Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

47. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije
Želimlje, 12. april 2003

Naloge za 1. letnik

1. Dano je praštevilo p. Poišči vsa naravna števila x in y, ki zadoščajo enačbi $p \cdot (x-5) = x \cdot y$.

2. Metka stoji 60 m vzhodno in 80 m južno od kraja, kjer stoji Tine. Oba sta enako oddaljena od lipe v mestnem parku, ki je naravnost vzhodno od kraja, kjer je Tine. Sočasno se vsak s svojega kraja odpravita naravnost proti lipi. Koliko metrov poti bo vsak izmed njiju prehodil do njunega srečanja pod lipo?

3. Dana je krožnica k s premerom AB. Na njej izberemo točko M, ki ne sovpada ne z A in ne z B. Naj bo k_1 krožnica, ki ima središče v M in se dotika premera AB. Dokaži, da sta tangenta iz točke A in tangenta iz točke B na krožnico k_1 vzporedni.

4. Krt je izkopal podzemne sobe in jih povezal z rovi tako, da iz vsake sobe vodijo natanko 3 rovi v 3 različne sobe. Rovi se med seboj ne sekajo. Med poljubnimi 3 sobami vedno obstajata 2, ki nista povezani z rovom. Dokaži, da je krt izkopal vsaj 6 sob. Ali je možno, da je krt izkopal natanko 6 sob?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

47. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije
Želimlje, 12. april 2003

Naloge za 2. letnik

1. Za ulomek $\frac{m}{n}$, kjer sta m in n naravni števili, velja $\frac{1}{3} < \frac{m}{n} < 1$. Če števcu prištejemo naravno število, imenovalec pa s tem številom pomnožimo, se vrednost ulomka ne spremeni. Poišči vse take ulomke $\frac{m}{n}$.

2. Vsota in zmnožek 2 ulomkov sta celi števili. Eden izmed ulomkov ima imenovalec 2003. Dokaži, da sta tudi oba ulomka celi števili.

3. Naj točka X leži na simetrali daljice AB in ne na premici AB. Naj bo C poljubna točka v notranjosti daljice AB. Dokaži, da imata trikotnikoma ACX in CBX očrtani krožnici enaka polmera ne glede na izbiro točke C.

4. V jami pod Krimom spi grozna pošast. Ko postane lačna, se zbudi in požre toliko ovc, kolikor je vsota števk tistega leta. Potem spet zaspi za toliko let, kolikor ovc je pojedla. Vemo, da se je zbudila 12. aprila leta 354. Ali je pošast lahko pred vrati?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

47. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije
Želimlje, 12. april 2003

Naloge za 3. letnik

1. Naj za polinom $p(x)$ s celimi koeficienti velja $p(3) = 2$. Ali je število $p(2003)$ lahko popolni kvadrat?

2. Naj bo X presečišče diagonal konveksnega štirikotnika $ABCD$. Dokaži, da se trikotnikoma ABX in CDX očrtani krožnici dotikata natanko tedaj, ko je $AB \parallel CD$.

3. Na voljo imamo 6 različnih barv in veliko kock. Posamezno kocko pobarvamo z vsemi 6 barvami, in sicer vsako mejno ploskev z 1 barvo. Največ koliko kock lahko pobarvamo, če naj bo vsaka izmed njih drugače pobarvana? (Če lahko 1 izmed pobarvanih kock zasučemo tako, da so barve mejnih ploskev enako razporejene kot na drugi kocki, sta kocki enako pobarvani.)

