Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

51. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Maribor, 21. april 2007

Naloge za 1. letnik

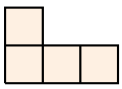
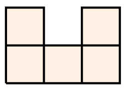
1. Poišči vsa realna števila x, za katera velja

$$\Big|\Big|\big|\,|x|-2\big|-20\Big|-200\Big| = 2007.$$

2. Poišči vse pare naravnih števil m in n, katerih vsota je 2007, njun zmnožek pa je deljiv z 2007.

3. Označimo z D razpolovišče stranice AB ostrokotnega trikotnika ABC. Naj bosta A' in B' taki točki na daljicah AC in BC, da sta trikotnika ADA' in DBB' enakokraka s skupnim vrhom v D. Pokaži: če je premica CD pravokotna na premico $A'B'$, je trikotnik ABC enakokrak.

4. Poišči najmanjše naravno število n, za katero lahko brez prekrivanja pokrijemo tabelo razsežnosti $n \times n$ z enakim številom ploščic

 in .

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

51. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Maribor, 21. april 2007

Naloge za 2. letnik

1. Poišči vse pare naravnih števil m in n, za katere ima kvadratna enačba

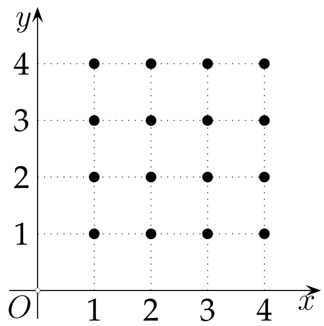
$$2007x^2 + mnx + n = 0$$

samo eno rešitev. Za vsak tak par rešitev tudi zapiši.

2. V trimestnem številu so stotice večje od desetic in desetice večje od enic. Če števke tega trimestnega števila zapišemo v obratnem vrstem redu in dobljeno število prištejemo prvotnemu, dobimo število, ki vsebuje samo lihe števke. Določi vsa trimestna števila, za katera to velja.

3. Dan je ostrokotni trikotnik ABC in središče njemu očrtane krožnice O. Naj bo O_1 točka na simetrali daljice AB, ki leži na nasprotnem bregu premice AB kot točka O. Označimo krožnico s središčem O_1 in polmerom AO_1 s $\mathcal{K}$. Naj premici CA in CB sekata krožnico $\mathcal{K}$ še v točkah A_1 in B_1. Pokaži: če se daljici A_1B in AB_1 sekata na trikotniku ABC očrtani krožnici, je štirikotnik AO_1BO tetiven.

4. V ravnini leži 16 črnih točk, kot prikazuje slika. Najmanj koliko izmed teh točk moramo pobarvati rdeče, da ne bo obstajal kvadrat z oglišči v preostalih črnih točkah in s stranicami, vzporednimi koordinatnima osema? Odgovor utemelji.



Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

51. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Maribor, 21. april 2007

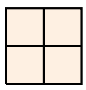
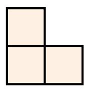
Naloge za 3. letnik

1. Poišči vsa praštevila p, za katera je število $7^{p-2} + 9p^4$ popoln kvadrat.

2. Dokaži, da za nobeno realno število x ne velja
$$\frac{1}{9} < \frac{\tan 3x}{\tan 2x} \leq \frac{3}{2}.$$

3. Dan je paralelogram $ABCD$. Naj bo E razpolovišče daljice CD, F razpolovišče DA ter G razpolovišče AB. Trikotniku DFE očrtana krožnica se dotika daljice AB v točki G. Dokaži, da je $|AB| = \sqrt{2}|AD|$.

4. Poišči najmanjše naravno število n, za katero lahko brez prekrivanja pokrijemo tabelo razsežnosti $n \times n$ z enakim številom ploščic

 in .

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

51. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Maribor, 21. april 2007

Naloge za 4. letnik

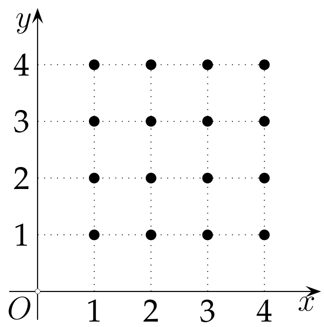
1. Dokaži, da za vsa realna števila x in y velja neenakost
$$\cos(x^2) + \cos(y^2) - \cos(xy) < 3.$$

2. Za celo število x velja
$$\Big|\ldots\Big|\Big|\,|\,x-1\,|-10\,\Big|-10^2\,\Big|-\ldots-10^{2006}\Big| = 10^{2007}.$$
Poišči stoto števko števila $|x|$.

3. Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ s središčema O_1 in O_2 se sekata v točkah A in B. Razdalja med središčema je večja od polmerov obeh krožnic. Naj bosta C_1 in C_2 tisti presečišči premice O_1O_2 s krožnicama $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, ki ne ležita na daljici O_1O_2. Označimo drugo presečišče premice C_2A in krožnice $\mathcal{K}_1$ z D_1, drugo presečišče premice C_1A in krožnice $\mathcal{K}_2$ pa z D_2.

   Premici D_1B in D_2A se sekata v E, premici D_1A in D_2B pa v F. Pokaži: če je štirikotnik AO_1BO_2 tetiven, je tetiven tudi štirikotnik $AEBF$.

4. V ravnini leži 16 črnih točk, kot prikazuje slika. Najmanj koliko izmed teh točk moramo pobarvati rdeče, da ne bo obstajal kvadrat z oglišči v preostalih črnih točkah in s stranicami, katerih dolžine so naravna števila ali $\sqrt{2}$? Odgovor utemelji.



Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

51. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Maribor, 21. april 2007

Rešitve nalog

I/1. Vrednost izraza $\Big|\big||x|-2\big|-20\Big|-200$ je lahko enaka 2007 ali -2007. Ker je $\Big|\big||x|-2\big|-20\Big|-200 \geq -200$, mora biti $\Big|\big||x|-2\big|-20\Big|-200 = 2007$ in zato je

$$\Big|\big||x|-2\big|-20\Big| = 2207.$$

Od tod sledi, da je $\big||x|-2\big|-20$ enako bodisi 2207 bodisi -2207. Toda ker je $\big||x|-2\big|-20 \geq -20$, mora biti $\big||x|-2\big|-20 = 2207$ in zato je

$$\big||x|-2\big| = 2227.$$

Ker pa $|x|-2$ ne more biti enako -2227, je $|x|-2 = 2227$. Tako dobimo $|x| = 2229$. Rešitvi sta $x = 2229$ in $x = -2229$.

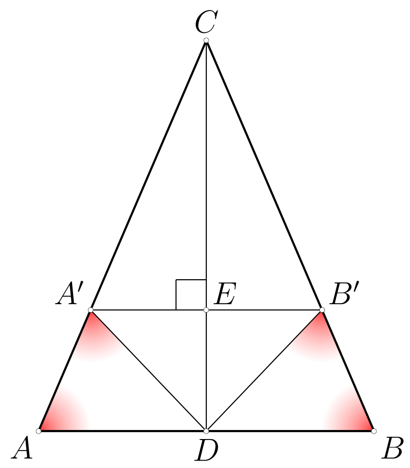
Vrednost izraza $\Big|\big||x|-2\big|-20\Big|-200$ **je lahko enaka** 2007 **ali** -2007 .... **1 točka**
Velja $\Big|\big||x|-2\big|-20\Big|-200 \geq -200$ .... **1 točka**
Sklep $\Big|\big||x|-2\big|-20\Big| = 2207$. .... **1 točka**
Velja $\big||x|-2\big|-20 \geq -20$ .... **1 točka**
Sklep $\big||x|-2\big| = 2227$. .... **1 točka**
Rešitvi sta $x = 2229$ **in** $x = -2229$ .... **1 + 1 točka**

Za reševanje "od znotraj": 2 točki rešitev; 1 točka za obravnavo še kakšnega primera poleg $x = \pm(2+20+200+2007)$**; 2 točki za popolno obravnavo vseh 16 možnosti; 2 točki za preverjanje, da dobljeni** x **ustreza vsem pogojem.**

I/2. Zapišemo lahko enačbi $m+n = 2007$ in $mn = 2007a$, kjer je a neko naravno število. Tedaj je $n = 2007-m$ in dobimo $m(2007-m) = 2007a$ oziroma $2007(m-a) = m^2$. Torej je število m^2 deljivo s številom $2007 = 3^2 \cdot 223$. Od tod sledi, da je m deljivo s $3 \cdot 223$. Zapišimo $m = 3 \cdot 223 \cdot k$, kjer je k neko naravno število. Ker je $m < 2007 = 3 \cdot 3 \cdot 223$, je $k < 3$. Torej je bodisi $m = 3 \cdot 223 \cdot 1 = 669$ bodisi $m = 3 \cdot 223 \cdot 2 = 1338$. V prvem primeru je $n = 1338$, v drugem pa $n = 669$.

Zapis enačb $m+n = 2007$ **in** $mn = 2007a$ **(ali enakovrednih)** .... **1 točka**
Izražava $m(2007-m) = 2007a$ **in zapis** $2007(m-a) = m^2$ .... **1 točka**
Ugotovitev $2007 \mid m^2$ **(ali** $m-a = 223b^2$**)** .... **1 točka**
Sklep $m = 3 \cdot 223$ .... **1 točka**
Ugotovitev $b < 3$ .... **1 točka**
Rešitvi $m = 669$ **in** $n = 1338$ **ter** $m = 1338$ **in** $n = 669$. .... **1 + 1 točka**

I/3. Ker je D razpolovišče stranice AB, velja $|AD| = |DB|$. Trikotnika ADA' in DBB' sta enakokraka z vrhom D, zato je $|A'D| = |AD| = |BD| = |B'D|$ in je trikotnik $A'DB'$ enakokrak z vrhom D. Označimo z E presečišče $A'B'$ in CD. Če je DE pravokotna na $A'B'$, velja $|A'E| = |EB'|$, saj je trikotnik $A'DB'$ enakokrak. V trikotniku $A'B'C$ je CE višina, hkrati pa točka E razpolavlja $A'B'$, zato je ta trikotnik enakokrak. Velja

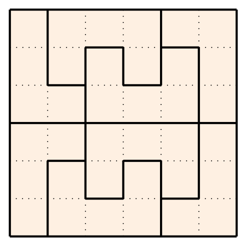


$$
\begin{aligned}
\sphericalangle BAC &= \sphericalangle DA'A = \pi - \sphericalangle DA'B' - \sphericalangle B'A'C = \\
&= \pi - \sphericalangle DB'A' - \sphericalangle A'B'C = \\
&= \sphericalangle DB'B = \sphericalangle ABC,
\end{aligned}
$$

zato je trikotnik ABC res enakokrak.

