Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

43. tekmovanje iz matematike
za Vegovo priznanje
Področno tekmovanje, 4. april 2007

Šifra

NALOGE ZA SEDMI RAZRED

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilen odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilen odgovor eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

A1. V enakokrakem trikotniku je dolžina osnovnice $\frac{3}{4}$ dolžine kraka. Obseg trikotnika meri 33 cm. Kolikšna je dolžina osnovnice?

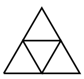
(**A**) 9 cm (**B**) 12 cm (**C**) 15 cm
(**D**) $\frac{19}{12}$ cm (**E**) trikotnik ni možen

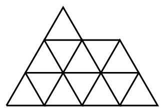
A2. Kateri ulomek ima najmanjšo vrednost?

(**A**) $\frac{1}{11^2 \cdot 13}$ (**B**) $\frac{1}{11 \cdot 135}$ (**C**) $\frac{1}{11 \cdot 13^2}$ (**D**) $\frac{1}{1309}$ (**E**) $\frac{1}{15 \cdot 7 \cdot 11}$

A3. Vili se ne more spomniti, ali stane žeton 10, 12, 15 ali 18 centov. Najmanj koliko denarja mora vzeti s seboj, da bo lahko vsega porabil za žetone?

(**A**) 1.20 evra (**B**) 1.80 evra (**C**) 2.40 evra (**D**) 3 evre (**E**) 3.60 evra

A4. Ploščina lika  meri $\frac{2}{3}$. Koliko meri ploščina lika na desni?

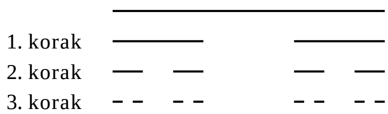


(**A**) $\frac{1}{6}$ (**B**) $1\frac{5}{6}$ (**C**) $\frac{13}{4}$ (**D**) $3\frac{1}{3}$ (**E**) $2\frac{1}{6}$

A5. Andrej je moral prebrati knjigo za domače branje. Prvi dan je prebral $\frac{1}{3}$ knjige. Drugi dan je nadaljeval z branjem in prebral toliko strani, da mu je do konca knjige ostalo natanko trikrat toliko strani, kot jih je prebral drugi dan. Kolikšen del knjige je po dveh dneh ostal neprebran?

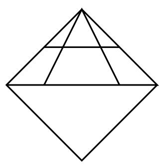
(**A**) $\frac{3}{8}$ (**B**) $\frac{1}{4}$ (**C**) $\frac{1}{2}$ (**D**) $\frac{1}{5}$ (**E**) $\frac{2}{5}$

A6. Daljico z dolžino 81 cm razdelimo na tri skladne daljice in srednjo »izrežemo«. Vsako od preostalih daljic spet razdelimo na tri skladne daljice in srednjo »izrežemo«. Postopek ponavljamo (glej sliko). Kolikšna je vsota dolžin vseh preostalih daljic v 4. koraku?



(**A**) 1 cm (**B**) 3 cm (**C**) 8 cm (**D**) 16 cm (**E**) 24 cm

A7. Koliko trikotnikov je na sliki?



(**A**) 8 (**B**) 13 (**C**) 18
(**D**) 22 (**E**) 25

A8. Jan pomnoži število 3 s samim seboj, rezultat 9 spet pomnoži s samim seboj in postopek ponovi 2007-krat. Vsakokrat dobljeni rezultat množi s samim seboj. Katera je števka enic tako nastalega števila?

(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

© 2007 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo matematike v osnovni šoli

B1. Točka C leži na $\frac{2}{3}$ daljice AB, bliže krajišču B. Daljica AC meri 18.4 cm.

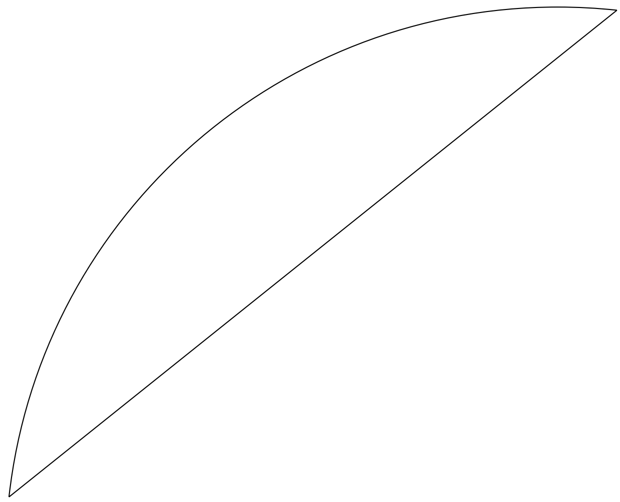
a) Izračunaj razdaljo med razpoloviščem daljice AC in razpoloviščem daljice CB.

b) Za koliko centimetrov je razdalja med krajiščem A in razpoloviščem daljice CB manjša od dolžine daljice AB?

(6 točk)

B2. Določi središče krožnice, ki ji pripada narisani krožni odsek. Nalogo reši načrtovalno in na kratko opiši potek načrtovanja.

