**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

46. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije
Škofja Loka, 20. april 2002

NALOGE ZA 1. LETNIK

1. Najmanjše naravno število, katerega kvadrat se konča s tremi štiricami, je 38, saj je $38^2 = 1444$. Katero je naslednje najmanjše naravno število s to lastnostjo?

2. Tine je zbiral znamke. Za rojstni dan je dobil nov album, v katerega bo lahko spravil veliko znamk. Iz hranilnika je vzel 2002 tolarja in sklenil, da bo ves denar porabil za nakup znamk. Prijatelj mu je ponudil manjše znamke po 10 tolarjev in večje po 28 tolarjev. Tine se je odločil, da bo kupil čim večje število znamk. Koliko znamk bo lahko kupil?

3. Naj bo M razpolovišče osnovnice AB trapeza $ABCD$. V notranjosti daljice AC leži taka točka E, da se premici BC in ME sekata v točki F, premici FD in AB se sekata v točki G ter premici DE in AB v točki H. Dokaži, da je M razpolovišče daljice GH.

4. Najmanj koliko zvezdic moramo narisati v tabelo velikosti 4×4, da bo po brisanju poljubnih 2 stolpcev in poljubnih 2 vrstic ostala v tabeli vsaj 1 zvezdica?

Naloge rešujte samostojno. Za reševanje imate na voljo $3\frac{1}{2}$ h.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

46. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije
Škofja Loka, 20. april 2002

NALOGE ZA 2. LETNIK

1. Za katere vrednosti realnega parametra a ima sistem enačb

$$x + y = a^3 - a \quad \text{in} \quad xy = a^2$$

   realni rešitvi x in y?

2. Poišči najmanjše naravno število, ki ga lahko zapišemo kot vsoto 9, 10 in 11 zaporednih naravnih števil.

3. Naj bo $\mathcal{K}$ krožnica v ravnini, $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ pa disjunktni krožnici, ki se od znotraj dotikata krožnice $\mathcal{K}$ v točkah A in B. Naj bo t skupna tangenta krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, ki se ju dotika v točkah C in D tako, da sta $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ obe na istem bregu premice t, središče krožnice $\mathcal{K}$ pa na njenem drugem bregu. Označimo z E presek premic AC in BD. Dokaži, da leži točka E na krožnici $\mathcal{K}$.

4. Ali lahko pokrijemo šahovnico velikosti 15×15 s 55 dominami velikosti 4×1 tako, da ostanejo središčno polje in vsa polja ob ogliščih šahovnice nepokrita? (Domine morajo v celoti ležati na šahovnici in se ne smejo prekrivati.)

Naloge rešujte samostojno. Za reševanje imate na voljo $3\frac{1}{2}$ h.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

46. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije
Škofja Loka, 20. april 2002

NALOGE ZA 3. LETNIK

1. Naj bo k tako naravno število, da ima kvadratna enačba

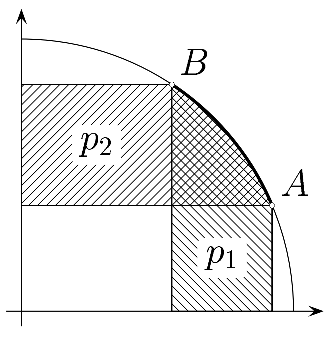
$$kx^2 - (1-2k)x + k - 2 = 0$$

racionalni rešitvi. Dokaži, da je k zmnožek 2 zaporednih celih števil.

2. Imamo $n \geq 3$ listov, ki jih oštevilčimo od 1 do n. Liste nato razdelimo na 2 kupa in ugotavljamo, ali sta v vsaj 1 kupu lista, označena s številoma, katerih vsota je popolni kvadrat. Dokaži, da

(a) Če je $n \geq 15$, taka lista obstajata ne glede na to, kako liste razdelimo.
(b) Če je $n \leq 14$, taka lista ne obstajata pri vsaki porazdelitvi.

3. Na enotski krožnici s središčem v koordinatnem izhodišču izberemo krožni lok s krajiščema A in B, ki leži v prvem kvadrantu. Naj bo p_1 ploščina lika pod krožnim lokom in nad abcisno osjo, p_2 pa naj bo ploščina lika levo od krožnega loka in desno od ordinatne osi (glej sliko). Dokaži, da je vsota $p_1 + p_2$ odvisna le od dolžine krožnega loka, ne pa tudi od njegove lege.



