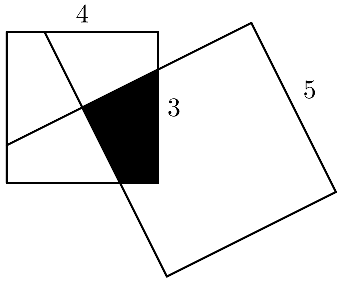
A1. Povežemo točki C in E, da dobimo prvi krak kota ter točki E in I, da dobimo drugi krak kota. Vsak notranji kot pravilnega petkotnika je velik $\frac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$, vsak notranji kot pravilnega šestkotnika pa $\frac{(6-2)\cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ$. V enakokrakem trikotniku CED je kot pri oglišču E velik $\frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$. Kot pri oglišču E v štirikotniku $BAEC$ je velik $108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$. V enakokrakem trikotniku AIE je kot pri oglišču E velik $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. Velikost kota CEI je tedaj $72^\circ + 30^\circ = 102^\circ$.

A2. V izrazu pod korenom lahko izpostavimo skupni faktor : $\sqrt{\sqrt{4^2 + 4^4 + 4^5}} = \sqrt{\sqrt{4^2 \cdot (1 + 4^2 + 4^3)}} =$ $= \sqrt{\sqrt{16 \cdot (1 + 16 + 64)}} = \sqrt{\sqrt{16 \cdot 81}} = \sqrt{4 \cdot 9} = 2 \cdot 3 = 6$.

A3. V števcu in imenovalcu ulomka lahko izpostavimo skupni faktor ter krajšamo ulomek: $\frac{4^{2021} - 4^{2020}}{2^{2021} + 2^{2020}} = \frac{4^{2020} \cdot (4-1)}{2^{2020} \cdot (2+1)} = \frac{4^{2020} \cdot 3}{2^{2020} \cdot 3} = \frac{4^{2020}}{2^{2020}}$. Nato uporabimo pravilo za potenciranje ulomka in dobimo $\frac{4^{2020}}{2^{2020}} = (\frac{4}{2})^{2020} = 2^{2020}$.

A4. Iz zapisa $x \oplus y = x + y + 1$ lahko sklepamo, da operacija $\oplus$ vsoto x in y poveča za 1. Zato sklepamo, da velja $x \oplus 1 = x + 1 + 1 = x + 2$. Tedaj je $(x \oplus 1) \oplus y = (x+2) \oplus y = x + 2 + y + 1 = x + y + 3$.

A5. Poljubni pravokotnici, ki se sekata v težišču kvadrata, razdelita kvadrat na štiri skladne like. Večji kvadrat prekrije četrtino manjšega kvadrata. Ker je ploščina manjšega kvadrata 16 cm^2, je ploščina osenčenega lika 4 cm^2.



A6. Ulomek nima pomena, če je njegov imenovalec enak 0, torej ko je $5x^3 - 5^{-2} = 0$. Enačbo preuredimo $5x^3 = \frac{1}{25}$ in dobimo $x^3 = \frac{1}{125}$. Rešitev te enačbe je $x = \frac{1}{5}$.

A7. Po treh urah je napolnjena ena petina bazena, kar pomeni, da je potrebno napolniti še 320 m^3 vode. Štiri cevi bi to količino polnile 12 ur, ena cev pa bi jo polnila 48 ur. Tri cevi jo polnijo 16 ur. Ker so bazen začeli polniti ob štirih zjutraj, se je napolnil 19 ur kasneje, torej ob 23.00.

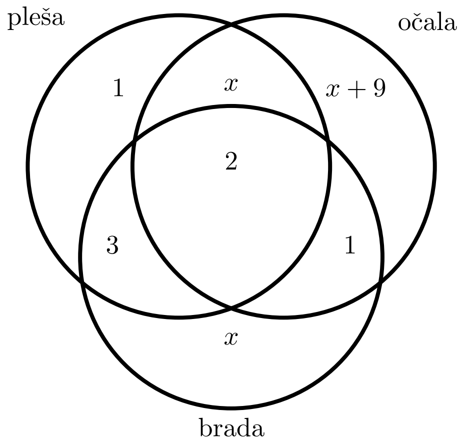
A8. Naj bo $\frac{x}{y}$ prvi ulomek. Tedaj je drugi $\frac{1{,}02x}{0{,}6y} = 1{,}7\frac{x}{y}$, kar pomeni, da je drugi ulomek za 70 % večji od prvega.

