Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

50. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Kočevje, 22. april 2006

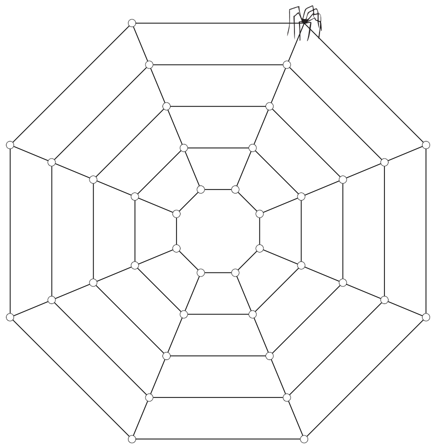
Naloge za 1. letnik

1. Naj bosta a in b realni števili, za kateri velja $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}=1$. Dokaži, da je
$$\frac{a}{1+b^2}-\frac{b}{1+a^2}=a-b.$$

2. Določi vse pare tujih si naravnih števil m in n, za katere je $\dfrac{5m-n}{m+n}$ naravno število.

3. Naj bo I središče včrtane krožnice trikotnika ABC, A_1, B_1 in C_1 pa pravokotne projekcije točke I na stranice BC, AC in AB. Premica skozi razpolovišči daljic AC_1 in AB_1 ter premica skozi razpolovišči daljic CB_1 in CA_1 se sekata v točki D. Dokaži, da pravokotna projekcija točke D na stranico AC razpolavlja to stranico.

4. Pajek je spletel mrežo, sestavljeno iz oglišč in daljic, ter se postavil v oglišče na zunanjem robu mreže (glej sliko). Počakal bo, da se bo v vsa druga oglišča ujela po 1 muha. Nato se bo odpravil na prav poseben sprehod: šel bo mimo 25 oglišč in v 26. oglišču pojedel muho, če je do tedaj še ni pojedel, nato bo šel spet mimo 25 oglišč in v 26. pojedel muho, če je do tedaj še ni pojedel, itd. Največ koliko muh bo lahko pajek pojedel?



Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

50. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Kočevje, 22. april 2006

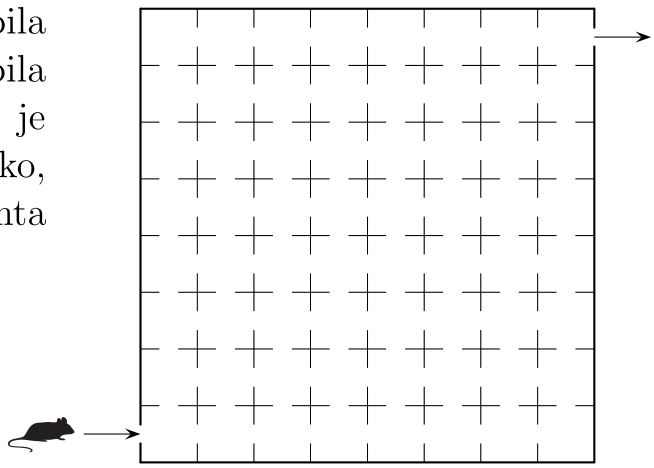
Naloge za 2. letnik

1. Za koliko naravnih števil n, manjših od 2006, je število $n^4 - 1$ deljivo z 9?

2. Reši sistem enačb
$$x^2 + 4xy + 4y^2 = 16,$$
$$x^2 - 2xy + 4y^2 = 52.$$

3. Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ s središčema S_1 in S_2 se sekata v točkah A in B. Premica S_1A seka krožnico $\mathcal{K}_2$ še v točki C_1 in krožnico $\mathcal{K}_1$ še v točki D_1, premica S_2A pa seka krožnico $\mathcal{K}_1$ še v točki C_2 in krožnico $\mathcal{K}_2$ še v točki D_2. Označimo razpolovišče daljice D_1D_2 z E. Dokaži, da točke S_1, S_2, C_1, C_2, B in E ležijo na isti krožnici.

4. Miška je skozi označeni vhod vstopila v labirint razsežnosti 8×8, izstopila pa skozi označeni izhod. Ali se je lahko sprehodila skozi labirint tako, da je šla skozi vsako polje labirinta natanko enkrat?



Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

50. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Kočevje, 22. april 2006

Naloge za 3. letnik

1. Dokaži, da enačba $x^4 + ax^2 + a^3 = 1$ nima samih realnih rešitev za nobeno vrednost realnega parametra a.

2. Poišči vsa taka naravna števila a, b in c, da je $a \geq b \geq c$, število a deli $b + c$, število b deli $c + a$, število c pa deli $a + b$.

3. V trikotniku ABC je $\angle BAC > \angle CBA$. Naj bo D presečišče simetrale kota ACB s stranico AB, O_1 in O_2 pa središči trikotnikoma ADC in BCD očrtanih krožnic. Označimo z E presečišče premice O_1O_2 s stranico AC, s F pa točko na stranici BC, da je $|CF| = |AE|$. Dokaži, da točke A, B, O_2, E in F ležijo na isti krožnici.

4. Dana je kvadratna tabela velikosti $n \times n$, pri čemer je n liho število. V vsakem polju tabele je napisano število, katerega absolutna vrednost je manjša od 1. Vsota števil v vsakem kvadratu velikosti 2×2 je enaka 0. Dokaži, da absolutna vrednost vsote vseh števil v tabeli ni večja od n.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

50. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Kočevje, 22. april 2006

Naloge za 4. letnik

1. Dokaži, da je
$$1+\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^3+(\sqrt{2})^4+\ldots+(\sqrt{2})^n > 2\sqrt[4]{2}\cdot(\sqrt{2^{n+1}}-1).$$

2. Naj bo I središče včrtane krožnice trikotnika ABC, M pa razpolovišče njegove stranice AB. Poišči najmanjšo možno velikost kota $\angle CIM$, če je $|CI|=|MI|$.

3. Jernej je zapisal neko trimestno število. Nato je izbrisal eno izmed njegovih števk in na to mesto zapisal poljubno števko, da je dobil drugo število. Poišči vsa trimestna števila, za katera s takšno menjavo števke ni možno dobiti trimestnega števila, deljivega s 7.

4. Ali obstaja takih pet točk v prostoru, da sta za vsako naravno število n, $n\in\{1,\ldots,10\}$, dve izmed njih med seboj oddaljeni n enot?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

50. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Kočevje, 22. april 2006

Rešitve nalog

I/1. Če v prvi enačbi odpravimo ulomke, dobimo $ab + a + ab + b = a + b + ab + 1$ in od tod $ab = 1$. Sledi

$$\frac{a}{1+b^2} - \frac{b}{1+a^2} = \frac{a + a^3 - b - b^3}{(1+a^2)(1+b^2)} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2+1)}{1+a^2+b^2+a^2b^2} = \frac{(a-b)(a^2+b^2+2)}{a^2+b^2+2} = a - b.$$

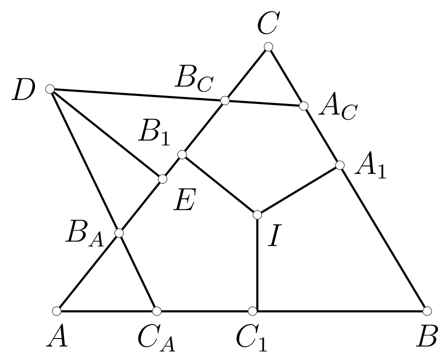
I/2. Veljati mora $\frac{5m-n}{m+n} = k$ za neko naravno število k, torej je

$$(5-k)m = (k+1)n.$$

Desna stran enačbe je naravno število, zato je naravno število tudi leva stran, kar pomeni, da je $5 > k$. Če je $k = 4$, dobimo $m = 5n$ in ker sta m in n tuji, sledi $m = 5$, $n = 1$. Pri $k = 3$ dobimo $m = 2n$ in od tod $m = 2$, $n = 1$. Če je $k = 2$, sledi $m = n$ in potem $m = 1$, $n = 1$. Ostane le še možnost, da je $k = 1$. Tedaj je $4m = 2n$ in zato $m = 1$, $n = 2$.

Nalogo torej rešijo štirje pari naravnih števil (m, n), in sicer $(5,1)$, $(2,1)$, $(1,1)$ ter $(1,2)$.