4. V škofjeloški grajski kleti 7 palčkov hrani svoj zaklad. Zaklad je za 12 vrati, vsaka vrata pa so zaklenjena z 12 ključavnicami. Vse ključavnice so različne. Vsak palček ima ključe za nekaj ključavnic. Katerikoli 3 palčki imajo skupaj ključe za vse ključavnice. Dokaži, da imajo palčki skupaj vsaj 333 (ne nujno različnih) ključev.

Naloge rešujte samostojno. Za reševanje imate na voljo $3\frac{1}{2}$ h.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

46. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije
Škofja Loka, 20. april 2002

NALOGE ZA 4. LETNIK

1. Ali obstaja funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, da bo

$$f(f(2002)) = 17, \quad f(mn) = f(m)f(n) \quad \text{in} \quad f(n) \leq n$$

za vsaka $m, n \in \mathbb{N}$?

2. Naj bo $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$, kjer so a_i različna naravna števila. Vsota števil iz nobene prave podmnožice množice S ni deljiva z n. Dokaži, da je vsota vseh števil iz množice S deljiva z n.

3. Naj bo A' nožišče višine na stranico BC ostrokotnega trikotnika ABC. Krožnica s premerom AA' seka stranico AB v točkah A in D, stranico AC pa v točkah A in E. Dokaži, da leži središče očrtane krožnice trikotnika ABC na nosilki višine na DE trikotnika ADE.

4. V škofjeloški grajski kleti 7 palčkov hrani svoj zaklad. Zaklad je za 10 vrati, vsaka vrata pa so zaklenjena s 3 ključavnicami. Vse ključavnice so različne. Vsak palček ima ključe za nekaj ključavnic. Katerikoli 4 palčki imajo skupaj ključe za vse ključavnice. Dokaži, da obstajajo 3 palčki, ki imajo skupaj ključe za vse ključavnice.

Naloge rešujte samostojno. Za reševanje imate na voljo $3\frac{1}{2}$ h.

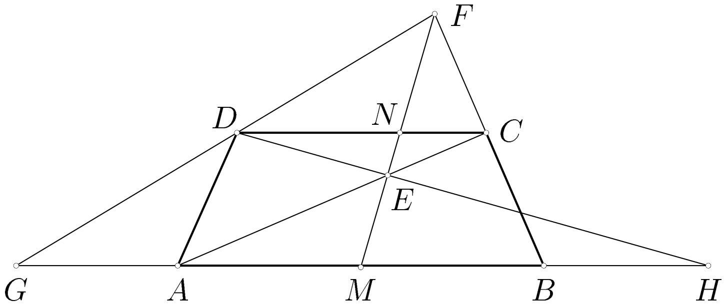
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

Rešitve nalog z državnega tekmovanja

I/1. Naj bo $38+n$ iskano število. Tedaj je $(38+n)^2 = 1444 + n(76+n)$, kjer se število $n(76+n)$ konča s tremi ničlami, oziroma je večkratnik števila 1000. Ker je $1000 = 5^3 \cdot 2^3$, mora biti ali n ali $76+n$ deljivo s 5. Toda n in $76+n$ nista hkrati deljivi s 5, zato mora biti eno izmed teh dveh števil deljivo s $125 = 5^3$ in torej oblike $125k$.
Oglejmo si še faktor 2^3. Iz $76 = 2^2 \cdot 19$ sledi, da imata števili n in $76+n$ enak ostanek pri deljenju s 4. Ker mora biti zmnožek $n(76+n)$ deljiv z 8, mora biti vsaj eno od števil n ali $76+n$ deljivo s 4. Torej sta s 4 deljivi obe in je eno od njiju oblike $125 \cdot 4 \cdot m = 500m$, kjer je $m \in \mathbb{N}$. Ker iščemo najmanjšo možno vrednost, izberemo $m = 1$ in iz $76+n = 500$ izračunamo $38+n = 462$.