Sklep $|AD| = |DB|$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da je $|A'D| = |AD| = |BD| = |B'D|$ .... **1 točka**
Sklep, da je trikotnik $A'DB'$ **enakokrak** .... **1 točka**
Sklep $|A'E| = |EB'|$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da je trikotnik enakokrak $A'B'C$ .... **1 točka**
Izračun kotov in sklep, da je trikotnik ABC **enakokrak** .... **1 točka**

I/4. Denimo, da porabimo k vsakih ploščic. Tedaj pokrijemo $4k + 5k = 9k$ polj, torej mora veljati $n^2 = 9k$. Od tod sledi, da je n^2 deljivo z 9 oziroma n je deljivo s 3. Če je $n = 3$, imamo tabelo velikosti 3×3, na katero očitno ne moremo postaviti obeh ploščic, da se ne bi prekrivali. Torej je $n \geq 2 \cdot 3 = 6$. Ker pa kvadrat velikosti 6×6 lahko pokrijemo z uporabo po štirih ploščic vsake oblike (kot prikazuje slika), je $n = 6$ najmanjše tako število.



Ugotovitev $n^2 = 9k$ .... **1 točka**
Sklep $n = 3\ell$ **(ali** k **je popoln kvadrat)** .... **2 točki**
Dokaz, da $n = 3$ **ne ustreza** .... **1 točka**
Sklep, da je $n \geq 6$ .... **1 točka**
Dokaz, da $n = 6$ **ustreza (npr. s sliko)** .... **2 točki**

II/1. Enačba ima dvojno ničlo natanko tedaj, ko je diskriminanta enaka 0, torej

$$0 = (mn)^2 - 4 \cdot n \cdot 2007 = n(m^2 n - 4 \cdot 2007).$$

Od tod sledi $m^2 n = 4 \cdot 2007 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 223$. Ker je 223 praštevilo, mora biti delitelj števila n. Pišimo $n = 223n'$. Tedaj velja

$$m^2 n' = (2 \cdot 3)^2.$$

Ločimo štiri možnosti. Število m je namreč lahko enako 1, 2, 3 ali 6. V prvem primeru je $n = 4 \cdot 2007$, enačba pa $2007(x^2 + 4x + 4) = 0$ z dvojno ničlo $x = -2$. Pri $m = 2$ sledi $n = 2007$ ter $2007(x^2 + 2x + 1) = 0$, tu dobimo $x = -1$. Pri $m = 3$ je $n = 4 \cdot 223$ ter enačba $223(9x^2 + 12x + 4) = 0$, torej $x = -\frac{2}{3}$. Nazadnje imamo še $m = 6$, $n = 223$ ter $223(9x^2 + 6x + 1) = 0$ in torej $x = -\frac{1}{3}$.

Zapis, da je diskriminanta enaka 0 .... **1 točka**
Razcep na prafaktorje .... **1 točka**
Sklep, da je 233 delitelj števila n .... **1 točka**
Obravnavanje možnosti $m=1$**,** $m=2$**,** $m=3$ **in** $m=6$ **ter izračun pripadajočih rešitev** -2**,** -1**,** $-\frac{2}{3}$ **in** $-\frac{1}{3}$ .... **1 točka**

II/2. Označimo trimestno število z $\overline{abc}$. Veljati mora $a>b>c$, poleg tega pa je število $\overline{abc}+\overline{cba}=10^2(a+c)+10(2b)+(a+c)$ sestavljeno iz samih lihih števk. Če je $a+c<10$, je števka na mestu desetic soda, kar ni možno. Zato mora biti $a+c\geq 10$. Ker je še število $a+c$ liho, je torej $a+c\geq 11$. Pišimo $a+c=10+l$, kjer je l liho število. Tedaj je

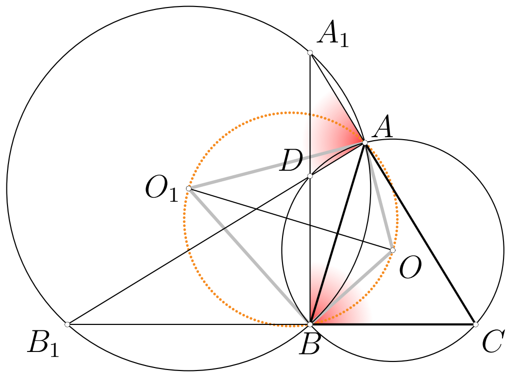
$$\overline{abc}+\overline{cba}=10^3+10^2l+10(2b+1)+l.$$

Od tod sledi, da je $2b+1<10$, saj bo nasprotnem primeru števka na mestu stotic soda. Torej je $2b<9$ in zato $b\leq 4$.

Zaradi $c<b\leq 4$ sledi $c\leq 3$. Torej je $a+c\leq 9+3=12$. Pokazali pa smo že, da je $a+c$ liho in vsaj 11, torej je $a+c=11$. Če je $c=2$ in $a=9$, je b lahko 3 ali 4, pri $c=3$ in $a=8$ pa je možno le $b=4$.

Vsa takšna števila so 843, 932 in 942.

Ugotovitev, da sta a **in** c **različnih parnosti** .... **1 točka**
Ugotovitev $a+c\geq 10$ .... **1 točka**
Ugotovitev $b\leq 4$ .... **1 točka**
Ugotovitev $c\leq 3$ .... **1 točka**
Posamezna rešitev .... **1 + 1 + 1 točka**



II/3. Naj bo D presečišče premic A_1B in AB_1 ter označimo $\sphericalangle A_1AB_1=\alpha$. Tedaj je $\sphericalangle CAD=\pi-\sphericalangle DAA_1=\pi-\alpha$. Ker so točke A,C,B in D konciklične, je $\sphericalangle CBD=\pi-\sphericalangle CAD=\pi-(\pi-\alpha)=\alpha$. Zato je $\sphericalangle A_1BB_1=\pi-\sphericalangle DBC=\pi-\alpha$.