4. V jami pod Krimom spi grozna pošast. Ko postane lačna, se zbudi in požre toliko ovc, kolikor je vsota števk tistega leta. Potem spet zaspi za toliko let, kolikor ovc je pojedla. Vemo, da se je zbudila 12. aprila leta 666. Ali je pošast lahko pred vrati? Ali se bo lahko zbudila leta 3003?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

47. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije

Želimlje, 12. april 2003

Naloge za 4. letnik

1. Dano je aritmetično zaporedje $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Označimo z s_i vsoto prvih i členov tega zaporedja, z s_j vsoto prvih j členov in z s_k vsoto prvih k členov. Dokaži, da vrednost izraza
$$\frac{s_i}{i}(j-k)+\frac{s_j}{j}(k-i)+\frac{s_k}{k}(i-j)$$
ni odvisna niti od izbire števil i, j in k, niti od zaporedja.

2. V letalu, ki ima 62 vrst s po 6 sedeži v vsaki vrsti, so se potniki posedli tako, da v nobenih 2 vrstah niso zasedeni sedeži na istih mestih. Največ koliko potnikov je lahko v letalu?

3. Naj bo D razpolovišče hipotenuze AB pravokotnega trikotnika ABC. Označimo z O_1 in O_2 središči trikotnikoma ADC in DBC očrtanih krožnic. Dokaži, da je AB tangenta na krožnico s premerom O_1O_2.

4. Maček iz sosednje vasi hodi v Butale dražit vaške pse. Vsak večer, ko že vsi spijo, se prikrade v Butale, na ves glas zamijavka, nato pa jo ucvre nazaj domov. Ko maček zamijavka, zalajajo vsi psi, ki so od njega oddaljeni do 90 m. Ker so Butale majhna vas, sta vsaka 2 psa v vasi med seboj oddaljena do 100 m. Ali se lahko maček postavi tako, da nanj zalajajo vsi vaški psi hkrati?

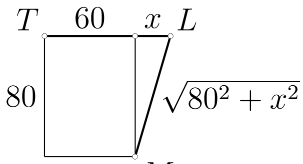
Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

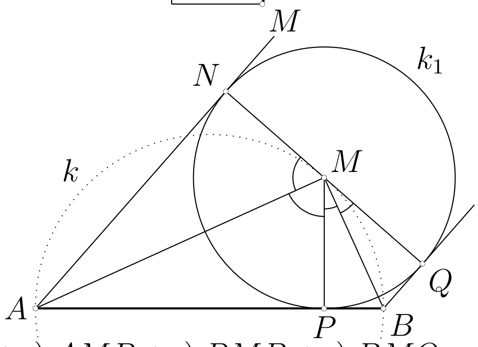
REŠITVE NALOG Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA

I/1. Ker je p praštevilo, ločimo 2 možnosti: p deli x ali pa y. Oglejmo si najprej možnost, ko p deli x. Tedaj lahko zapišemo $x = px'$ (x' je pozitivno število) in tako dobimo $px' - 5 = x'y$, kar zapišemo kot $x'(p - y) = 5$. Potem je $x' = 1$ in $y = p - 5$ ali $x' = 5$ in $y = p - 1$. Toda $x = p$ in $y = p - 5$ je rešitev le takrat, ko je $p > 5$, $x = 5p$ in $y = p - 1$ pa pri vsakem p.

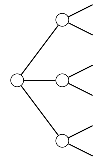
Poglejmo še primer, ko p deli y. Tedaj je $y = py'$ in tako $x - 5 = xy'$ oziroma $x(1 - y') = 5$. Ta enačba nima rešitev, saj sta x in y' pozitivni števili.

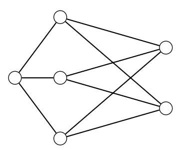


I/2. Ker sta Metka in Tine enako oddaljena od lipe, velja $60 + x = \sqrt{80^2 + x^2}$. Če obe strani enačbe kvadriramo in nato enačbo uredimo, dobimo $120x = 2800$, od tod pa izrazimo $x = \frac{70}{3}$ m. Vsak izmed njiju bo do srečanja prehodil $83\frac{1}{3}$ m.