(6 točk)



B3. Nekdo, katerega starost se zapiše z dvomestnim številom, izjavi:

1. Moja starost je praštevilo, nazadnje je bila praštevilo pred šestimi leti.
2. Moja starost je kvadrat naravnega števila.
3. Lani je bila moja starost kvadrat naravnega števila.

Koliko je star, če vemo, da je med zgornjimi tremi izjavami natanko ena lažna?

(6 točk)

43. tekmovanje iz matematike
za Vegovo priznanje
Področno tekmovanje, 4. april 2007

Šifra

NALOGE ZA OSMI RAZRED

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilen odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilen odgovor eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

A1. Izračunaj a, če je $\left(\left(\frac{1}{2^2}\right)^2\right)^a = 0.0625$.

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

A2. Katero je najmanjše naravno število, s katerim moramo pomnožiti število 2007, da dobimo kvadrat naravnega števila?

(**A**) 3 (**B**) 9 (**C**) 223 (**D**) 669 (**E**) 2007

A3. Kateri izraz dobimo z delnim korenjenjem izraza $\sqrt{\frac{2.88x^3}{y^2}}$?

(**A**) $\frac{12x}{5y}$ (**B**) $\frac{12\sqrt{2}x}{y}$ (**C**) $\frac{1.44x\sqrt{x}}{y}$ (**D**) $\frac{1.44x\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$ (**E**) $\frac{6x\sqrt{2x}}{5y}$

A4. Kateri lik ne more biti presek dveh skladnih enakostraničnih trikotnikov?

(**A**) trikotnik (**B**) kvadrat (**C**) romb (**D**) paralelogram (**E**) šestkotnik

A5. Površino lesene kocke z robom 4 cm pobarvamo z rdečo barvo. Nato jo razrežemo na 64 kockic z robom 1 cm. Koliko nastalih kockic ima vsaj eno ploskev pobarvano rdeče?

(**A**) 8 (**B**) 24 (**C**) 36 (**D**) 48 (**E**) 56

A6. Stranice trikotnika merijo a, b in c. Katera zveza velja med njimi?

(**A**) $a + b < c$ (**B**) $b > a + c$ (**C**) $a - b > c$
(**D**) $a - b < c$ (**E**) nobena od navedenih zvez

A7. Vsi člani športnega društva Triglav imajo pravico voliti svojega predsednika. Za to funkcijo sta bila dva kandidata in Jani je dobil dvakrat več glasov kot drugi kandidat. Trije člani niso glasovali, Jani pa je dobil $64\ \%$ glasov vseh članov društva Triglav. Koliko članov ima društvo?

(**A**) 69 (**B**) 75 (**C**) 81 (**D**) 87 (**E**) 99

A8. V pekarni so ostali sami enaki hlebci kruha. Prvi kupec kupi polovico vsega kruha in še pol hlebca. Drugi kupec kupi polovico ostanka in še pol hlebca. Tretji kupec kupi polovico vsega, kar je ostalo, in še pol hlebca. Najmanj koliko hlebcev je bilo v pekarni, če je vsak kupec dobil celo število hlebcev kruha?

(**A**) 7 (**B**) 15 (**C**) 17 (**D**) 25 (**E**) 39

© 2007 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo matematike v osnovni šoli

B1. Elastiko z dolžino x napnemo okoli pravokotnega okvirja. Pri tem elastiko raztegnemo za $20\ \%$. Ploščino pravokotnega okvirja izrazi z x, če veš, da je dolžina okvirja dvakratnik širine.

(6 točk)

B2. Pollitrska mešanica riža in moke tehta 405 g. Če bi bili količini moke in riža zamenjani, bi tehtala le 395 g. Koliko mℓ riža in koliko mℓ moke je v mešanici, če vemo, da je 1 ℓ riža 100 g težji od 1 ℓ moke?

(6 točk)

B3. V paralelogramu $ABCD$ velja $|AB| = 2|BC|$. Na stranici AB leži točka E tako, da je DE simetrala kota $\sphericalangle ADC$ in BD simetrala kota $\sphericalangle CDE$. Koliko meri ostri kot paralelograma pri oglišču A?

(6 točk)

43. tekmovanje iz matematike
za Vegovo priznanje
Področno tekmovanje, 4. april 2007

Šifra

NALOGE ZA DEVETI RAZRED

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilen odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilen odgovor eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

A1. Kolikšna je povprečna vrednost vseh naravnih števil od vključno 1 do vključno 100?

(A) 50 **(B)** 50.1 **(C)** 50.2 **(D)** 50.4 **(E)** 50.5

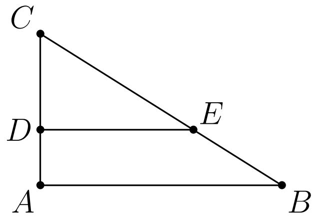
A2. V kateri točki premica z enačbo $\frac{2y-3x}{2} = 1$ seka abscisno os?