Obodna kota $\sphericalangle A_1AB_1$ in $\sphericalangle A_1BB_1$ nad tetivo A_1B_1 v krožnici $\mathcal{K}$ sta enaka, zato je $\pi-\alpha=\sphericalangle A_1BB_1=\sphericalangle A_1AB_1=\alpha$, od koder sledi $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Označimo še $\sphericalangle ACB=\gamma$. Tedaj je $\sphericalangle AOB=2\sphericalangle ACB=2\gamma$. Po drugi strani pa je $\sphericalangle AB_1C=\pi-\sphericalangle B_1AC-\sphericalangle ACB_1=\pi-\frac{\pi}{2}-\gamma=\frac{\pi}{2}-\gamma$, zato je $\sphericalangle AO_1B=2\sphericalangle AB_1B=2\sphericalangle AB_1C=2(\frac{\pi}{2}-\gamma)=\pi-2\gamma$. Od tod sledi

$$\sphericalangle AOB+\sphericalangle BO_1A=2\gamma+(\pi-2\gamma)=\pi,$$

torej je štirikotnik $AOBO_1$ res tetiven.

Vsaj ena izmed enakosti $\sphericalangle AOB=2\sphericalangle ACB$**,** $\sphericalangle AO_1B=2\sphericalangle AB_1B$ .... **1 točka**
V1: Dokaz tetivnosti $ACBD$ **in enakost** $\sphericalangle CBD+\sphericalangle CAD=\pi$ .... **1 točka**
V1: Sklep $\sphericalangle A_1BB_1+\sphericalangle A_1AB_1=\pi$ .... **1 točka**
V1: Dokaz tetivnosti A_1ABB_1 **in enakost** $\sphericalangle A_1BB_1=\sphericalangle A_1AB_1$ .... **1 točka**
V2: Dokaz tetivnosti A_1ABB_1 **in enakost** $\sphericalangle A_1BB_1=\sphericalangle A_1AB_1$ .... **1 točka**
V2: Sklep $\sphericalangle CBD=\sphericalangle DAC$ .... **1 točka**

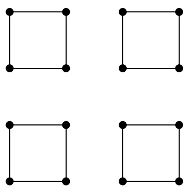
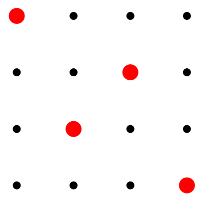
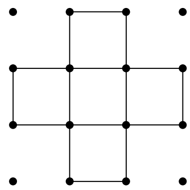
V2: Dokaz tetivnosti $ACBD$ in enakost $\sphericalangle CBD + \sphericalangle CAD = \pi$ .... 1 točka
Sklep $\sphericalangle A_1AB_1 = \sphericalangle A_1BB_1 = \frac{\pi}{2}$ .... 1 točka
Izračun $\sphericalangle AB_1C = \frac{\pi}{2} - \gamma$ .... 1 točka
Izračun $\sphericalangle AO_1B = \pi - 2\gamma$ in ugotovitev, da je $\sphericalangle AO_1B + \sphericalangle AOB = \pi$ .... 1 točka

II/4.

1. način Pobarvati moramo najmanj štiri točke. V mrežo namreč lahko vrišemo štiri disjunktne kvadrate kot na prvi sliki. Ker mora biti v vsakem vsaj eno oglišče pobarvano z rdečo, potrebujemo vsaj 4 rdeče točke.

Pokažimo, da je to tudi dovolj. Pobarvajmo točke kot prikazuje druga slika. V mreži imamo en sam kvadrat velikosti 3×3, ki ima očitno rdeči dve oglišči. Poleg tega imamo štiri kvadrate velikosti 2×2 in vsak ima natanko eno oglišče rdeče.

Ostane še 9 kvadratov velikosti 1×1. Štiri smo narisali že na prvi sliki in izmed teh ima jasno vsak vsaj eno oglišče rdeče. Ostalih 5 je narisanih na tretji sliki in vsi imajo vsaj eno rdeče oglišče.

Dokaz, da potrebujemo vsaj 4 rdeče točke .... 4 točke
Zapisana pravilna konfiguracije 4 rdečih točk .... 2 točki
Dokaz, da ta konfiguracija ustreza (zapsis: ‘konfiguracija ustreza‘ NE zadošča) ... 1 točka
Opomba: Na drugi sliki je narisana ena izmed možnosti, kako lahko pobarvamo točke rdeče. Tekmovalec lahko nariše tudi kakšno drugo konfiguracijo in dokaz prilagodi tej konfiguraciji.

2. način Najprej vsaki točki priredimo **potencial**, ki naj bo število kvadratov, ki imajo eno od oglišč v tej točki. Zunanjih dvanajst točk ima potencial 3, notranje štiri pa 5:

3	3	3	3
3	5	5	3
3	5	5	3
3	3	3	3

Da je potrebno pobarvati vsaj 4 točke, sedaj s pomočjo potencialov vidimo takole. Z barvanjem treh točk (ali manj) bi izločili kvečjemu

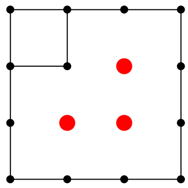
(a) 3+3+3=9

(b) 3+3+5=11

(c) 3+5+5=13

(č) 5+5+5=15

kvadratov. Vseh kvadratov je $1+4+9=14$, zato lahko možnosti (a), (b) in (c) takoj izločimo, možnost (č) pa je tudi neustrezna, saj nam pri barvanju treh notranjih točk ostane največji kvadrat in še en najmanjši kvadrat:



Torej moramo pobarvati vsaj 4 točke. Dokaz sklenemo kot v prvem načinu.

Vpeljava potenciala .... 1 točka
Utemeljitev, da barvanje treh (ali manj) točk ne zadošča .... 3 točke
Zapisana pravilna konfiguracije 4 rdečih točk .... 2 točki
Dokaz, da ta konfiguracija ustreza (zapsis: 'konfiguracija ustreza' NE zadošča) ... 1 točka
Opomba: Na drugi sliki je narisana ena izmed možnosti, kako lahko pobarvamo točke rdeče. Tekmovalec lahko nariše tudi kakšno drugo konfiguracijo in dokaz prilagodi tej konfiguraciji.