I/3. Označimo z B_A, B_C, A_C in C_A razpolovišča daljic AB_1, CB_1, CA_1 in AC_1, z E pa pravokotno projekcijo točke D na AC. Naj bo r polmer včrtane krožnice trikotnika ABC, $b = |AC|$ in $x = |AB_1|$. Ker je $\angle AIB_1 = \angle C_AB_AA = \angle DB_AE$ in $\angle AB_1I = \angle DEB_A = \frac{\pi}{2}$, sta si trikotnika AIB_1 in DB_AE podobna. Zato velja



$$\frac{|DE|}{|EB_A|} = \frac{|AB_1|}{|B_1I|} = \frac{x}{r}.$$

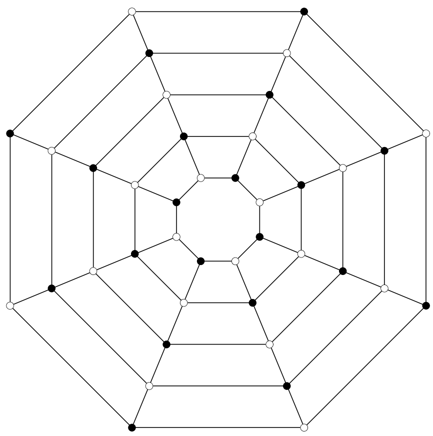
Podobno sledi, da sta si tudi trikotnika CIB_1 in DB_CE podobna, od koder dobimo

$$\frac{|DE|}{|EB_C|} = \frac{|CB_1|}{|B_1I|} = \frac{b-x}{r}.$$

Če ti dve enačbi delimo, dobimo $\frac{|EB_A|}{|EB_C|} = \frac{b-x}{x}$ oziroma $|EB_A| = \frac{b-x}{x}|EB_C|$. Ker je $|EB_A| + |EB_C| = |B_AB_C| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{b}{2}$, dobimo $\frac{b-x}{x}|EB_C| + |EB_C| = \frac{b}{2}$ in od tod $|EB_C| = \frac{x}{2}$. Torej je res

$$|CE| = |CB_C| + |B_CE| = \frac{1}{2}|CB_1| + \frac{x}{2} = \frac{b-x}{2} + \frac{x}{2} = \frac{b}{2}.$$

I/4. Pobarvajmo oglišča mreže izmenično z belo in črno barvo (glej sliko). Katerikoli sosednji oglišči sta različnih barv. Ker gre pajek mimo 25 oglišč in pride v 26. oglišče, je le-to iste barve, kot je bilo oglišče, iz katerega se je napotil. Torej ne more pojesti nobene muhe na belem oglišču. Iz poljubnega črnega oglišča se lahko pajek premakne na sosednje črno oglišče tako, da gre najprej mimo vmesnega belega oglišča do tega črnega, nato pa iz tega oglišča dvanajstkrat v sosednje belo oglišče in nazaj. Tako pride iz črnega oglišča mimo 25 oglišč do poljubnega sosednjega črnega oglišča in postopoma obišče vsa črna oglišča. Pajek torej poje največ 19 muh, saj se je na začetku sam nahajal na črnem oglišču, v katerega se ni ujela nobena muha.



II/1. Zapišimo $n^4 - 1 = (n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$. Ker so ostanki števila n^2 pri deljenju z 9 le 0, 1, 4 in 7, število $n^2 + 1$ ne more biti deljivo z 9. Števili $n - 1$ in $n + 1$ se razlikujeta za 2, zato je lahko le eno izmed njiju deljivo s 3. Ker pa je njun produkt deljiv z 9, je torej z 9 deljivo natanko eno izmed števil $n - 1$ in $n + 1$. Če je to $n - 1$, je $n = 9k + 1$ za nek $k \geq 0$, sicer pa je $n = 9l - 1$ za nek $l \geq 1$. Veljati mora še $n < 2006$, kar v prvem primeru pomeni $9k + 1 < 2006$ oziroma $k < 222 + \frac{7}{9}$, v drugem pa $l < 223$. Tako imamo $0 \leq k \leq 222$ in $1 \leq l < 223$, zato je skupno 445 takšnih števil.