(A) $(-\frac{2}{3}, 0)$ **(B)** $(0, -\frac{2}{3})$ **(C)** $(\frac{2}{3}, 0)$ **(D)** $(0, \frac{2}{3})$ **(E)** $(0, \frac{3}{2})$

A3. $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ in $\frac{a+b}{2} = \frac{15}{16}$. Koliko je $8a - 16b$?

(A) -24 **(B)** -12 **(C)** -8 **(D)** 8 **(E)** 24

A4. Na sliki je daljica DE vzporedna daljici AB. Ploščina trikotnika DEC je enaka $\frac{3}{4}$ ploščine trikotnika ABC in stranica AC meri 1 m. Koliko meri daljica DC?



(A) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ m **(B)** $(2-\sqrt{3})$ m **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m
(D) $\frac{3}{4}$ m **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m

A5. Na jablani s petimi vejami na vsaki veji dozori vsako leto eno jabolko več. Tisto leto, ko na veji dozori 5 jabolk, ta veja odpade. Naslednje leto zraste nova, ki prvo leto še nima jabolk. Koliko jabolk bo na drevesu čez 10 let, če ima letos jablana na vejah po vrsti $1, 2, 3, 4$ in 5 jabolk?

(A) 15 **(B)** 14 **(C)** 13 **(D)** 12 **(E)** 11

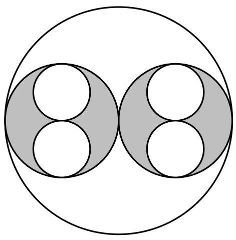
A6. V krajišču B tetive AB kroga je narisana pravokotnica na tetivo, ki razdeli večjega od lokov AB v razmerju $2:5$. Koliko meri središčni kot, ki pripada tetivi AB?

(A) $36°$ **(B)** $54°$ **(C)** $90°$ **(D)** $108°$ **(E)** $120°$

A7. Katera enačba ustreza premici, ki gre skozi točko $A(-3, 2)$ in je vzporedna ordinatni osi?

(A) $x = 2$ **(B)** $y = 2$ **(C)** $x = -3$ **(D)** $y = -3$ **(E)** $y = -x$

A8. Kolikšen del največjega kroga je osenčen?



(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $40\ \%$ **(C)** $\frac{3}{16}$
(D) $\frac{5}{8}$ **(E)** $\frac{\pi}{4}$

© 2007 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo matematike v osnovni šoli

B1. Pri kateri vrednosti parametra a enačba $a(ax-1)=2(2x+1)$ nima nobene realne rešitve?

(6 točk)

B2. V enakokrakem trikotniku ABC z vrhom C je kot ob vrhu manjši od 60°. Točka A' leži na stranici BC, točka B' pa na AC, da velja: $|AA'| = |BB'| = |AB|$. Točka C' je presek daljice AA' in daljice BB'. Koliko meri kot $\sphericalangle ACB$, če velja: $|AC'| = |AB'|$ in $|BC'| = |BA'|$?

(6 točk)

B3. Na nogometni tekmi sta sodelovali dve ekipi z 11 igralci. V zadnji tretjini igre je bil en igralec izključen. Igra je trajala 90 minut, nato pa jo je sodnik še za nekaj minut podaljšal. Koliko minut je igral izključeni nogometaš in za koliko minut je sodnik podaljšal igro, če je seštevek minut, ki so jih vsi igralci prebili na igrišču, 2012? V nogometu se sodnikov podaljšek in čas izključitve merita v celih minutah.

(6 točk)

43. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Področno tekmovanje, 4. april 2007

Rešitve za 7. razred

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor eno točko odštejemo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
A	C	B	E	C	D	B	A

Utemeljitve:

A1. Označimo z b dolžino kraka enakokrakega trikotnika. Njegova osnovnica je dolga $\frac{3}{4}b$. Krak b meri 12 cm, torej meri osnovnica 9 cm.

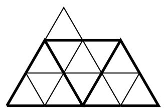
A2. Najmanjšo vrednost ima ulomek z največjim imenovalcem. Očitno je

$$15 \cdot 7 \cdot 11 = 105 \cdot 11 < 11 \cdot 135 < 11^2 \cdot 13 < 11 \cdot 13^2.$$

Ker je tudi $1309 < 11 \cdot 135$, ima ulomek $\frac{1}{11 \cdot 13^2}$ najmanjšo vrednost.

A3. Vrednosti žetonov v centih lahko zapišemo kot produkt praštevil, in sicer $10 = 2 \cdot 5$, $12 = 2^2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, $18 = 2 \cdot 3^2$. Najmanjši skupni večkratnik teh števil je $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$, torej moramo imeti s seboj 1.80 evra.

A4. Večji lik je sestavljen iz treh celih in še ene četrtine manjšega lika. Njegova ploščina je $3 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$.



A5. Prvi dan prebere tretjino knjige, drugi dan četrtino ostanka (torej šestino), tretji dan pa trikrat več kot drugi, kar pomeni polovico knjige.

A6. Pri vsakem rezanju nam ostaneta dve tretjini dolžine daljice: $(\frac{2}{3})^4 \cdot 81 = 16$.