I/3. Krožnica k_1 se dotika premera AB v točki P, tangente iz A v točki N in tangente iz B v točki Q. Trikotnika AMN in AMP sta skladna, saj sta pravokotna ter imata skupno hipotenuzo AM in skladni kateti MN in MP. Torej sta kota $\sphericalangle NMA$ in $\sphericalangle AMP$ skladna. Po enakem razmisleku sta skladna tudi kota $\sphericalangle PMB$ in $\sphericalangle BMQ$. Po Talesovem izreku je $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMP + \sphericalangle PMB$ pravi kot, od koder sledi, da je $\sphericalangle NMQ$ iztegnjeni kot $\sphericalangle NMQ = \sphericalangle NMA + \sphericalangle AMP + \sphericalangle PMB + \sphericalangle BMQ = 2(\sphericalangle AMP + \sphericalangle PMB) = 2 \cdot \sphericalangle AMB$. Torej je NQ premer krožnice k_1, tangenti AN in BQ pa sta vzporedni, saj sta nanj pravokotni.





I/4. Izberimo 1 sobo. Iz nje vodijo 3 rovi v 3 nove sobe, iz vsake od njih pa vodita še 2 rova, kot kaže prva slika na desni. Če bi povezali 2 nezaključena rova na tej sliki, bi dobili 3 sobe, ki so paroma povezane. Torej obstajata vsaj še 2 sobi. Dokazali smo, da je sob vsaj 6. Druga slika na desni pa potrjuje, da jih je lahko natanko 6.

II/1. Iz $\frac{m}{n} = \frac{m+k}{n \cdot k}$ izrazimo $m = \frac{k}{k-1}$. Ker je m naravno število, mora biti $k = 2$, tako da je tudi $m = 2$. Zaradi $\frac{1}{3} < \frac{2}{n} < 1$ mora biti $2 < n < 6$. Vse možne rešitve so $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$ in $\frac{2}{5}$.

II/2. Naj bosta ulomka $\frac{r}{2003}$ in $\frac{p}{q}$, pri čemer smemo predpostaviti, da je ulomek $\frac{p}{q}$ okrajšan. Če zapišemo

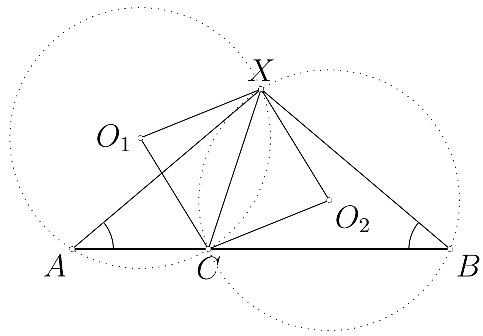
$$\frac{r}{2003} + \frac{p}{q} = a \qquad \text{in} \qquad \frac{r}{2003} \cdot \frac{p}{q} = b,$$

sta a in b celi števili. Izrazimo

$$q \cdot r + 2003 \cdot p = 2003 \cdot q \cdot a, \qquad r \cdot p = 2003 \cdot q \cdot b.$$

Iz prve enačbe razberemo, da 2003 deli r ali q, ker je 2003 praštevilo. Če 2003 deli r, potem je $\frac{r}{2003}$ celo število in prav tako $\frac{p}{q}$, saj je $\frac{p}{q} = a - \frac{r}{2003}$. Obravnavajmo še primer, ko 2003 ne deli r. Tedaj 2003 deli p zaradi druge enačbe, zaradi prve enačbe pa deli tudi q. To je nemogoče, ker smo predpostavili, da je $\frac{p}{q}$ okrajšan ulomek. Torej primer, ko 2003 ne deli r, sploh ni možen.

II/3. Ker leži točka X na simetrali daljice AB, je $|AX| = |BX|$ in je zato $\sphericalangle CAX = \sphericalangle XBC$. Torej sta enaka tudi središčna kota $\sphericalangle CO_1X = \sphericalangle XO_2C$. Trikotnika XO_1C in CO_2X sta enakokraka, z osnovnico XC in enakima kotoma pri vrhovih O_1 in O_2. Torej sta skladna in je zato $|O_1C| = |O_2C|$.