II/2. Iz razlike enačb dobimo $6xy = -36$ oziroma $xy = -6$. Zato je

$$x^2 + 4y^2 = 16 - 4xy = 16 - 4 \cdot (-6) = 40.$$

Če izrazimo $x = -\frac{6}{y}$ in vstavimo v pravkar dobljeno enačbo, dobimo $\frac{36}{y^2} + 4y^2 = 40$ oziroma

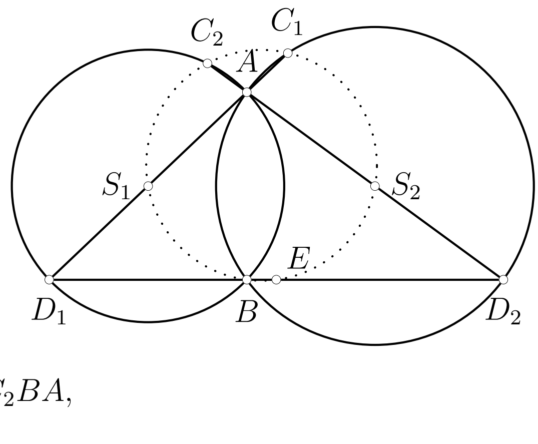
$$y^4 - 10y^2 + 9 = 0.$$

Dobili smo kvadratno enačbo za y^2, ki jo lahko razcepimo kot $(y^2 - 9)(y^2 - 1) = 0$ oziroma

$$(y - 3)(y + 3)(y - 1)(y + 1) = 0.$$

Torej je y enak enemu izmed števil $-3, -1, 1, 3$, x pa izračunamo iz $x = -\frac{6}{y}$. Pari rešitev so tako $(2, -3), (-2, 3), (6, -1)$ in $(-6, 1)$.

II/3. Po Talesovem izreku o kotu v polkrogu vemo, da so točke C_1, C_2 in B nožišča višin trikotnika D_1D_2A. Torej ležijo točke C_1, C_2, D_1 in D_2 na isti krožnici s središčem v točki E. Zaradi zveze med obodnim in središčnim kotom v tej krožnici velja



$$2\angle C_2D_1C_1 = \angle C_2EC_1 = 2\angle C_2D_2C_1.$$

Podobno v $\mathcal{K}_1$ velja

$$\frac{1}{2}\angle C_2S_1A = \angle C_2BA,$$

v $\mathcal{K}_2$ pa

$$\frac{1}{2}\angle AS_2C_1 = \angle ABC_1.$$

Poleg tega dobimo še

$$\angle C_2S_1C_1 = \angle C_2S_1A = 2\angle C_2D_1A = 2\angle C_2D_1C_1 = \angle C_2EC_1$$

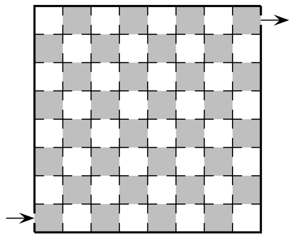
in analogno

$$\angle C_2S_2C_1 = \angle C_2EC_1.$$

Sedaj izračunamo še

$$\begin{aligned}\angle C_2BC_1 &= \angle C_2BA + \angle ABC_1 = \\ &= \frac{1}{2}(\angle C_2S_1A + \angle AS_2C_1) = \frac{1}{2}(\angle C_2S_1C_2 + \angle C_2S_2C_1) = \\ &= \frac{1}{2}(2\angle C_2EC_1) = \angle C_2EC_1)\end{aligned}$$

Torej so točke S_1, S_2, C_1, C_2, B in E res konciklične.



II/4. Pobarvajmo labirint z dvema barvama, kot kaže slika. Miška v 1. koraku stopi na osenčeno polje. Ker miška stopi na osenčeno polje na vsakem lihem koraku, na 64. koraku ne more stopiti na osenčeno polje tik pred izhodom iz labirinta. Miška se torej ne more sprehoditi skozi labirint na predpisan način.