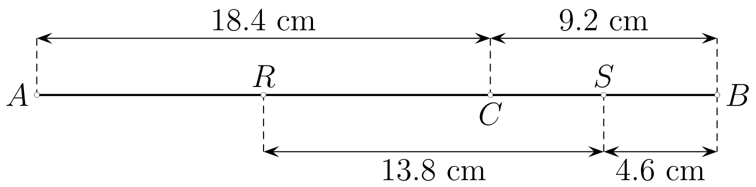
A7. Trikotniki, sestavljeni iz enega dela, so 4, iz dveh delov jih je 5, iz treh 1, iz štirih 2 in iz šestih 1. Skupaj 13 trikotnikov.

A8. Če kvadriramo število z zadnjo števko 1, se zadnja števka ohrani. Od tretjega člena zaporedja (števila 81) dalje imajo vsi kvadrati zadnjo števko enako 1.

© 2007 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo matematike v osnovni šoli

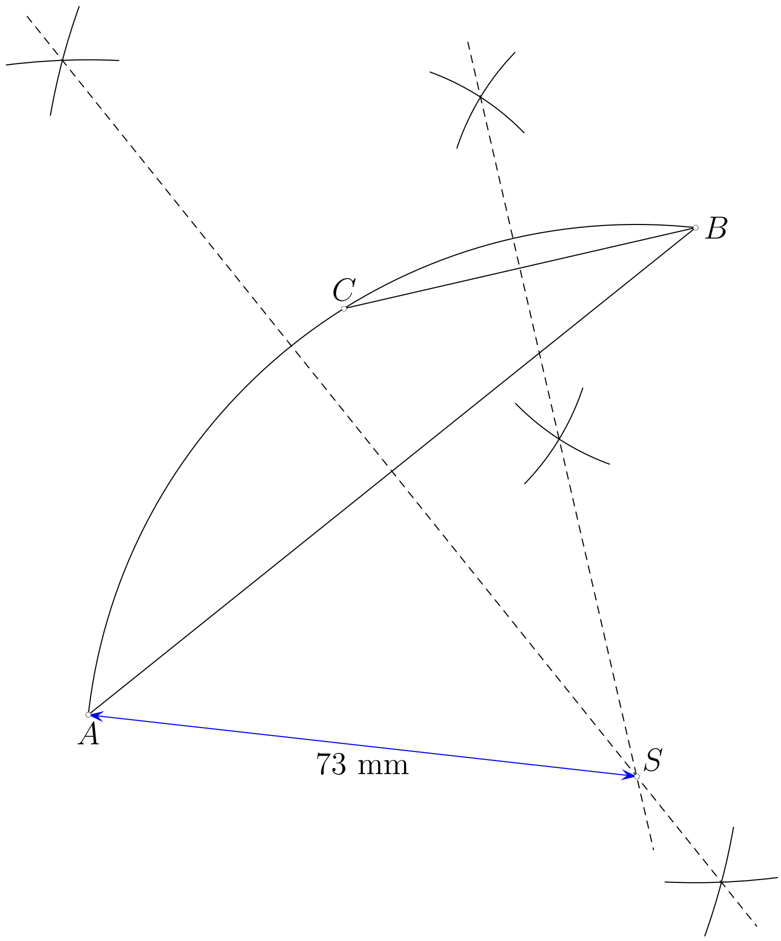
B1. Narišimo skico in označimo razpolovišči daljic AC in CB z R in S. Ker je $|AC| = \frac{2}{3}|AB|$, je $|AB| = \frac{3}{2}|AC| = 27.6$ cm. Razdalja med obema razpoloviščema je $|RS| = \frac{1}{2}|AC| + \frac{1}{2}|CB| = \frac{1}{2}|AB| = 13.8$ cm.

Razdalja med krajiščem A in razpoloviščem daljice CB je manjša od dolžine daljice AB ravno za dolžino daljice $|SB|$, oziroma $|AB| - |AS| = |SB|$. Ker je S razpolovišče daljice CB, je $|SB| = \frac{1}{2}|CB| = \frac{1}{4}|AC| = 4.6$ cm.



Sklep $|AB| = \frac{3}{2}|AC|$. .... **1 točka**
Sklep $|RS| = \frac{1}{2}|AB|$. .... **1 točka**
Izračun $|RS| = 13.8$ **cm.** .... **1 točka**
Sklep $|AB| - |AS| = |SB|$. .... **1 točka**
Sklep $|SB| = \frac{1}{4}|AC|$ **ali** $|AS| = |AC| + \frac{1}{2}|CB|$. .... **1 točka**
Izračun $|SB| = 4.6$ **cm.** .... **1 točka**
(Vmesni sklepi so lahko narejeni simbolno ali numerično. Končna rezultata morata biti zapisana numerično, lahko brez enote.)

B2. Označimo krajišči tetive z A in B, poljubno, od krajišč loka različno točko na loku $\widehat{AB}$ pa označimo s C. Iskano središče S dobimo kot presečišče simetral daljic AB in BC.