I/2. Denimo, da bo Tine kupil x znamk po 10 tolarjev in y znamk po 28 tolarjev. Tedaj velja $10x + 28y = 2002$ oziroma $5x + 14y = 1001$, od tod pa $5x + 5y = 1001 - 9y$ oziroma $x + y = \frac{1001-9y}{5}$. Vrednost vsote bo tem večja, čim manjši bo y. Ker je y naravno število, lahko poskušamo z vrednostmi $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$ ..., dokler ne dobimo cele vrednosti za vsoto $x+y$. Sicer pa vemo, da bo vsota $x+y$ celo število, ko bodo enice v razliki $1001 - 9y$ enake 0 ali 5, to je, ko bodo enice v zmnožku $9y$ enake 1 ali 6. Najmanjši y, ko to velja, je $y = 4$. Tedaj je $x + y = \frac{1001-36}{5} = \frac{965}{5} = 193$. Tine bo kupil 193 znamk.

I/3. Označimo z N presečišče premic CD in EF.



Ker je $DC \parallel GB$ in so točke M, N in F kolinearne, je $\frac{|GM|}{|MB|} = \frac{|DN|}{|NC|}$. Ker je $AH \parallel DC$ in so točke M, E ter N kolinearne, je $\frac{|AM|}{|MH|} = \frac{|NC|}{|DN|}$. Sledi $\frac{|GM|}{|MB|} \cdot \frac{|AM|}{|MH|} = 1$, od koder zaradi $|AM| = |MB|$ sledi $|GM| = |MH|$.

I/4. Slika kaže, da zadošča 7 zvezdic. Dokažimo, da 6 zvezdic ne zadošča. V tem primeru je vsaj v 2 stolpcih največ 1 zvezdica. Če zbrišemo preostala 2 stolpca, ostaneta le še 2 zvezdici, ki ju lahko zbrišemo, če izpraznimo vrstici, v katerih ležita.

		*	
	*		*
*	*		
*			*

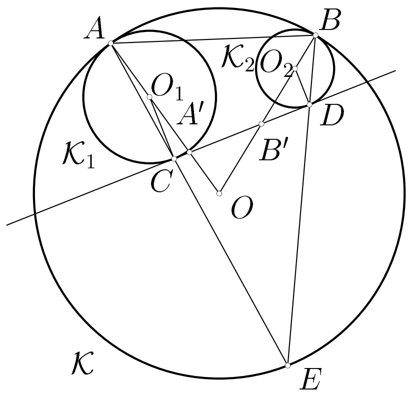
II/1. Izrazimo $x = a^3 - a - y$, vstavimo x v drugo enačbo in dobimo $(a^3 - a - y)y = a^2$ oziroma $y^2 + y(a - a^3) + a^2 = 0$. Kvadratna enačba ima realni rešitvi, če je njena diskriminanta nenegativna, torej $(a-a^3)^2 - 4a^2 \geq 0$. Neenačbo poenostavimo in dobimo $a^2(a^2+1)(a^2-3) \geq 0$. Neenačba velja, če je $a = 0$ ali $a^2 \geq 3$.

II/2. Ker lahko število zapišemo kot vsoto 9 zaporednih naravnih števil, je enako devetkratniku srednjega števila v tem zaporedju 9 števil. Podobno sklepamo, da je enako enajstkratniku srednjega števila v zaporedju 11 zaporednih naravnih števil. Ker se da število zapisati tudi kot

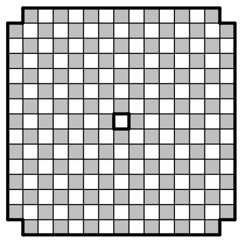
vsoto 10 zaporednih naravnih števil, je enako petkratniku vsote srednjih dveh števil v tem zaporedju. Tako torej vemo, da je iskano število deljivo z 9, 11 in 5, najmanjše tako število pa je $9 \cdot 11 \cdot 5 = 495$.
Srednje število v vsoti 9 zaporednih naravnih števil je enako $\frac{495}{9} = 55$, srednje število v vsoti 11 zaporednih naravnih števil je $\frac{495}{11} = 45$, vsota srednjih dveh števil v vsoti 10 zaporednih naravnih števil pa je enaka $\frac{495}{5} = 99 = 49 + 50$. Tako je:

$$\begin{aligned}495 &= 51 + 52 + 53 + 54 + 55 + 56 + 57 + 58 + 59\\ &= 45 + 46 + 47 + 48 + 49 + 50 + 51 + 52 + 53 + 54\\ &= 40 + 41 + 42 + 43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48 + 49 + 50.\end{aligned}$$