III/1. Naj bo $7^{p-2}+9p^4=m^2$. Potem je $7^{p-2}=m^2-9p^4=(m-3p^2)(m+3p^2)$. Torej je $m-3p^2=7^r$ in $m+3p^2=7^{p-r-2}$ za nek $r\geq 0$ in velja $p-r-2>r$. Enakosti odštejemo in dobimo $6p^2=7^r(7^{p-2r-2}-1)$. Torej je $p=7$ ali $r=0$. Prvi primer je res rešitev, saj dobimo $m=196$.

V drugem primeru pa je $6p^2+1=7^{p-2}$. Očitno $p=2$, $p=3$ in $p=5$ niso rešitve, zato naj bo $p>7$. Ker je $6p^2=7^{p-2}-1=(7-1)(7^{p-3}+7^{p-4}+\ldots+7^1+1)$, mora veljati $p^2=7^{p-3}+7^{p-4}+\ldots+7^1+1$. Vemo, da se premica z enačbo $y=x$ in eksponentna funkcija 7^{x-1} sekata pri $x=1$. Za $x>1$ pa eksponentna funkcija narašča hitreje. Torej je $7^{x-1}\geq x$ oziroma $7^x\geq 7x$. Zato lahko za $p>7$ ocenimo

$$\begin{aligned}
p^2 &= 7^{p-3}+7^{p-4}+\ldots+7^1+1\geq\\
&\geq 7(p-3)+7(p-4)+\ldots+7\cdot 1+1=\\
&= 7((p-3)+(p-4)+\ldots+1)+1=\\
&= 7\frac{(p-3)(p-2)}{2}+1>p^2+\frac{5(p^2-7p)}{2}=\\
&= p^2+\frac{5p(p-7)}{2}>p^2.
\end{aligned}$$

V tem primeru ni rešitev, torej je $p=7$ edino praštevilo, pri katerem je število $7^{p-2}+9p^4$ popoln kvadrat.

Zapis $7^{p-2}=(m-3p^2)(m+3p^2)$ **........ 1 točka**
Ugotovitev $m-3p^2=7^r$ **in** $m+3p^2=7^{p-r-2}$ **in sklep** $6p^2=7^r(7^{p-2r-2}-1)$ **.... 2 točki**
Sklep $p=7$ **ali** $r=0$ **........ 1 točka**
Sklep $m=196$ **........ 1 točka**
Ocena $7^x\geq 7x$ **........ 1 točka**

Izpeljava protislovja za $p > 7$. .... **1 točka**

III/2. 1. način Uvedimo novo spremenljivko $a = \tan^2 x$. Ker je $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ in $\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$, je $\frac{\tan 3x}{\tan 2x} = \frac{(3-a)(1-a)}{2(1-3a)}$, zato lahko neenakost prepišemo v

$$\frac{1}{9} < \frac{(3-a)(1-a)}{2(1-3a)} \leq \frac{3}{2}. \tag{1}$$

Denimo najprej, da je $1 - 3a > 0$. Tedaj iz neenakosti (1) sledi

$$(3-a)(1-a) \leq 3(1-3a)$$

oziroma $a(a+5) \leq 0$. Ker je $a = \tan^2 x$, velja $a \geq 0$ ter $a + 5 > 0$. Zato bi moralo veljati $a = 0$, kar pa ni možno, saj je v tem primeru $\tan 2x = 0$ in izraz $\frac{\tan 3x}{\tan 2x}$ sploh ni definiran. Torej neenakost (1) ne more biti izpolnjena, ko je $1 - 3a > 0$, zato naj bo $1 - 3a < 0$. Tedaj dobimo

$$\frac{2(1-3a)}{9} > (3-a)(1-a),$$

kar je enakovredno $0 > (5-3a)^2$. Tudi ta neenakost ni izpolnjena za nobeno število a, torej ne obstaja tak x, da bi veljalo

$$\frac{1}{9} < \frac{\tan 3x}{\tan 2x} \leq \frac{3}{2}.$$

2. način S pomočjo adicijskih izrekov lahko zapišemo $\tan 3x = \frac{\sin x(3\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos x(\cos^2 x - 3\sin^2 x)}$ in $\tan 2x = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$. Torej je

$$\frac{\tan 3x}{\tan 2x} = \frac{(2\cos^2 x - 1)(4\cos^2 x - 1)\sin x}{2\cos^2 x(4\cos^2 x - 1)\sin x}.$$

Če je $\sin x = 0$, izraz ni definiran, sicer pa lahko $\sin x$ okrajšamo. Uvedimo novo spremenljivko $a = \cos^2 x$. Zaradi $\sin x \neq 0$ sledi $a < 1$. Neenakost lahko prepišemo v

$$\frac{1}{9} < \frac{(2a-1)(4a-1)}{2a(4a-3)} \leq \frac{3}{2}. \tag{2}$$

Če je $4a - 3 > 0$, iz neenakosti (2) sledi

$$(2a-1)(4a-1) \leq 3a(4a-3)$$

oziroma $0 \leq (4a+1)(a-1)$. Očitno je a pozitivno število, ki je manjše od 1, zato je $4a+1$ pozitivno, $a-1$ pa negativno število, torej dobljena neenakost ne drži.