Sklep: Iskano središče S je presečišče simetral dveh različnih tetiv. ...... 1 točka
Narisana simetrala tetive AB. .... 1 točka
Vpeljana nova tetiva BC (ali AC; lahko tudi obe novi krajišči). .... 1 točka
Narisana simetrala tetive BC (oz. druge tetive). .... 1 točka
Označeno presečišče simetral (točka S). .... 1 točka
Natančnost konstrukcije. .... 1 točka

(Glede na dane podatke mora biti $|AS| = |BS| = 73$ mm. Največje dovoljeno odstopanje je 2 mm. Tekmovalec lahko namesto tetiv AB in CB za konstrukcijo uporabi poljubni dve različni tetivi danega loka.
Opozorilo: Ta tetiva ni hipotenuza enakokrakega pravokotnega trikotnika z vrhom v središču kroga.)

B3. Izključujeta se prva in druga izjava ter druga in tretja izjava. Torej je druga izjava nepravilna. Dvomestna števila, ki so popolni kvadrati, so

$$16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81.$$

Med števili

$$17,\ 26,\ 37,\ 50,\ 65,\ 82$$

sta le 17 in 37 praštevili. Ker pa je 13 praštevilo, $17 - 13 < 6$, med prašteviloma 31 in 37 pa ni drugih praštevil, je 37 iskano število let.

Sklep, da je druga izjava nepravilna. .... 2 točki
Zapisani vsi dvomestni kvadrati (ali povečani za 1). .... 1 točka
Ugotovitev, da sta med kvadrati, povečanimi za 1, le 17 **in** 37 **praštevili. . 1 točka**
Izločitev števila 17 **in odgovor** 37 **let. .... 1+1 točka**

Rešitve za 8. razred

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor eno točko odštejemo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
B	C	E	B	E	D	B	A

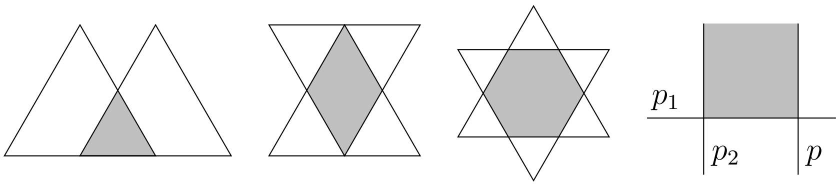
Utemeljitve:

A1. Ker je $\left(\left(\frac{1}{2^2}\right)^2\right)^a = (\frac{1}{2})^{4a} = 0.625 = (\frac{1}{2})^4$, mora biti $a = 1$.

A2. Število 2007 zapišemo kot produkt prafaktorjev $2007 = 3^2 \cdot 223$. Iskano število je 223.

A3. Računajmo $\sqrt{\frac{2.88x^3}{y^2}} = \sqrt{\frac{144\cdot 2\cdot x^2\cdot x}{100\cdot y^2}} = \frac{12x\sqrt{2x}}{10y} = \frac{6x\sqrt{2x}}{5y}$.

A4. Kot kaže slika, lahko dobimo trikotnik, šestkotnik in romb (torej tudi paralelogram).



Kvadrata pa ne moremo dobiti, saj morata sosednja robova v kvadratu ležati na premicah p_1 in p_2, ki sta nosilki ustreznih stranic v enakostraničnih trikotnikih T_1 in T_2. Ker pa je $p \parallel p_2$, ne more premica p biti vzporedna nobeni od stranic trikotnikov T_1 in T_2.

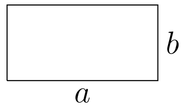
A5. V kocki je $(4-2)^3 = 8$ kockic s popolnoma nepobarvanimi ploskvami. Torej ima vsaj $64 - 8 = 56$ kockic vsaj eno ploskev pobarvano rdeče.

A6. V trikotniku je vsota dolžin dveh stranic vedno daljša od dolžine tretje stranice. Torej trditve (**A**), (**B**) in (**C**) ne držijo, trditev (**D**) pa drži, saj je pogoj $a < b+c$ enakovreden pogoju $a - b < c$.

A7. Društvo ima n članov, glasovalo jih je $n-3$. Janez dobi $0.64n$ glasov, kar ustreza $\frac{2}{3}(n-3)$, sledi $n = 75$.

A8. Recimo, da je bilo v pekarni n hlebcev. Prvi je kupil $\frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$ hlebcev kruha, drugi $\frac{1}{2}(n - \frac{n+1}{2}) + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{4}$, tretji pa $\frac{1}{2}(n - \frac{n+1}{2} - \frac{n+1}{4}) + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{8}$. Vsako izmed števil $\frac{n+1}{2}$, $\frac{n+1}{4}$ in $\frac{n+1}{8}$ mora biti celo. Najmanjši ustrezen n je enak 7.

B1. Označimo dolžini robov pravokotnega okvirja z a in b. Ker je $a = 2b$, je obseg pravokotnega okvirja enak $o = 2a + 2b = 4b + 2b = 6b$. Dolžina raztegnjene elastike je $s = 1.2x = \frac{6}{5}x$ in je enaka obsegu okvirja. Torej je $6b = 1.2x$, kar nam da $b = 0.2x = \frac{1}{5}x$ in $a = \frac{2}{5}x$. Ploščina pravokotnika je $p = a \cdot b = \frac{2}{25}x^2 = 0.08x^2$.



