Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

52. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Ivančna Gorica, 19. april 2008

Naloge za 1. letnik

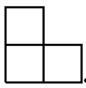
1. Poišči vsa praštevila p in q, za katera je število $2p^2q + 45pq^2$ popoln kvadrat.

2. Dokaži: če za neničelna realna števila a, b in c velja

$$a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) = ab + bc + ca,$$

je vrednost izraza $\dfrac{a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)}{abc}$ celo število.

3. Dane so dolžine stranic trikotnika ABC: $|AB| = 15$ cm, $|BC| = 14$ cm in $|CA| = 13$ cm. Naj bo D nožišče višine na stranico BC, E pa taka točka na tej višini, da je $\angle BAD = \angle DEC$. Presečišče premic AB in CE označimo s F. Izračunaj $|EF|$.

4. Anja ima ploščice oblike , Bojan pa . Izmenično postavljata po 1 ploščico na pravokotno tabelo. Če je na potezi Bojan in ne more postaviti ploščice na tabelo, čeprav je na njej še kak nepokrit kvadratek, zmaga Anja, sicer zmaga Bojan. Dokaži:

   (a) če imata tabelo velikosti 6×9, Bojan ne more zmagati, ne glede na to, kdo začne;

   (b) če imata tabelo velikosti 8×8, lahko Bojan polaga ploščice tako, da bo zmagal ne glede na to, kako bo igrala Anja, in ne glede na to, kdo začne.

   (Opomba: Ploščice morajo v celoti ležati na tabeli, se med seboj ne smejo prekrivati, pokriti pa morajo vsa polja tabele.)

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

52. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Ivančna Gorica, 19. april 2008

Naloge za 2. letnik

1. Poišči vsa realna števila x in y, ki zadoščajo enačbama

$$\begin{aligned} x^3 + 8y^3 &= x + 2y, \\ 2x^2y + 4xy^2 &= x + 2y. \end{aligned}$$

2. (a) Pokaži, da vsota števk števila $10^n + 9n$ ni deljiva z 2007 za nobeno naravno število n.

   (b) Poišči vsaj eno naravno število n, za katero je vsota števk števila $10^n + 9n$ enaka 2008.

3. Na višini na stranico AC enakokrakega trikotnika ABC z vrhom B izberemo točko D tako, da je premica AC tangenta na očrtano krožnico $\mathcal{K}$ trikotnika ABD. Naj bo E taka točka na krožnici $\mathcal{K}$, da je tetiva DE pravokotna na tetivo AB. Dokaži, da sta trikotnika ABE in ABC skladna.

4. Igralca imata kup enakih žetonov, s katerega izmenično jemljeta po enega in ga postavljata na poljubno prazno polje kvadratne tabele velikosti 2008×2008. Zmaga tisti, ki prvi postavi žeton tako, da skupaj s tremi drugimi tvori oglišča pravokotnika, ki ima stranice vzporedne stranicam tabele. Kateri igralec ima zmagovalno strategijo – tisti, ki je igro začel, ali njegov soigralec?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

52. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Ivančna Gorica, 19. april 2008

Naloge za 3. letnik

1. Jaka si je zamislil trimestno število x, ki ima v zapisu različne neničelne števke. Nato je na list napisal vsa druga trimestna števila, ki jih je lahko zapisal s števkami števila x. Določi vsa možna števila x, če je vsota števil na listu enaka 3434.

2. Naj bo D notranja točka stranice BC pravokotnega trikotnika ABC s pravim kotom pri C. Trikotniku ABD očrtano krožnico označimo s $\mathcal{K}$. Naj bo E taka točka na $\mathcal{K}$, da je tetiva DE pravokotna na AB. Dokaži, da je trikotnik AEB enakokrak z vrhom B natanko tedaj, ko je CA tangenta na krožnico $\mathcal{K}$.

3. Za katera naravna števila $n > 1$ doseže izraz
$$\frac{\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 3 \cdots \log_{10} n}{10^{n-1}}$$
najmanjšo vrednost? Kolikšna je ta vrednost?

4. Igralca imata kup enakih žetonov, s katerega izmenično jemljeta po enega in ga postavljata na poljubno prazno polje kvadratne tabele velikosti 2008×2008. Zmaga tisti, ki prvi postavi žeton tako, da skupaj s tremi drugimi tvori oglišča enakokrakega trapeza, ki ni pravokotnik, in katerega osnovnici sta vzporedni enemu izmed robov tabele. Kateri igralec ima zmagovalno strategijo – tisti, ki je igro začel, ali njegov soigralec?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

52. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Ivančna Gorica, 19. april 2008

Naloge za 4. letnik

1. Členi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 geometrijskega zaporedja so naravna števila, manjša od 2008. Število a_2 je deljivo s 5, a_3 je deljivo s 4, a_4 je deljivo s 3, število a_1 pa ni deljivo s 6. Nobeno praštevilo ne deli vseh 5 členov zaporedja. Izračunaj člene tega zaporedja.