III/1. Označimo $y = x^2$ in enačbo prepišimo v obliko $y^2 + ay + a^3 - 1 = 0$. Če naj ima enačba $x^4 + ax^2 + a^3 = 1$ štiri realne rešitve, mora imeti enačba $y^2 + ay + a^3 - 1 = 0$ dve nenegativni realni rešitvi: y_1 in y_2. Po Vietovih pravilih dobimo $y_1+y_2 = -a$ in $y_1y_2 = a^3-1$. Torej mora veljati $-a \geq 0$ in $a^3 - 1 \geq 0$, od koder dobimo protislovje $1 \leq a \leq 0$. Enačba torej v nobenem primeru nima štirih realnih rešitev.

2. Rešitev Označimo $y = x^2$. Ničli enačbe $y^2 + ay + a^3 - 1 = 0$ sta

$$y_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4(a^3-1)}}{2}, \quad y_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4(a^3-1)}}{2}.$$

Da bo imela prvotna enačba štiri realne rešitve, mora biti $y_1 \geq 0$ in $y_2 \geq 0$. Ker je $\sqrt{a^2 - 4(a^3-1)} \geq 0$, iz pogoja $y_2 \geq 0$ sledi $-a \geq 0$ oziroma $a \leq 0$. Iz $y_2 \geq 0$ pa sledi $-a \geq \sqrt{a^2 - 4(a^3-1)}$, od koder s kvadriranjem dobimo še $a^2 \geq a^2 - 4a^3 + 4$ oziroma $4a^3 \geq 4$. Torej mora biti $a \geq 1$, kar nas skupaj z $a \leq 0$ vodi v protislovje.

III/2. Ker a deli $b + c$, b deli $c + a$ in c deli $a + b$, lahko zapišemo $b + c = ka$, $c + a = lb$ in $a + b = mc$ za neka naravna števila k, l, m. Iz pogoja $a \geq b \geq c$ sledi $ka = b + c \leq 2a$, zato $k \in \{1, 2\}$.

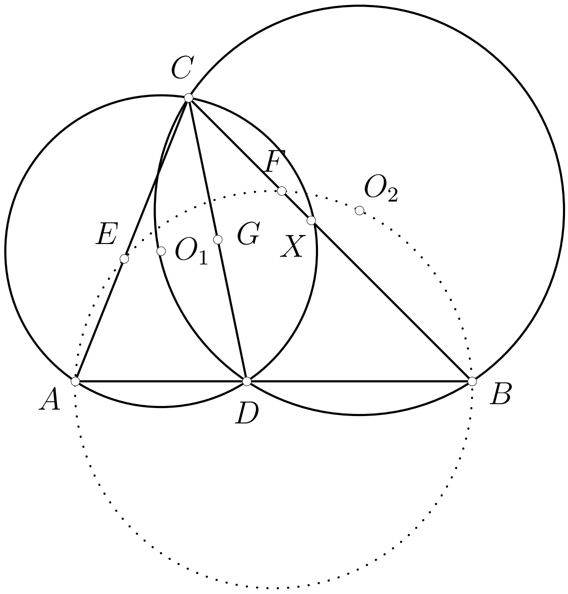
Če je $k = 2$, je $a = b = c$.

Če je $k = 1$, je $b + c = a$. Zaradi $c + a = lb$ velja $c + b + c = lb$ oziroma $2c = (l-1)b$. Ker pa je $b \geq c$, sledi $2c = (l-1)b \geq (l-1)c$, torej je $2 \geq l - 1$ in zato $l \in \{1, 2, 3\}$.

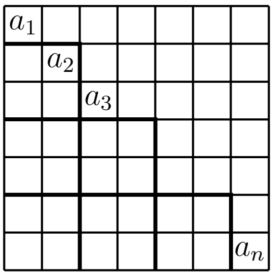
Iz $l = 1$ sledi $c = 0$, kar ni možno. Pri $l = 2$ dobimo $b = 2c$ in $a = 3c$. Če pa je $l = 3$, sledi $b = c$ in $a = 2b$.

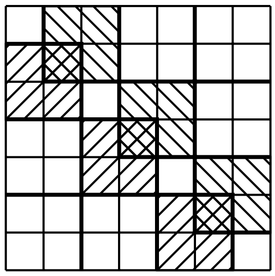
Vse rešitve so trojice (c, c, c), $(3c, 2c, c)$ in $(2c, c, c)$, kjer je c poljubno naravno število.