Zapis $a = 2b$ **(ali** $b = \frac{1}{2}a$**).** .... **1 točka**
Izračun $o = 6b$ **(ali** $o = 3a$**).** .... **1 točka**
Zapis $s = 1.2x$ **ali** $s = \frac{6}{5}x$**.** .... **1 točka**
Sklep $b = 0.2x$ **ali** $b = \frac{1}{5}x$**.** .... **1 točka**
Sklep $a = 0.4x$ **ali** $a = \frac{2}{5}x$**.** .... **1 točka**
Sklep $p = \frac{2}{25}x^2$ **ali** $p = 0.08x^2$**.** .... **1 točka**

B2. **1. način** Če bi v mešanici zamenjali količino moke in riža, bi se teža zmanjšala za 10 g. Ker je 1 ℓ riža za 100 g težji od 1 ℓ moke, smo v mešanici zamenjali $\frac{1}{10}$ litra riža z moko. Torej je v mešanici 100 mℓ več riža kot moke. Če z V označimo volumen moke (v litrih), velja $V + (V + 0.1) = 0.5$, kar nam da $V = 0.2$. Torej je v mešanici 200 mℓ moke in 300 mℓ riža.

Ugotovitev, da je v snovi več riža kot moke. .... **1 točka**
Sklep: Če zamenjamo snovi, se teža zmanjša za 10 g. .... **1 točka**
Sklep, da je v prvotni mešanici 100 **ml več riža kot moke.** .... **1 točka**
Zapis enačbe $V + (V + 0.1) = 0.5$
(ali enakovredne, če tekmovalec z V' **označi neznano količino riža).** ...... **1 točka**
Rešitev $V = 0.2$ **(ali** $V' = 0.3$**).** .... **1 točka**
Odgovor: V mešanici je 300 **ml riža in** 200 **ml moke.** .... **1 točka**

2. način Masa je enaka produktu gostote in volumna. Masa zmesi pa je vsota mas posameznih snovi. Označimo volumen moke v prvi mešanici z V (v litrih). Torej je v tej mešanici $(0.5 - V)$ litrov riža. Označimo še gostoto moke z ϱ (v gramih na liter). Ker je 1 liter riža za 100 g težji od 1 litra moke, je njegova gostota $\varrho + 100$. Masa prve mešanice (v gramih) je

$$\varrho V + (\varrho + 100)(0.5 - V) = 405,$$

kar lahko zapišemo kot

$$0.5\varrho - 100V = 355. \tag{1}$$

V drugi mešanici količino moke in riža zamenjamo. Torej imamo $0.5 - V$ litrov moke (z gostoto ϱ) in V litrov riža (z gostoto $\varrho + 100$). Masa te mešanice (v gramih) pa je

$$\varrho(0.5 - V) + (\varrho + 100)V = 395,$$

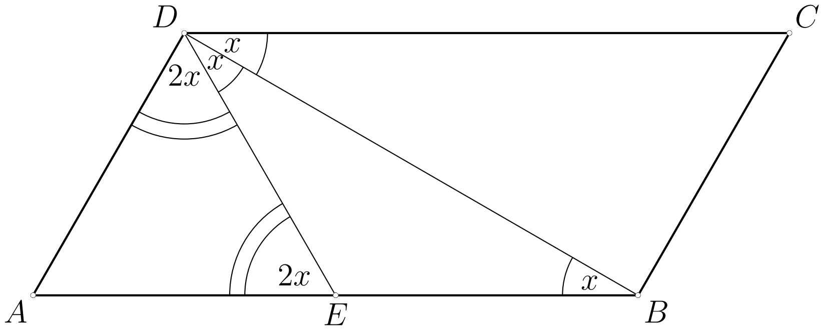
kar lahko zapišemo kot

$$0.5\varrho + 100V = 395. \tag{2}$$

Iz enačb (1) in (2) sledi $200V = 395 - 355 = 40$, kar nam da $V = 0.2$. V mešanici je 0.2 litra moke in $0.5 - 0.2 = 0.3$ litra riža.

Vpeljava dveh neodvisnih neznank (za gostoto in volumen; npr. ϱ **in** V**).** . **1 točka**
Ugotovitev, da je gostota riža enaka $\varrho + 100$**.** .... **1 točka**
Sklep $\varrho V + (\varrho + 100)(0.5 - V) = 405$
(ali ekvivalenten, ki upošteva stanje pred zamenjavo). .... **1 točka**
Sklep $\varrho(0.5 - V) + (\varrho + 100)V = 395$
(ali ekvivalenten, ki upošteva stanje po zamenjavi). .... **1 točka**
Rešitev $V = 0.2$ **(ali** $V' = 0.3$**, če tekmovalec z** V' **označi prostornino riža).** **1 točka**
Odgovor: V mešanici je 300 **ml riža in** 200 **ml moke.** .... **1 točka**

B3. Narišimo paralelogram in označimo točke z $A, \ldots, E$, kot veleva naloga. Označimo še $\sphericalangle EDB = x$.