2. Poišči vsa realna števila x, za katera je vrednost izraza
$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{5x-x^2}$$
celo število.

3. Na stranici BC pravokotnega trikotnika ABC s pravim kotom pri C izberemo točko D, različno od B in C. Trikotniku ABD očrtano krožnico označimo s $\mathcal{K}$. Naj bo T taka točka na stranici AB, da je DT pravokotna na AB. Premica DT seka krožnico $\mathcal{K}$ še v točki E. Presečišče premic CT in EB označimo s F. Premica DF seka krožnico $\mathcal{K}$ še v točki G. Dokaži, da sta trikotnika CEF in BEG podobna.

4. Naj bo K podmnožica naravnih števil. Za vsaki dve števili a in b iz množice K velja, da a deli b ali b deli a. Dokaži, da je tedaj vsako število c iz množice K večje od vsote vseh tistih števil iz množice K, ki so manjša od c.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

52. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Ivančna Gorica, 19. april 2008

Rešitve nalog

I/1. Najprej denimo, da je $p = q$. Potem mora biti število $47p^3$ popoln kvadrat. Ker je deljivo s 47 in je 47 praštevilo, mora biti deljivo tudi s 47^2, od koder sledi, da 47 deli p^3 oziroma 47 deli p. Toda p je praštevilo, torej mora biti enako 47. Res, pri $p = q = 47$ je število $2p^2q + 45pq^2$ enako 47^4 in je torej popoln kvadrat.

Naj bo sedaj $p \neq q$. Ker je število $2p^2q + 45pq^2 = pq(2p + 45q)$ popoln kvadrat deljiv s p, mora biti deljiv tudi s p^2. Torej p deli $q(2p + 45q)$ oziroma, ker sta p in q tuji, p deli $2p + 45q$. Od tod sledi, da p deli $45q$ oziroma, da p deli 45. Torej je $p = 3$ ali pa $p = 5$. Podobno sklepamo, da q deli $2p + 45q$, od koder sledi, da q deli $2p$ oziroma $q = 2$. Torej je $pq(2p + 45q) = 4p(p + 45)$. Če je $p = 3$, je to število enako $4 \cdot 3 \cdot 48 = 24^2$, pri $p = 5$ pa je enako 4000 in ni popolni kvadrat. Edini rešitvi sta torej $p = q = 47$ in $p = 3$, $q = 2$.

Obravnavanje primera $p = q$ .... **1 točka**
(Prva) rešitev $p = q = 47$ .... **1 točka**
Sklep $2p + 45q = pqm^2$ .... **1 točka**
Sklepi $p \mid 2p + 45q$**,** $p \mid 45$**,** $q = 2$ .... **po 1 točka**
(Druga) rešitev $p = 3$**,** $q = 2$ .... **1 točka**

I/2. Iz dane enačbe sledi $ab + bc + ca = 0$. Zato lahko zapišemo

$$\frac{a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)}{abc} = \frac{a(ab+ac) + b(ba+bc) + c(ca+cb)}{abc}.$$

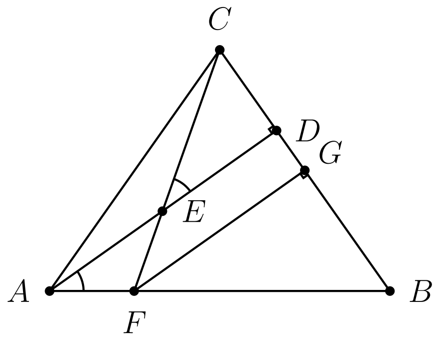
Upoštevamo, da je $ab + ac = -bc$, $ba + bc = -ca$ in $ca + cb = -ab$ in dobimo

$$\frac{a(ab+ac) + b(ba+bc) + c(ca+cb)}{abc} = \frac{a(-bc) + b(-ca) + c(-ab)}{abc} = \frac{-3abc}{abc} = -3.$$

Sklep $ab + bc + ca = 0$ .... **2 točki**
Preblikovanje števca v $a(ab+ac) + b(ba+bc) + c(ca+cb)$ .... **1 točka**
(Bistvena) uporaba pogoja $ab + bc + ca = 0$ .... **1 točka**
Izračun vrednosti izraza (tj. -3**)** .... **3 točke**

(Če je v računu uporabljen $a = -\frac{bc}{b+c}$ **(ali podobno) in ni utemeljeno, da je** $b + c \neq 0$**, se odbije 1 točka.))**

I/3. Najprej izračunajmo dolžini $|AD|$ in $|CD|$. Označimo $|AD| = v$ in $|CD| = x$. Po Pitagorovem izreku je $v^2 = |AC|^2 - x^2 = |AB|^2 - (|BC| - x)^2$, od koder dobimo $13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$ oziroma $13^2 = 15^2 - 14^2 + 2 \cdot 14 \cdot x$. Torej je $x = 5$ in potem $v = 12$.