II/3. Označimo z O, O_1 in O_2 središča krožnic, presečišči premice t z daljicama OA in OB pa označimo z A' in B'. Naj bo $\alpha = \sphericalangle CAO_1$. Ker je trikotnik AO_1C enakokrak, je $\sphericalangle CO_1A' = 2\alpha$. Ker je $CD \perp O_1C$, je $\sphericalangle O_1A'C = \pi/2 - 2\alpha$. Če označimo $\beta = \sphericalangle O_2BD$, lahko podobno izpeljemo $\sphericalangle DB'O_2 = \pi/2 - 2\beta$. V trikotniku $OB'A'$ tako velja $\sphericalangle B'OA' = \pi - (\pi/2 - 2\beta) - (\pi/2 - 2\beta) = 2\alpha + 2\beta$. V trikotniku AEB velja $\sphericalangle BEA = \pi - \sphericalangle EAB - \sphericalangle ABE$. Ker je $\sphericalangle EAB + \sphericalangle ABE = \alpha + \beta + (\pi - \sphericalangle BOA) = \pi - \alpha - \beta$, sledi $\sphericalangle BEA = \alpha + \beta$. Torej je $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BEA$, zato točka E res leži na krožnici $\mathcal{K}$



II/4. Pobarvajmo šahovnico, kot kaže slika. Vsaka domina velikosti 4×1 pokrije po 2 polji vsake barve. Ker število belih polj ni enako številu osenčenih polj, šahovnice ne moremo pokriti na predpisani način.

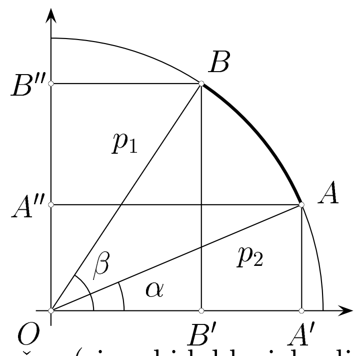


III/1. Da bosta rešitvi kvadratne enačbe racionalni, mora biti diskriminanta $(1 - 2k)^2 - 4k(k - 2) = 1 + 4k$ enaka m^2, $m \in \mathbb{N}$. Torej je $k = \frac{(m-1)(m+1)}{4}$. Ker je k naravno število, mora biti m liho število, večje od 1, torej obstaja tako naravno število n, da je $m = 2n + 1$, sledi $k = n(n + 1)$.

III/2. Rešimo najprej prvi del naloge. Dovolj je dokazati trditev za $n = 15$. Če namreč taka lista obstajata za $n = 15$, obstajata tudi za $n \geq 16$, saj lahko liste s številkami od 16 dalje izločimo in sklepamo kot prej. Če pri tem en kup v celoti izpraznimo, ostaneta na drugem kupu denimo števili 1 in 3.
Predpostavimo, da to ne bi bilo res in da se torej pri $n = 15$ to ne bi dalo narediti. To pomeni, da bi morala biti 1 in 15 na različnih kupih, prav tako 1 in 3. Tako bi bila 3 in 15 na istem kupu. Na tem kupu ne bi smelo biti števila 6, saj bi sicer imeli $6 + 3 = 9 = 3^2$. Niti števila 10 ne bi smelo biti na tem kupu, saj bi imeli $10 + 15 = 25 = 5^2$. To pa pomeni, da bi bila lista s številoma 6 in 10 oba na drugem kupu in bi imeli protislovje, saj je $6 + 10 = 16 = 4^2$. Za $n = 15$ torej vedno najdemo vsaj v enem kupu lista s številoma, katerih vsota je popolni kvadrat.

Sedaj rešimo še drugi del naloge. Vzemimo najprej $n = 14$ in poiščimo porazdelitev, ko vsota nobenih dveh števil s posameznega kupa ni popolni kvadrat: na en kup postavimo liste s števili 1, 2, 4, 6, 9, 11 in 13, na drugi pa liste s števili 3, 5, 7, 8, 10, 12 in 14. Če je $3 \leq n < 14$, lahko uporabimo kar rešitev za $n = 14$, le liste s števili, večjimi od n, odstranimo.