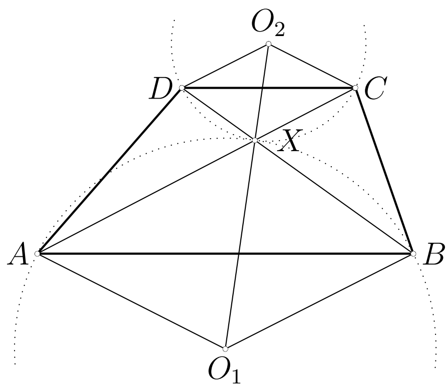
II/4. Ker je število 354 deljivo s 3, je tudi vsota njegovih števk in zato število požrtih ovc deljivo s 3. Tudi vsako naslednje leto, ko se pošast zbudi, je torej deljivo s 3. Pošast se leta 2003 ne more zbuditi, saj 2003 ni deljivo s 3; torej tudi danes, 12. aprila 2003, ne more biti pred vrati.

III/1. Ker ima polinom p cele koeficiente, $x-y$ deli $p(x)-p(y)$. Potem je $p(2003)-p(3) = (2003-3)k$ in $p(2003) = 2000k+2$. Torej da $p(2003)$ pri deljenju s 4 ostanek 2 in ne more biti popolni kvadrat.

III/2. Označimo $\sphericalangle BAX = \alpha$ in $\sphericalangle DCX = \beta$. Potem je $\sphericalangle BO_1X = 2\alpha$ in $\sphericalangle DO_2X = 2\beta$, od koder izračunamo

$$\sphericalangle O_1XB = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \text{in} \quad \sphericalangle O_2XD = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

saj je O_1BX enakokraki trikotnik z vrhom O_1 in O_2DX enakokraki trikotnik z vrhom O_2. Torej je $\alpha = \beta$ natanko tedaj, ko je $\sphericalangle O_1XB = \sphericalangle O_2XD$. Iz konstrukcije pa vidimo, da je $\sphericalangle O_1XB = \sphericalangle O_2XD$ natanko tedaj, ko so točke O_1, X in O_2 kolinearne. Ta pogoj pa je ekvivalenten pogoju, da se krožnici s polmeroma O_1X in O_2X v točki X dotikata.



III/3. Denimo, da imamo na voljo rdečo, modro, zeleno, rumeno, oranžno in belo barvo. Kocke postavimo tako, da imajo spodnjo mejno ploskev pobarvano z belo barvo. Za zgornjo ploskev imamo na voljo katero koli izmed preostalih 5 barv.
Sedaj se vprašamo, koliko kock ima lahko zgornjo ploskev pobarvano z neko izbrano barvo (denimo oranžno). Te kocke postavimo tako, da imajo nepobarvano prednjo, zadnjo, levo in desno mejno ploskev. Z rumeno barvo pobarvamo zadnjo mejno ploskev posamezne kocke. Vsako izmed teh kock namreč lahko zavrtimo tako, da ima zadnjo ploskev rumeno, ne da bi pri tem spremenili barvo zgornje in spodnje ploskve. Preostale 3 mejne ploskve lahko pobarvamo na 6 načinov (npr. 3 barve imamo na voljo za desno mejno ploskev in 2 barvi za sprednjo mejno ploskev).
Vseh možnosti je torej $5 \cdot 6 = 30$. Pobarvamo lahko največ 30 kock, če želimo, da bo vsaka izmed njih drugačne barve.

III/4. Ker je število 666 deljivo z 9, je tudi vsota njegovih števk in zato število požrtih ovc deljivo z 9. Tudi vsako naslednje leto, ko se pošast zbudi, je torej deljivo z 9. Pošast se ne more zbuditi ne leta 2003 ne leta 3003.