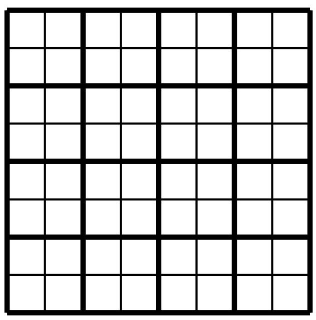


Ker je $\angle BAD = \angle DEC$, je trikotnik EDC je podoben trikotniku ADB. Zato je $\frac{|EC|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AD|}$ in $\angle DBA = \angle ECD$. Sledi $|EC| = \frac{15}{9} \cdot 5 = \frac{25}{3}$ in $\angle FCB = \angle CBF$, torej je trikotnik BFC enakokrak z vrhom B. Zato je $|CF| = |FB|$. Naj bo G razpolovišče BC. Potem je FG pravokotna na BC. Trikotnik FBG je podoben trikotniku ABD, zato velja $\frac{|FB|}{|BG|} = \frac{|AB|}{|BD|}$, torej je $|FB| = \frac{|AB| \cdot |BG|}{|BD|} = \frac{15 \cdot 7}{9} = \frac{35}{3}$.
Dolžina $|EF|$ je enaka $|EF| = |CF| - |CE| = |FB| - |CE| = \frac{35}{3} - \frac{25}{3} = \frac{10}{3}$.

Trikotnika ABD in ECD sta si podobna .... **1 točka**
Trikotnik AFE (ali BFC) je enakokrak .... **1 točka**
Sklep $FG \parallel AD$ .... **1 točka**
Trikotnika FBG in ABD sta si podobna .... **1 točka**
Izračun dolžin $|CD|$, $|BD|$, $|GD|$, $|CE|$, $|ED|$, $|AD|$ .... **2 točki**
Rezultat $|EF| = \frac{10}{3}$ .... **1 točka**

I/4. (a) Tabela 6×9 ima 54 kvadratkov. Če želi zmagati Bojan, morata tabelo pokriti v celoti, saj lahko Anja svoje ploščice polaga dokler je še kakšno prazno polje. Ko bosta Bojan in Anja vsak 13-krat postavila svojo ploščico na tabelo, bosta ostali še $54 - 13 \cdot (1 + 3) = 2$ nepokriti polji. Ne glede na to kdo je začel, tabele ne bosta pokrila do konca, kar pomeni, da bo zmagala Anja.

(b) Tabelo 8×8 lahko razdelimo na 16 kvadratov 2×2 kot prikazuje slika. Če je igro začela Anja, potem v svoji potezi položi svojo ploščico v enega izmed 2×2 kvadratov. Bojan lahko ta kvadrat v svoji potezi zapolni. To lahko stori po vsaki Anjini potezi, dokler ne zapolnita cele tabele. Torej je zmagovalec Bojan.



Če igro začne Bojan, položi svojo ploščico v nek 2×2 kvadrat. V kolikor ga Anja zapolni, v naslednji potezi spet položi svojo ploščico v nek 2×2 kvadrat. Če pa Anja kvadrata 2×2 ne zapolni, potem Bojan v svoji potezi dopolni 2×2 kvadrat, v katerega je Anja položila ploščico. Po 15 potezah je na vrsti Bojan, na tabeli pa je prost bodisi en kvadrat velikosti 2×2 bodisi štirje kvadratki, pri čemer se trije kvadratki nahajajo znotraj istega 2×2 kvadrata. Bojan lahko tako svojo ploščico položi na tabelo, zadnja pa je na potezi Anja, ki mora zapolniti še preostalo prosto polje, kar pomeni, da je zmagal Bojan.

Korektna rešitev dela (a) .... 3 točke
(Če je dokaz nepopoln, ugotovljeno pa je, da so po 2 potezah zasedena 4 nova polja, se prizna 2 točki.)
Korektna rešitev dela (b) .... 4 točke
(Če je dokaz nepopoln, razvidna pa je ideja o delitvi tabele na polja 2×2, se prizna 2 točki.)