III/3. Označimo točke, kot kaže slika. Ploščina krožnega izseka, ki pripada loku $\widehat{AB}$, je enaka $p_{\widehat{AB}} = \frac{\beta-\alpha}{2}$, kjer smo kota α in β merili v radianih. Sledi



$$\begin{aligned} p_1 &= p_{\widehat{AB}} + p_{OBB''} - p_{OAA''} = \tfrac{\beta-\alpha}{2} + \tfrac{1}{2}\sin\beta\cos\beta - \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha \\ p_2 &= p_{\widehat{AB}} + p_{OA'A} - p_{OB'B} = \tfrac{\beta-\alpha}{2} + \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\beta\cos\beta. \end{aligned}$$

Torej je $p_1 + p_2 = \beta - \alpha$, kar je enako dolžini loka $\widehat{AB}$.

III/4. Zagotovo obstajajo 4 palčki, od katerih ima vsak vsaj 48 ključev (sicer bi lahko izbrali 3, ki bi skupaj imeli manj kot $3 \cdot 48 = 144$ ključev in ne bi mogli odpreti vseh ključavnic). Preostali 3 palčki imajo skupaj vsaj 144 ključev. Torej imamo 4 palčke z vsaj 48 ključi in trojico z vsaj 144 ključi, skupno vsaj $4 \cdot 48 + 144 = 336$ ključev.

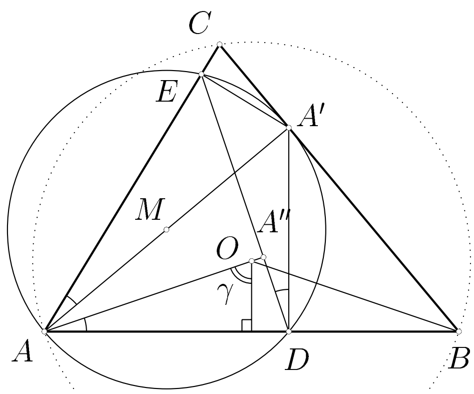
IV/1. Ker je $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, z upoštevanjem zveze $f(xy) = f(x)f(y)$ izpeljemo

$$f(f(2002)) = f(f(2)) \cdot f(f(7)) \cdot f(f(11)) \cdot f(f(13)) = 17.$$

Ker je $f(x) \le x$, je $f(f(x)) \le f(x) \le x$, in zato $f(f(2)) \le 2, f(f(7)) \le 7, f(f(11)) \le 11$ in $f(f(13)) \le 13$. Na levi strani enačbe je zmnožek števil, ki so največ 13, število 17 pa je praštevilo in takšna funkcija torej ne obstaja.

IV/2. Označimo $s_j = a_1 + \ldots + a_j$. Če za $j < k$ velja $s_j \equiv s_k \pmod{n}$, je $a_{j+1} + \ldots + a_k \equiv 0 \pmod{n}$, kar je v protislovju s predpostavko naloge. Torej dajo števila $s_1, \ldots, s_n$ vse možne ostanke pri deljenju z n. Ker po predpostavki nobeno od števil $s_1, \ldots, s_{n-1}$ ni deljivo z n, mora biti z n deljivo število $s_n = a_1 + \ldots + a_n$.

IV/3. Označimo z A'' nožišče višine iz A trikotnika ADE. Središče trikotniku ABC očrtane krožnice leži na premici AA'', če je $\sphericalangle BAA'' = \frac{\pi}{2} - \gamma$, kjer je $\gamma = \sphericalangle ACB$. Ker je $AA'' \perp DE$ in $AB \perp A'D$ ter je štirikotnik $ADA'E$ tetiven, je $\sphericalangle BAA'' = \sphericalangle A'DE = \sphericalangle A'AE$. Ker pa je $AA' \perp BC$, je tako res $\sphericalangle A'AE = \frac{\pi}{2} - \gamma = \sphericalangle BAA''$.



IV/4. Dokazujemo s protislovjem. Denimo, da nobena trojica palčkov ne more odkleniti vseh ključavnic. Ker je takih trojic 35, ključavnic pa je 30, obstaja ključavnica, ki je ne moreta odkleniti vsaj 2 trojici. Če ti trojici združimo, dobimo vsaj 4 palčke, od katerih nihče ne more odkleniti te ključavnice. To pa je v protislovju s predpostavko, da lahko vsaki štirje palčki odprejo vse ključavnice.