Ostane le še primer, ko je $4a - 3 < 0$. Tedaj iz (2) dobimo neenakost

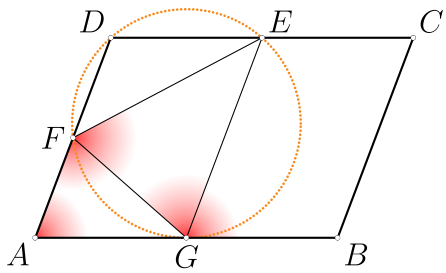
$$\frac{1}{9} 2a(4a-3) > (2a-1)(4a-1),$$

ki jo lahko preoblikujemo v $0 > (8a-3)^2$, kar pa seveda ni možno. Torej neenakost (2) ni izpolnjena za nobeno število a.

Prevedba $\tan 2x$ oz. $\tan 3x$, $\sin 3x$, ..., na enostavne kote .... **1 točka**
Okrajšanje ulomka do oblike $\frac{(\tan x-3)(1-\tan x)}{2(1-3\tan x)}$ oz. $\frac{8\cos^4 x - 6\cos^2 x + 1}{8\cos^4 x - 4\cos^2 x}$ .... **1 točka**

Vpeljava nove spremenljivke . . . . **1 točka**
Pravilno obravnava zgornje ocene . . . . **2 točki**
Pravilno obravnava spodnje ocene . . . . **2 točki**

III/3. 1. način Označimo $\sphericalangle BAD = \alpha$. Potem je $\sphericalangle EGB = \alpha$ ter $\sphericalangle ADE = \pi - \alpha$. Ker je štirikotnik $DEFG$ tetiven, je $\sphericalangle FGE = \alpha$. Zato je $\sphericalangle FGA = \pi - \sphericalangle FGE - \sphericalangle EGB = \pi - 2\alpha$ in $\sphericalangle GFA = \pi - \sphericalangle GAF - \sphericalangle FGA = \pi - \alpha - (\pi - 2\alpha) = \alpha$. Torej je trikotnik AGF enakokrak z vrhom pri G.



Vemo, da je kot med tetivo EG in tangento AB enak obodnemu kotu nad to tetivo. To pomeni, da je $\sphericalangle GFE = \sphericalangle BGE = \alpha$. Zato je tudi trikotnik EFG enakokrak z vrhom pri E. Trikotnika EFG in GAF sta si podobna, zato je $\frac{|EG|}{|FG|} = \frac{|AG|}{|AF|}$. Če označimo $|AB| = a$ in $|AD| = b$, dobimo torej $\frac{b}{a/2} = \frac{a/2}{b/2}$, od koder sledi $2b^2 = a^2$ oziroma $a = \sqrt{2}b$.

Smiselna uporaba tetivnosti $DEFG$ . . . . **1 točka**
Trikotnik AGF **enakokrak** . . . . **1 točka**
Kot med tetivo in tangento v točki G . . . . **1 točka**
Trikotnik FGE **enakokrak** . . . . **2 točki**
Podobnost EFG **in** GAF . . . . **1 točka**
Zaključni sklep . . . . **1 točka**

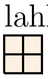
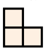
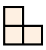
2. način Nalogo lahko na kratko rešimo s pomočjo potence točke na krožnico (s katero so zagotovo seznanjeni udeleženci priprav na MMO in bralci elektronske revije Brihtnež). Če jo zapišemo za točko A in trikotniku DEF očrtano krožnico, dobimo

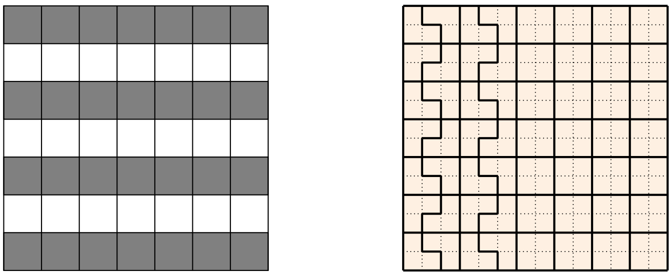
$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

Torej velja $|AG|^2 = |AF| \cdot |AD|$, od koder po definiciji točk G in F sledi, da je

$$\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 = \frac{|AD|}{2} \cdot |AD|$$

oziroma $|AB| = \sqrt{2}|AD|$.

III/4. Denimo, da porabimo k vsakih ploščic. Potem pokrijemo $4k + 3k = 7k$ polj, torej mora veljati $n^2 = 7k$. Od tod sledi, da je n^2 deljivo s 7 oziroma n je deljivo s 7. Če je $n = 7$, imamo tabelo velikosti 7×7, ki je ne moremo pokriti na predpisan način. Recimo, da to lahko naredimo. Pobarvajmo tabelo z dvema barvama kot prikazuje slika. Vsaka ploščica  pokrije dve črni in dve beli polji, zato 7 takih ploščic pokrije 14 črnih in 14 belih polj. Torej mora 7 ploščic  pokriti $28 - 14 = 14$ črnih in $21 - 14 = 7$ belih polj, zato vsaka ploščica  pokrije sodo število črnih polj. Slednje pa očitno ni možno, saj je v vsaki vrstici liho črnih polj.



Torej je $n \geq 2 \cdot 7 = 14$. Ker pa kvadrat velikosti 14×14 lahko pokrijemo z uporabo po 28 ploščic vsake oblike (kot prikazuje slika), je $n = 14$ najmanjše tako število.