III/3. Naj bo G razpolovišče daljice CD. Trikotnika EGC in EGD sta pravokotna s pravim kotom pri G in imata para skladnih stranic, to je $|EG| = |EG|$ in $|GC| = |GD|$, zato sta skladna. Torej je $|ED| = |EC|$. Ker je $\angle DCE = \frac{\gamma}{2}$, velja $\angle DEC = \pi - \gamma$, zato je $\angle AED = \gamma$. Torej se trikotnika AED in FCE ujemata v kotu $\angle AED = \gamma = \angle FCE$ in v priležnih stranicah, zato sta skladna. Tako je $\angle CFE = \alpha$, zato je $\angle EFB = \pi - \alpha$. Potem velja $\angle EFB + \angle EAB = \pi - \alpha + \alpha = \pi$, zato je $ABEF$ tetivni štirikotnik. Pokažimo, da tudi O_2 leži na tej krožnici. Po izreku o središčnem in obodnem kotu sledi $\angle DO_2B = 2\angle DCB = 2\frac{\gamma}{2} = \gamma$ in $\angle DO_2G = \frac{\angle DO_2C}{2} = \frac{2\angle DBC}{2} = \beta$, zato je $\angle BO_2E = \angle BO_2D + \angle DO_2G = \gamma + \beta = \pi - \alpha = \angle BFE$ in tudi O_2 leži na krožnici, očrtani štirikotniku $ABEF$.



III/4. Označimo diagonalne elemente od levega zgornjega do desnega spodnjega kota po vrsti z a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Tabelo pokrijmo z 2×2 kvadrati na naslednji način. Najprej $\frac{n-1}{2}$ kvadratov postavimo v prva dva stolpca tako, da pokrijejo vsa polja od druge do zadnje vrstice, nato v sosednja dva stolpca postavimo $\frac{n-1}{2} - 1$ kvadratov, da pokrijejo vsa polja od tretje do zadnje vrstice in tako nadaljujemo. Nato 2×2 kvadrate na enak način postavimo še v desni zgornji kot.





Tako so vsa polja pokrita natanko enkrat, razen polj na diagonali. Polja označena z $a_1, a_3, \ldots, a_n$ niso pokrita, polja označena z $a_2, a_4, \ldots, a_{n-1}$ pa so pokrita dvakrat. Označimo vsoto vseh števil v tabeli s S. Torej je $S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_n$ in velja

$$|S| = |a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \ldots + |a_n| \leq n.$$

IV/1. Leva stran enačbe je vsota končne geometrijske vrste in je zato

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{8} + \sqrt{16} + \ldots + \sqrt{2^n} = \frac{\sqrt{2^{n+1}} - 1}{\sqrt{2} - 1}.$$

Če ulomek racionaliziramo, dobimo

$$\frac{\sqrt{2^{n+1}} - 1}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2^{n+1}} - 1)(\sqrt{2} + 1).$$

Neenakost med aritmetično in geometrijsko sredino, ki se za pozitivni števili a in b glasi $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, nam da

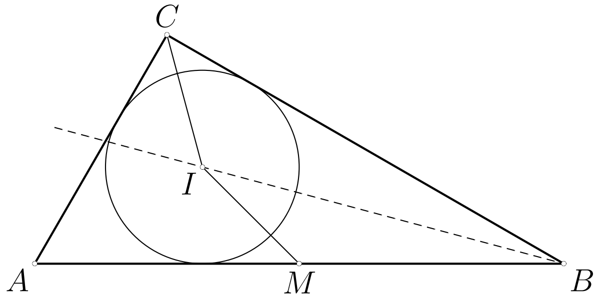
$$\frac{1+\sqrt{2}}{2} > \sqrt[4]{2}$$

oziroma $1+\sqrt{2} > 2 \cdot \sqrt[4]{2}$. Torej je

$$(\sqrt{2^{n+1}}-1)(\sqrt{2}+1) > 2 \cdot \sqrt[4]{2}(\sqrt{2^{n+1}}-1),$$

kar je bilo potrebno dokazati.