IV/1. Vsota prvih i členov zaporedja je

$$s_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_i = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \ldots + (a_1+(i-1)d) = i \cdot a_1 + \frac{(i-1)i}{2} \cdot d$$

in podobno $s_j = j \cdot a_1 + \frac{(j-1)j}{2} \cdot d$ ter $s_k = k \cdot a_1 + \frac{(k-1)k}{2} \cdot d$. Vstavimo v izraz in izračunamo

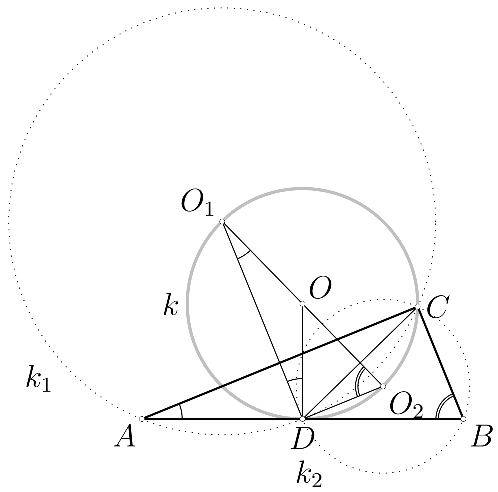
$$\frac{i \cdot a_1 + \frac{(i-1)i}{2} \cdot d}{i}(j-k) + \frac{j \cdot a_1 + \frac{(j-1)j}{2} \cdot d}{j}(k-i) + \frac{k \cdot a_1 + \frac{(k-1)k}{2} \cdot d}{k}(i-j) =$$

$$= a_1(j-k+k-i+i-j) + \frac{d}{2}((i-1)(j-k)+(j-1)(k-i)+(k-1)(i-j)) =$$

$$= \frac{d}{2}(ij-ik-j+k+jk-ji-k+i+ki-kj-i+j) = 0.$$

IV/2. Ker je v vsaki vrsti 6 sedežev, imamo $2^6 = 64$ različnih možnosti posedanja potnikov v posamezni vrsti. Ker lahko za vsakega izmed 64 načinov posedanja najdemo njemu komplementarnega (tj. takega, ki ima zasedene natanko tiste sedeže, ki so v dani vrsti nezasedeni), lahko iz 32 komplementarnih parov sestavimo 32 polno zasedenih vrst. Torej bi bilo v letalu s 64 vrstami $6 \cdot 32 = 192$ potnikov. Ker pa ima naše letalo le 62 vrst, izpustimo najmanj zasedeni vrsti: prazno vrsto in vrsto z 1 potnikom. V letalu z 62 vrstami je lahko največ $192 - 1 = 191$ potnikov.

IV/3. Označimo s k krožnico, ki se dotika stranice AB v D in na kateri leži točka C. Naj bo O središče krožnice k. Potem so točke O, O_1 in O_2 kolinearne, saj ležijo na simetrali daljice CD. Označimo $\sphericalangle BAC = \alpha$. Potem je središčni kot $\sphericalangle DO_1C$ krožnice k enak 2α. Ker je trikotnik ADC enakokrak, je $\sphericalangle BDC = 2\alpha$, zato po izreku o kotu med tetivo DC in tangento AB krožnice k točka O_1 leži na tej krožnici. Podobno tudi točka O_2 leži na krožnici k. Dokazali smo že, da so točke O, O_1 in O_2 kolinearne, zato je O_1O_2 res premer krožnice k.



IV/4. Maček se lahko postavi tako, da nanj zalajajo vsi psi hkrati.
Naj bosta A in B psa, ki sta med seboj najbolj oddaljena. Področje na sliki je presek krogov s središčema v A in B in polmerom $|AB|$. Izven tega območja ni nobenega psa. Če se maček postavi v točko M, ki je razpolovišče daljice AB, so vsi psi od njega oddaljeni za največ $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |AB| \leq 50 \cdot \sqrt{3} < 90$ m.