Potem je $\sphericalangle BDC = \sphericalangle EDB = x$ in $\sphericalangle ADE = \sphericalangle EDC = 2x$. Ker sta $\sphericalangle BDC$ in $\sphericalangle DBA$ kota z vzporedimi kraki, sta enaka. Torej je $\sphericalangle DBA = x$. Kot $\sphericalangle DEA$ je zunanji kot trikotnika EBD, zato je $\sphericalangle DEA = \sphericalangle DBE + \sphericalangle EDB = 2x$. Ker je tudi $\sphericalangle ADE = 2x$, je trikotnik AED enakokrak z vrhom A. Sledi $|AE| = |AD|$. Štirikotnik $ABCD$ je paralelogram, zato je $|BC| = |AD|$. Ker je $|AB| = 2|BC|$, tako sledi $|EB| = |AB| - |AE| = 2|AD| - |AD| = |AD|$. Dokazali smo že, da je trikotnik EBD enakokrak z vrhom E, zato je $|ED| = |EB| = |AD|$. Torej je AED enakostraničen trikotnik, kar nam da $\sphericalangle BAD = 60°$.

Sklep $\sphericalangle EDB = \sphericalangle BDC$ **in** $\sphericalangle ADE = \sphericalangle EDC$. **.......................... 1 točka**
Sklep $\sphericalangle DBA = \sphericalangle BDC$ **in** $|EB| = |ED|$. **.............................. 1 točka**
Izračun $\sphericalangle AED = \sphericalangle DBE + \sphericalangle EDB$. **.................................. 1 točka**
Sklep $|AD| = |AE|$. **.. 1 točka**
Ugotovitev $|DE| = |AE|$ **ali** $|DE| = |DA|$. **(Razvidno mora biti, da je tekmovalec smiselno uporabil podatek** $|AB| = 2|BC|$ **ali** $|AB| = 2|AD|$**.) .. 1 točka**
Sklep $\sphericalangle BAD = 60°$. **.. 1 točka**

Rešitve za 9. razred

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor eno točko odštejemo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
E	A	B	C	E	D	C	A

Utemeljitve:

A1. Vsota $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100 = 5050$. Povprečno vrednost dobimo, če 5050 delimo s 100. To je 50.5.

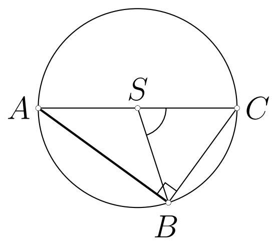
A2. Premica seka abscisno os, ko je $y = 0$, potem je $x = -\frac{2}{3}$.

A3. Iz prve zveze sledi, da je $a = \frac{2}{3}b$, iz druge pa $a + b = \frac{15}{8}$. Rešitev sistema je $a = 3$ in $b = \frac{9}{8}$. Torej je $8a - 16b = -12$.

A4. Stranice v obeh podobnih trikotnikih so v razmerju $\sqrt{3} : 2$. Če meri daljša 1 m, meri krajša $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m.

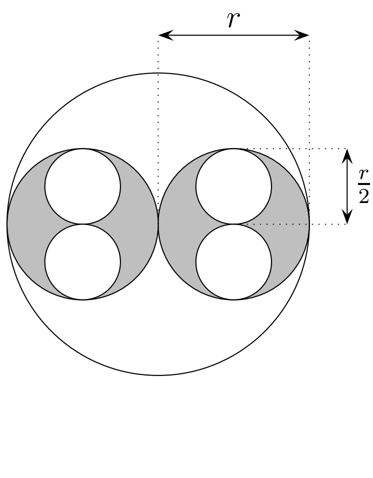
A5. Število jabolk na vejah se spreminja po sistemu ostankov pri deljenju s 6. Po desetih letih bo vsaka jablana z n jabolki imela na veji ostanek pri deljenju $(n + 10)$ s 6. Torej po vrsti: 5, 0, 1, 2, 3 jabolk ali skupaj 11.

A6. Če s C označimo presečišče pravokotnice in krožnice, gre tetiva AC skozi središče S, ker je pri B pravi kot. Kot $\sphericalangle BSC$ je $\frac{2}{5}$ kota $180°$, njegov sokot $\sphericalangle ASB$ pa meri $108°$.



A7. Premica, ki je vzporedna ordinatni osi in poteka skozi točko $A(-3, 2)$, ima enačbo $x = -3$.

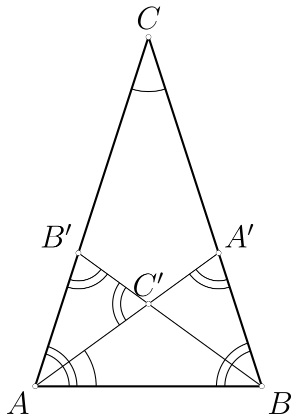
A8. Ploščina velikega kroga je πr^2. Ploščina osenčenega dela je $2\pi(\frac{r}{2})^2 - 4\pi(\frac{r}{4})^2 = \frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi r^2$, kar pa predstavlja $\frac{1}{4}$ ploščine velikega kroga.