IV/2. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je $|AC| < |BC|$. Ker sta $\angle ACI$ in $\angle AMI$ ostra kota ter sta dve stranici in en kot skladna, sta trikotnika ACI in AMI skladna. Torej je $|AC| = |AM|$ in $\angle ACI = \angle IMA$. Zato je



$$\begin{aligned}\angle CIM &= 2\pi - (\angle CIA + \angle AIM) = \\ &= \angle BAC + \angle IMA + \angle ACI = \\ &= \angle BAC + \angle ACB = \\ &= \pi - \angle CBA.\end{aligned}$$

Ker BC seka krožnico s središčem A in polmerom $|AM|$ v C, je kot $\angle CBA$ največji, ko je BC tangenta na to krožnico. Tedaj je ABC pravokotni trikotnik s pravim kotom v C in $|AB| = 2|AC|$, torej je $\angle CBA = \frac{\pi}{6}$. Najmanjša možna vrednost kota $\angle CIM$ je torej $\frac{5\pi}{6}$.

IV/3. Denimo najprej, da trimestno število $\overline{abc}$ ni deljivo s 7. Potem da pri deljenju s 7 ostanek k. Če je $c \geq k$, zamenjamo enice s števko $c-k$. Število $\overline{ab(c-k)} = \overline{abc} - k$ je potem deljivo s 7. Če pa je $c < k$, zamenjamo števko c s števko $c+7-k$. Res je $c+7-k$ število med 0 in 9, saj je $0 \leq c < c+7-k < k+7-k = 7$. Menjava je torej možna za vsa števila, ki niso deljiva s 7.

Oglejmo si sedaj trimestna števila $\overline{abc}$, deljiva s 7. Če števko a zamenjamo z $a \pm k$, $k \neq 0$, je število $\overline{(a\pm k)bc} = \overline{abc} \pm k \cdot 100$ deljivo s 7 natanko tedaj, ko je k deljivo s 7. Enako sklepamo, če menjamo števki b in c. Iz trimestnega števila, deljivega s 7, dobimo po menjavi trimestno število, deljivo s 7, natanko takrat, ko eni izmed števk prištejemo ali odštejemo 7. Če menjava ni možna, imamo torej trimestno število $\overline{abc}$, deljivo s 7, kjer je $3 \leq a \leq 7$ in $3 \leq b, c \leq 6$. Takšna števila med 333 in 366 so 336, 343 in 364, med 433 in 466 sta taki števili 434 in 455, med 533 in 566 sta to 546 in 553, med števili 633 in 666 sta takšni 644 in 665, med 733 in 766 pa so iskana števila 735, 756 in 763.

IV/4. Odgovor je ne. Denimo, da takih pet točk obstaja. Vseh različnih parov točk je natanko 10 in ravno toliko je vseh dolžin, zato za vsako celo število med 1 in 10 obstaja natanko en par točk, ki sta oddaljeni za to dolžino.

Označimo s P in R točki, ki sta med seboj oddaljeni 1 enoto. Naj bo X ena izmed ostalih treh točk. Privzamemo lahko $|PX| < |RX|$, torej $|PX|+1 \leq |RX|$. Po trikotniški neenakosti pa velja $|PX| + |PR| \geq |RX|$, torej $|PX| + 1 \geq |RX|$. Zato mora veljati $|PX| + 1 = |RX|$ in so točke P, R in X kolinearne. Torej je vseh 5 točk kolinearnih.

Naj bosta sedaj A in B točki, ki sta med seboj oddaljeni 10 enot. Postavimo številsko premico tako, da bo točka A ležala na koordinati 0, točka B pa na koordinati 10. Vemo že, da vse ostale točke ležijo na celoštevilskih koordinatah med A in B. Naj bo C točka, ki tvori par z razdaljo 9 enot. Točka C leži na koordinati 1 ali 9. Privzamemo lahko, da leži na koordinati 1. Ker razdalja 1 pripada paru točk (A, C) in ni nobenega drugega para z razdaljo 1, nobena izmed preostalih točk ne more ležati na koordinatah 2 in 9. Tedaj točka D, ki tvori par z razdaljo 8, leži le na koordinati 8. Ker nobena izmed točk ne more ležati na koordinatah, ki so od že postavljenih točk oddaljene za 1 ali 2, leži zadnja točka E na koordinati 4. Pri tej postavitvi noben par točk ne tvori razdalje 5 enot, zato takih 5 točk ne obstaja.