B1. Vrednost številskega izraza izračunamo tako, da imenovalce ulomkov racionaliziramo. Pri prvih dveh ulomkih dobimo enaka imenovalca.

$\frac{14}{\sqrt{3}-3\sqrt{5}} = \frac{14\cdot(\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-3\sqrt{5})(\sqrt{3}+3\sqrt{5})} = \frac{14\sqrt{3}+42\sqrt{5}}{3-9\cdot 5} = \frac{14\sqrt{3}+42\sqrt{5}}{-42}$,
$\frac{28}{\sqrt{3}-3\sqrt{5}} = \frac{28\cdot(\sqrt{3}-3\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-3\sqrt{5})(\sqrt{3}+3\sqrt{5})} = \frac{28\sqrt{3}-84\sqrt{5}}{3-9\cdot 5} = \frac{28\sqrt{3}-84\sqrt{5}}{-42}$,
$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.
Ko izraze seštejemo in uredimo, dobimo
$\frac{14\sqrt{3}+42\sqrt{5}+28\sqrt{3}-84\sqrt{5}}{-42} - 2\sqrt{3} = \frac{42\sqrt{3}-42\sqrt{5}}{-42} - 2\sqrt{3} = \frac{42(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{-42} - 2\sqrt{3} = -(\sqrt{3}-\sqrt{5}) - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{3} = -3\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

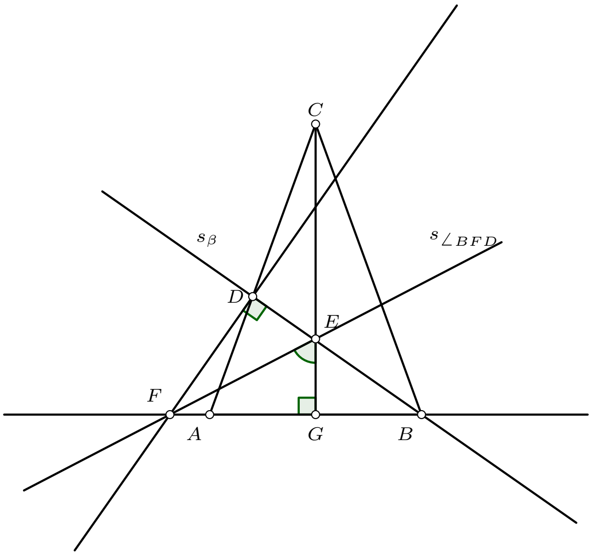
Racionalizacija prvega ulomka $\frac{14}{\sqrt{3}-3\sqrt{5}} = \frac{14\sqrt{3}+42\sqrt{5}}{(\sqrt{3}-3\sqrt{5})(\sqrt{3}+3\sqrt{5})}$. .... 1 točka
Racionalizacija drugega ulomka $\frac{28}{\sqrt{3}+3\sqrt{5}} = \frac{28\sqrt{3}-84\sqrt{5}}{(\sqrt{3}-3\sqrt{5})(\sqrt{3}+3\sqrt{5})}$. .... 1 točka
Racionalizacija tretjega ulomka $\frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. .... 1 točka
Vsota prvih dveh ulomkov: $\frac{42\sqrt{3}-42\sqrt{5}}{-42} = -\sqrt{3}+\sqrt{5}$. .... 2 točki
Vrednost izraza je $-3\sqrt{3}+\sqrt{5}$. .... 1 točka

B2.