Ugotovitev $n^2 = 7k$ .... **1 točka**
Utemeljitev $n = 7\ell$ .... **1 točka**
Domneva $n = 14$ .... **1 točka**
Dokaz, da $n = 14$ **ustreza (npr. s sliko)** .... **1 točka**
Uvedba pasovnega barvanja .... **2 točki**
Sklep, da $n = 7$ **ne ustreza** .... **1 točka**

IV/1. Ker za vsako realno število α velja $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, je $\cos x^2 \leq 1$, $\cos y^2 \leq 1$ in $-\cos xy \leq 1$. Sledi

$$\cos x^2 + \cos y^2 - \cos xy \leq 3.$$

Pokazati moramo, da ne more veljati enačaj. Denimo, da velja. Potem je $\cos x^2 = 1$, $\cos y^2 = 1$ in $\cos xy = -1$, zato je $x^2 = 2k\pi$, $y^2 = 2l\pi$ in $xy = \pi + 2m\pi$ za neka cela števila k, l in m. Potem pa velja

$$(\pi + 2m\pi)^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = 2k\pi \cdot 2l\pi,$$

torej je $(1 + 2m)^2 = 4kl$. V tej enačbi je leva stran liho število, desna pa sodo. Dobili smo protislovno enačbo, kar pomeni, da enačaj ne more veljati.

Ugotovitev $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ .... **1 točka**
Sklep $\cos x^2 + \cos y^2 - \cos xy \leq 3.$ .... **1 točka**
Sklep $\cos x^2 = 1$**,** $\cos y^2 = 1$ **in** $\cos xy = -1$ .... **1 točka**
Sklep $x^2 = 2k\pi$**,** $y^2 = 2l\pi$ **in** $xy = \pi + 2m\pi$ .... **1 točka**
Sklep $(\pi + 2m\pi)^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = 2k\pi \cdot 2l\pi$ .... **2 točki**
Poenostavitev $(1 + 2m)^2 = 4kl$ **in sklep, da je ta enačba protislovna** .... **1 točka**

IV/2. Označimo

$$x_n = |\ldots|\,|\,|\,x - 1\,| - 10\,| - 10^2\,| - \ldots - 10^{n-1}| - 10^n.$$

Enačba iz naloge nam torej pove, da velja $|x_{2006}| = 10^{2007}$, torej je $x_{2006} = \pm 10^{2007}$. Ker pa lahko ocenimo

$$x_{2006} = |x_{2005}| - 10^{2006} \geq -10^{2006},$$

od tod sledi, da je $x_{2006} = 10^{2007}$, torej je $|x_{2005}| = 10^{2006} + 10^{2007}$. Nadalje iz $x_{2006} = |x_{2004}| - 10^{2005} \geq 10^{2005}$ sledi $x_{2006} = 10^{2006} + 10^{2007}$ in je zato

$$|x_{2004}| = 10^{2005} + 10^{2006} + 10^{2007}.$$

Podobno sklepamo naprej. Če že vemo, da je

$$x_n = 10^{n+1} + 10^{n+2} + \ldots + 10^{2007},$$

sledi $x_{n-1} = \pm(10^{n+1} + 10^{2007-n+1} + \ldots + 10^{2007})$. Zaradi $x_{n-1} = |x_n| - 10^n \geq -10^n$ dobimo, da je

$$x_{n-1} = 10^n + 10^{n+1} + \ldots + 10^{2007}.$$

Torej je $|x-1| = 10 + 10^2 + \ldots + 10^{2007}$, od koder sledi

$$x = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{2007} = \underbrace{11\ldots1}_{2008}$$

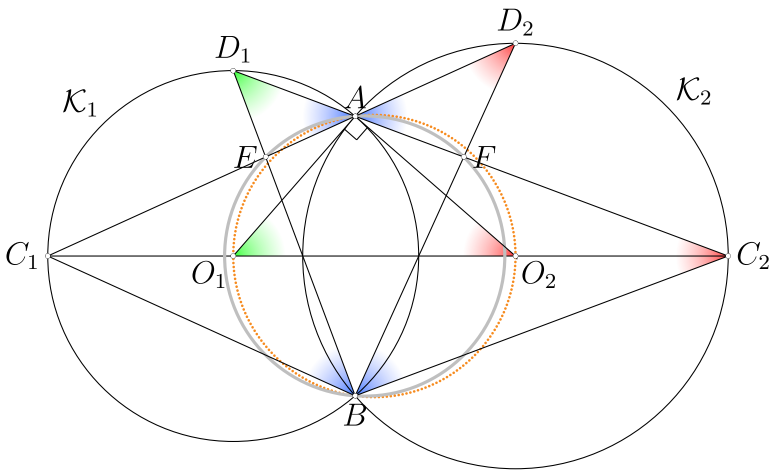
ali

$$x = 1 - 10 - 10^2 - \ldots - 10^{2007} = -(\underbrace{11\ldots1}_{2007}0 - 1) = -\underbrace{11\ldots1}_{2006}09.$$

Stota števka števila $|x|$ je v obeh primerih enaka 1.

Vpeljava $x_n = |\ldots| \, | \, | \, x - 1 \, | - 10 \, | - 10^2 \, | - \ldots - 10^{n-1}| - 10^n$. .... **1 točka**
Dokaz $x_{2006} = 10^{2007}$ .... **2 točki**
Induktivni sklep $|x-1| = 10 + 10^2 + \ldots + 10^{2007}$ .... **2 točki**
Rešitev $x = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{2007} = \underbrace{11\ldots1}_{2008}$ .... **1 točka**
Rešitev $x = 1 - 10 - 10^2 - \ldots - 10^{2007} = -\underbrace{11\ldots1}_{2006}09$. .... **1 točka**

IV/3. Ker je štirikotnik AO_1BO_2 tetiven in leži središče njemu očrtane krožnice na simetrali tetive AB, torej na daljici O_1O_2, po Talesovem izreku sledi $\sphericalangle O_1AO_2 = \sphericalangle O_2BO_1 = \frac{\pi}{2}$.