B1. Enačbo preuredimo v $a^2x - a = 4x + 2$ oziroma $(a^2 - 4)x = a + 2$. Spomnimo se, da je $a^2 - 4 = (a+2)(a-2)$. Če je $a \neq 2$ in $a \neq -2$, lahko zapišemo $x = \frac{a+2}{(a+2)(a-2)} = \frac{1}{a-2}$ in je enačba rešljiva. Če je $a = -2$, enakost $(a^2 - 4)x = a + 2$ drži za vsak x, pri $a = 2$ pa enačba $(a^2 - 4)x = a + 2$ postane $0 \cdot x = 2$, kar ne drži za noben x. Torej je $a = 2$ iskana vrednost parametra a.

Preoblikovanje enačbe v $x(a^2 - 4) = a + 2$**.** .... **2 točki**
Zapis $(a^2 - 4) = (a + 2)(a - 2)$**.** .... **1 točka**
Pravilna analiza primera $a \neq 2$ **in** $a \neq -2$**; npr. izražava** $x = \frac{1}{a-2}$**.** .... **1 točka**
Pravilna analiza primera $a = -2$ **(razvidna mora biti neka identiteta).** .... **1 točka**
Sklep $a = 2$ **(razvidna mora biti protislovna enačba).** .... **1 točka**

B2. Označimo z γ kot ob vrhu C enakokrakega trikotnika ABC, z α pa kota ob osnovnici AB tega trikotnika. Torej je $2\alpha+\gamma = 180°$. Ker je $|AA'| = |AB|$, je trikotnik ABA' enakokrak z vrhom A. Podobno je tudi trikotnik ABB' enakokrak z vrhom B. Zaradi skupnih kotov pri A in B sledi, da so ABC, $BA'A$ in $B'AB$ podobni enakokraki trikotniki. Ker je $C'B'A$ enakokrak trikotnik z vrhom A, iz ujemanja kotov pri B' sledi, da je tudi $C'B'A$ podoben trikotnim ABC, $BA'A$ in $B'AB$. Ker je $\alpha = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BAA' + \sphericalangle C'AB = \gamma + \gamma = 2\gamma$, sledi $\alpha = 2\gamma$. Skupaj z $2\alpha + \gamma = 180°$ tako sledi $2 \cdot 2\gamma + \gamma = 5\gamma = 180°$, kar nam da $\gamma = 36°$.



Sklep, da so ABC, $BA'A$ in $B'AB$ podobni trikotniki
(ali enakovredni pogoji, zapisani s koti). . . . . 2 točki
Sklep, da je tudi trikotnik $C'B'A$ (ali $A'C'B$) podoben trikotniku ABC
(ali enakovredni pogoji, zapisani s koti). . . . . 1 točka
Račun s koti, ki nam da $\alpha = 2\gamma$. . . . . 1 točka
Uporaba pogoja $2\alpha + \gamma = 180°$
(ali enakovredne identitete s koti v trikotniku). . . . . 1 točka
Sklep $\gamma = 36°$. . . . . 1 točka

(Tekmovalec lahko zvezo $\alpha = 2\gamma$ izpelje tudi tako, da ustrezne kote zapisuje na skico. Ta sklep nadomešča prve tri sklepe.)

B3. Recimo, da je sodnik podaljšal igro za x minut, izključeni nogometaš pa je igral y minut. Torej je seštevek minut, ki so jih vsi igralci prebili na igrišču, enak

$$(2 \cdot 11 - 1)(90 + x) + y = 2012.$$

Gornjo enačbo uredimo v $21x = 122 - y$. Ker je $60 \leq y < 90$, je $32 < 122 - y \leq 62$, število pa $122 - y$ je deljivo z 21. Torej je lahko le $122 - y = 42$, kar nam da $y = 80$ in $x = 2$.

Zapis enačbe $(2 \cdot 11 - 1)(90 + x) + y = 2012$ **ali enakovredne**
z vpeljavo dveh neznank . . . . 1 točka
Poenostavljen zapis $21x + y = 122$ **ali** $21x = 122 - y$**. . . . . 1 točka**
Smiselna uporaba pogoja $y \geq 60$**. Npr.** $122 - y \leq 62$ **ali** $21x \leq 62$**. . . . . 1 točka**
Smiselna uporaba pogoja $y < 90$**. Npr.** $122 - y > 32$ **ali** $21x > 32$**. . . . . 1 točka**
Rešitev $x = 2$**. . . . . 1 točka**
Rešitev $y = 80$**. . . . . 1 točka**
(Namesto y **lahko tekmovalec vpelje tudi** z**, ki označuje, koliko minut pred koncem tekme je bil tekmovalec izključen. Če tekmovalec v celoti pravilno reši nalogo in zapiše** $x = 2$ **in** $z = 10$**, priznajte vse točke. Če tekmovalec samo zapiše rešitev** $x = 2$**,** $y = 80$ **in ne utemelji, zakaj je edina možna, prejme največ** 4 **točke.)**