Število pevcev z danimi značilnostmi predstavimo s pomočjo Venovega diagrama. V preseku vseh množic sta dva pevca, tako ostanejo trije, ki imajo brado in plešo, ne pa očal. Eden ima brado in očala in ni plešast. Z x označimo število plešastih z očali in brez brade, to število pa se pojavi še med tistimi, ki imajo od značilnosti samo brado. Če hočemo, da bo število bradatih in plešastih pevcev enako, ima eden samo plešo (brez očal in brade). Skupno število vseh plešastih pevcev je $x+6$, torej je takih z očali $2x+12$. Izračunamo še število pevcev z očali, ki nimajo niti brade niti pleše, takih je $x+9$. Vsota vseh števil na diagramu mora biti 22, kar je enako izrazu $3x+16$ in zato vidimo, da je $x=2$. Tako imamo skupaj 4 plešaste pevce z očali in 11 tistih, ki imajo samo očala.

Ugotovitve, da imajo 3 brado in plešo, ne pa očal in 1 samo plešo (lahko je razvidno iz narisanega diagrama). .... 1 točka
Zapis števila vseh plešastih (ali bradatih pevcev), npr. $x+6$. .... 1 točka
Ugotovitev števila pevcev, ki imajo samo očala, npr. $x+9$. .... 1 točka
Izenačitev skupnega števila z 22 in izračun $x=2$. .... 1 točka
Odgovor: V zboru so 4 pevci plešasti z očali. .... 1 točka
Odgovor: Pevcev z očali, ki niso plešasti in nimajo brade je 11. .... 1 točka
Opomba: Rešitev dobljena s poskušanjem se točkuje z največ 4 točkami.
B3.



Vsota kotov v enakokrakem trikotniku $\triangle ABC$ je $\alpha + \alpha + \frac{4}{7}\alpha = 180°$. Torej so velikosti kotov $\alpha = \beta = 70°$ in $\gamma = 40°$. Trikotnik $\triangle FBD$ je pravokoten, zato je velikost kota $\angle BFD = 180° - 90° - \frac{70°}{2} = 55°$. Naj bo E presečišče simetrale kota $\angle BFD$ in višine trikotnika $\triangle ABC$, G pa nožišče višine na osnovnico. Trikotnik $\triangle EFG$ je pravokoten. Torej je kot med simetralo kota $\angle BFD$ in višino na osnovnico velik: $\angle FEG = 180° - 90° - \frac{55°}{2} = 62°30'$.

Pravilno označena slika. .... 1 točka
Upoštevano, da je vsota kotov trikotnika $\alpha + \alpha + \frac{4}{7} \cdot \alpha = 180°$. .... 1 točka
Izračuna velikost kota ob osnovnici. .... 1 točka
Izračunana velikost kota $\angle BFD$. .... 1 točka
Upoštevanje pogoja, da je trikotnik $\triangle EFG$ pravokoten. .... 1 točka
Izračunana velikost kota med simetralo in višino. .... 1 točka
Opomba: Rešitev dobljena s poskušanjem se točkuje z največ 5 točkami.

57. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Rešitve nalog za 9. razred

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
B	D	A	A	A	A	C	B

A1. Ocene so urejene po velikosti, zato je x lahko 2, 3 ali 4. Če bi bil x ocena 3 ali 4, bi bila modusa dva (1 in x). Torej je $x = 2$. Modus tega niza je 2 in tudi mediana je 2.

A2. Vrednost kepe zlata v evrih označimo z x. Če bi delavec delal celo leto, bi dobil za vsak mesec 1000 EUR in $\frac{x}{12}$ EUR. Ker je odnehal po 7 mesecih, dobi $7 \cdot (1000 + \frac{x}{12})$ ali $5000 + x$ evrov. Rešitev enačbe $7 \cdot (1000 + \frac{x}{12}) = 5000 + x$ je $x = 4800$ EUR.

A3. Ploščina belega kvadrata predstavlja tri četrtine celotnega lika in je enaka $3 \cdot 48 = 144\ \mathrm{cm}^2$. Stranica tega kvadrata je dolga 12 cm.