Naj bo $\sphericalangle AO_2O_1 = \alpha$. Potem je $\sphericalangle AO_2B = 2\alpha$. To pa je središčni kot nad tetivo AB v krožnici $\mathcal{K}_2$, zato je enak dvakratniku obodnega kota $\sphericalangle AD_2B$ oziroma $\sphericalangle AC_2B$ nad to tetivo. Torej je $\sphericalangle AD_2B = \sphericalangle AC_2B = \alpha$.

Velja še $\sphericalangle AO_1O_2 = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle O_1O_2A = \frac{\pi}{2} - \alpha$, zato je $\sphericalangle AO_1B = 2 \sphericalangle AO_1O_2 = \pi - 2\alpha$ in $\sphericalangle BC_1A = \sphericalangle BD_1A = \frac{1}{2} \sphericalangle AO_1B = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

V deltoidu AC_1BC_2 poznamo $\sphericalangle AC_1B = \frac{\pi}{2} - \alpha$ in $\sphericalangle AC_2B = \alpha$, zato lahko izračunamo

$$\sphericalangle C_2AC_1 = \sphericalangle C_2BC_1 = \frac{2\pi - \sphericalangle AC_1B - \sphericalangle AC_2B}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

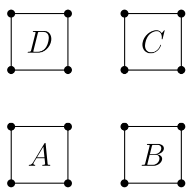
Zato je $\sphericalangle D_1AC_1 = \pi - \sphericalangle C_1AC_2 = \frac{\pi}{4}$ in prav tako $\sphericalangle C_2AD_2 = \sphericalangle D_1AC_1 = \frac{\pi}{4}$. Z upoštevanjem enakosti obodnih kotov dobimo še $\sphericalangle C_2BD_2 = \sphericalangle C_2AD_2 = \frac{\pi}{4}$ in $\sphericalangle D_1BC_1 = \sphericalangle D_1AC_1 = \frac{\pi}{4}$, zato je

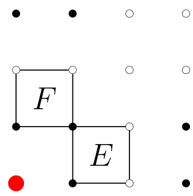
$$\sphericalangle FBE = \sphericalangle C_2BC_1 - \sphericalangle C_2BD_2 - \sphericalangle D_1BC_1 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

torej je $\sphericalangle EAF + \sphericalangle FBE = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$, zato točke A, E, B in F res ležijo na skupni krožnici.

Sklep $\sphericalangle O_1AO_2 = \sphericalangle O_2BO_1 = \frac{\pi}{2}$ .... **1 točka**
Sklep $\sphericalangle AD_2B = \sphericalangle AC_2B = \alpha$ .... **1 točka**
Sklep $\sphericalangle BC_1A = \sphericalangle BD_1A = \frac{1}{2} \sphericalangle AO_1B = \frac{\pi}{2} - \alpha$ .... **1 točka**
Sklep AC_1C_2 **je deltoid in** $\sphericalangle C_2AC_1 = \frac{3\pi}{4}$. .... **1 točka**
Sklep $\sphericalangle C_2BD_2 = \sphericalangle C_2AD_2 = \frac{\pi}{4}$ **in** $\sphericalangle D_1BC_1 = \sphericalangle D_1AC_1 = \frac{\pi}{4}$ .... **1 točka**
Sklep $\sphericalangle FBE = \frac{\pi}{4}$ .... **1 točka**
Sklep $\sphericalangle EAF + \sphericalangle FBE = \pi$ **in zato je** $BFAE$ **tetiven** .... **1 točka**

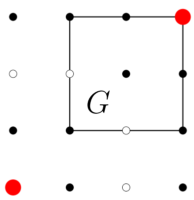
IV/4. Dokazali bomo, da moramo pobarvati pet točk.

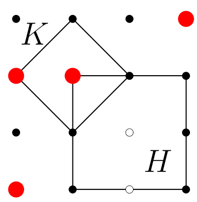




Ker mora biti v vsakem izmed 4 kvadratkov A, B, C, D, označenih na prvi sliki, vsaj eno oglišče rdeče, potrebujemo vsaj 4 rdeče točke. Denimo, da je to že dovolj. Kvadrat velikosti 3×3 ima vsaj eno rdeče oglišče. Predpostavimo lahko, da je to oglišče $(1,1)$. Torej so preostala oglišča kvadrata A črna. Oglejmo si kvadratek E. Ker sta oglišči, ki sta skupni A in E, črni, mora biti rdeče eno od oglišč, skupno B in E. Preostali oglišči v B sta tako črni. Podobno sklepamo še za kvadratka F in D.

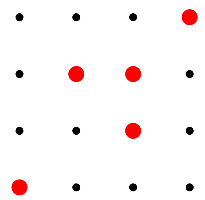
Kvadrat G, ki ga prikazuje tretja skica, ima že 3 črna oglišča, zato mora biti oglišče $(4,4)$ rdeče.





Kvadrata H in K že imata tri črna oglišča, tako morata biti preostali rdeči. To pa je v nasprotju s predpostavko, da je v D le eno rdeče oglišče.

Dokazali smo torej, da mora biti vsaj 5 točk pobarvanih rdeče. Kot kaže spodnja slika, pa 5 rdečih točk tudi zadošča.



Utemeljitev, da potrebujemo vsaj 4 rdeče točke .... 1 točka
Skica ali konstrukcija, da 5 rdečih točk zadošča .... 3 točke
Popolna obravnava vseh primerov in sklep, da 4 rdeče točke niso dovolj .... 3 točke
Opomba: Za vsak izpuščen primer ali sklep "točka je v največjem številu kvadratov, zato jo je najbolje pobarvarti" se odbije po ena točka. Na zadnji sliki je narisana ena izmed možnosti, kako lahko pobarvamo točke rdeče. Tekmovalec lahko nariše tudi kakšno drugo konfiguracijo in dokaz prilagodi tej konfiguraciji.