A4. Praštevila, manjša od 15, so: 2, 3, 5, 7, 11, 13. Vseh možnih zmnožkov dveh izmed teh šestih števil je 15. Da je zmnožek sodo število, mora biti en faktor enak 2. Drugi faktor pa ne sme biti 3, saj zmnožek ne sme biti deljiv s 3. Take izbire so 4. Torej je verjetnost $\frac{4}{15}$.

A5. Dolžino stranice kvadrata označimo z a. Daljica FG je polovica stranice enakostraničnega trikotnika, saj je $\angle FGE = 60^\circ$. Dolžino stranice enakostraničnega trikotnika označimo s spremenljivko x. Tedaj velja $\frac{x\sqrt{3}}{2} = a$, zato je $\frac{x}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Sledi $|DF| : |FG| = \frac{a}{4} : \frac{a}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} : 4$.

A6. Ker je $a^2 + 2a + 1 = 0$, je $(a+1)^2 = 0$ in zato $a = -1$. Sledi $(-1)^{2021} + \frac{1}{(-1)^{2021}} = -1 - 1 = -2$.

A7. Zmnožek $20!$ razstavimo na prafaktorje $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 11 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 13 \cdot (2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5) \cdot 2^4 \cdot 17 \cdot (2 \cdot 3^2) \cdot 19 \cdot (2^2 \cdot 5) = 1 \cdot 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$. Vrednost ulomka je naravno število, če je imenovalec delitelj števca, torej $2^{18} \cdot 3^8 = 4^9 \cdot 9^4$. Sledi $x + y = 13$.

A8. Ploščina lističev je sestavljena iz dvanajstih skladnih krožnih odsekov, ki pripadajo središčnemu kotu 60°. Torej je $p = 12\left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)$. Iz ploščine izračunamo, da je $r = 4$ cm. Obseg lističev je sestavljen iz dvanajstih skladnih krožnih lokov, ki so dolgi šestino obsega z danim polmerom, zato je obseg $o = 12 \cdot \frac{2\pi \cdot 4}{6} = 16\pi$ cm.

B1.

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}\left(\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}} + 2^3\right) + 3\left(\sqrt{2^2 \cdot 0{,}1^{-2}} - \sqrt{10 - 10^0}\right)\right)\left(\sqrt[3]{8}\sqrt{36} + 2^3\right) + 1^0 =$$

$$= \left(\left(\sqrt{5}\right)^2\left(\sqrt{4} + 8\right) + 3\left(\sqrt{4 \cdot 10^2} - \sqrt{10 - 1}\right)\right)(2 \cdot 6 + 8) + 1 =$$

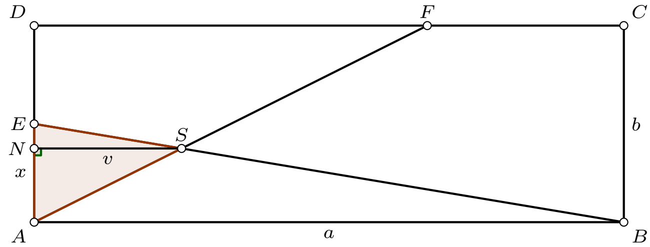
$$= \left(5 \cdot (2 + 8) + 3 \cdot \left(2 \cdot 10 - \sqrt{9}\right)\right)(12 + 8) + 1 =$$

$$= (5 \cdot 10 + 3\,(20 - 3)) \cdot 20 + 1 =$$

$$= (50 + 3 \cdot 17) \cdot 20 + 1 =$$

$$= (50 + 51) \cdot 20 + 1 =$$
$$= 101 \cdot 20 + 1 =$$
$$= 2020 + 1 =$$
$$= 2021$$

Izračunana vrednost: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2} = 5$. .... 1 točka
Izračunana vsota v prvem notranjem oklepaju: $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + 2^3} = 10$. .... 1 točka
Izračunan prvi koren v drugem notranjem oklepaju: $\sqrt{2^2 \cdot 0{,}1^{-2}} = 20$. .... 1 točka
Izračunana skupna vrednost izraza: $3 \cdot \left(\sqrt{2^2 \cdot 0{,}1^{-2}} - \sqrt{10 - 10^0}\right) = 51$. .... 1 točka
Izračunan drugi oklepaj: $\sqrt[3]{8}\sqrt{36} + 2^3 = 20$. .... 1 točka
Izračunan končni rezultat: $101 \cdot 20 + 1^0 = 2021$. .... 1 točka



B2.
Označimo z $a = |AB|$ in $b = |AD|$. Potem je $a = 3b$. Stranica AE trikotnika ASE je dolga $\frac{b}{2}$, višino pa označimo z v. Z x zapišimo dolžino daljice AN, kjer je N nožišče višine trikotnika ASE. Trikotnika $\triangle ANS$ in $\triangle ADF$ sta podobna, zato velja $x : v = b : 2b$. Podobna sta si tudi trikotnika $\triangle ENS$ in $\triangle EAB$ in velja $(\frac{b}{2} - x) : v = \frac{b}{2} : 3b$. Iz prve enačbe izrazimo $x = \frac{v}{2}$ in ga vstavimo v drugo. Dobimo $v = \frac{3b}{4}$. Ploščina trikotnika ASE je enaka $\frac{|AE| \cdot v}{2}$ oziroma $\frac{\frac{b}{2} \cdot \frac{3b}{4}}{2} = \frac{3b^2}{16}$. Izenačimo s 27 in dobimo dolžino $b = 12$ cm in $a = 36$ cm.

Skica z vrisanimi točkami E, F in S v pravilnem razmerju. .... 1 točka
Ugotovitev, da imamo opravka s podobnimi trikotniki $\triangle ANS$ in $\triangle ADF$ ali $\triangle ENS$ in $\triangle EAB$. 1 točka
Zapisano pravilno razmerje dolžin stranic v enem izmed parov podobnih trikotnikov. 1 točka
Zapisano razmerje dolžin stranic v drugem paru podobnih trikotnikov in ugotovitev $v = \frac{3b}{4}$. 1 točka
Zapis ploščine trikotnika ASE z eno neznanko (npr. $\frac{3b^2}{16}$) in izenačitev s 27. .... 1 točka
Rešitvi $b = 12$ cm in $a = 36$ cm. .... 1 točka
Opomba: Tekmovalec, ki ugane pravilni rešitvi samo iz zapisa za ploščino trikotnika $\triangle ASE$, npr. $27 = \frac{6 \cdot 9}{2}$, za postopek in rezultat ne more prejeti točk. Prav tako ne dobi točk v primeru, če višino trikotnika $\triangle ASE$ dobi z merjenjem.

B3. Označimo z x maso 96-odstotnega etanola in zapišimo maso 48-odstotnega etanola, ki ga potrebuje učiteljica: $200 - 70 - x = 130 - x$ g. V dobljeni mešanici je delež etanola enak

$$\frac{0{,}96x + 0{,}48(130 - x)}{200} = \frac{0{,}96x + 62{,}4 - 0{,}48x}{200} = \frac{0{,}48x + 62{,}4}{200}.$$

Ker mora biti mešanica 60-odstotni etanol, velja $\frac{0{,}48x+62{,}4}{200} = \frac{60}{100}$, od koder sledi $0{,}48x + 62{,}4 = 120$, od tod pa $x = 120$. Učiteljica potrebuje 120 g 96-odstotnega etanola in 10 g 48-odstotnega etanola.

Zapis mase 48-odstotnega etanola. . . . . 1 točka
Ugotovitev o skupnem deležu etanola v raztopini. . . . . 1 točka
Zapisana enačba za masne deleže. . . . . 1 točka
Rešitev enačbe. . . . . 1 točka
Porabljena količina 96-odstotnega etanola je 120 g. . . . . 1 točka
Porabljena količina 48-odstotnega etanola je 10 g. . . . . 1 točka