II/1. Enačbi lahko prepišemo v obliko

$$\begin{aligned}(x+2y)(x^2-2xy+4y^2) &= x+2y,\\ 2xy(x+2y) &= x+2y.\end{aligned}$$

Očitno vsak par števil x in y, ki zadošča zvezi $x+2y=0$, reši enačbi. Naj bo sedaj $x+2y \neq 0$. Tedaj lahko delimo z $x+2y$ in dobimo $x^2-2xy+4y^2=1$ in $2xy=1$, torej je

$$(x+2y)^2 = x^2+4xy+4y^2 = (x^2-2xy+4y^2)+6xy = 4.$$

Ločimo dve možnosti in sicer je $x+2y=2$ ali pa $x+2y=-2$. V prvem primeru dobimo $1=2xy=2(2-2y)y=4y-4y^2$, torej $0=4y^2-4y+1=(2y-1)^2$. Od tod sledi $y=\frac{1}{2}$ in $x=2-2y=1$. V drugem primeru pa je $x=-2-2y$ in zato velja $1=2xy=2(-2-2y)y=-4y-4y^2$, torej je $0=(2y+1)^2$. Sledi $y=-\frac{1}{2}$ in $x=-1$.

Enačbi tako zadoščajo vsa realna števila x in y, za katera velja $x+2y=0$, poleg teh pa še $x=-1$, $y=-\frac{1}{2}$ in $x=1$, $y=\frac{1}{2}$.

Razcep $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=x+2y$ **.................................. 1 točka**
Razcep $2xy(x+2y)=x+2y$ **.. 1 točka**
Par (x,y)**, kjer** $x=-2y$**, reši sistem .... 1 točka**
Če $x \neq -2y$**, lahko enačbi delimo .... 1 točka**
Ugotovitev $x+2y=\pm 2$ **(ali** $x-2y=0$ **ali** $x^4-2x^2+1=0$**) .... 1 točka**
Rešitvi $(x,y)=(1,\frac{1}{2})$**,** $(x,y)=(-1,-\frac{1}{2})$ **............................ po 1 točka**

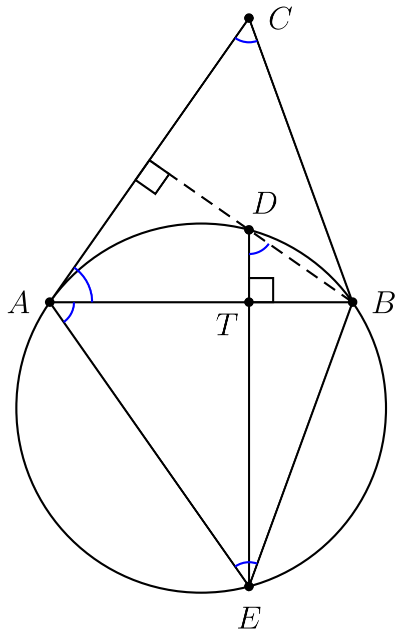
II/2. (a) Število je deljivo z 9 natanko tedaj, ko je vsota njegovih števk deljiva z 9. Recimo, da je vsota števk števila 10^n+9n deljiva z 2007. Ker je 2007 večkratnik števila 9, je potem vsota števk števila 10^n+9n deljiva z 9. To pa pomeni, da je 10^n+9n deljivo z 9, kar pa ne velja.

(b) Naj bo $n=1\ldots1$, kjer v zapisu nastopa 223 enic. Tedaj je $9n=9\ldots9$, kjer v zapisu nastopa 223 devetic. Število 10^n+9n je potem enako $10\ldots09\ldots9$, pri čemer v zapisu nastopa 223 devetic in $n-223=1\ldots1-223$ ničel. Vsota števk tega števila je enaka $1+9\cdot 223=2008$.

Za del (a) se prizna največ 5 točk.
Vsota števk števila 10^n **je** 1 **.. 1 točka**
Vsota števk števila $9n$ **je deljiva z** 9 **.................................... 1 točka**
Vsota števk števila 10^n+9n **je oblike** $9k+1$ **............................ 1 točka**
Sklep: ker število $9k+1$ **ni deljivo z** 9**, tudi ni deljivo z** 2007 **............... 2 točki**

Za del (b) se prizna največ 2 točki.
Pravilen n **. . . . . 2 točki**

II/3. Označimo s T presečišče tetiv DE in AB. Vemo, da je trikotnik DTB pravokotni. Označimo $\angle CAB = \angle ACB = \alpha$. Ker je AC tangenta, je torej kot $\angle CAB$ enak nepriležnemu kotu $\angle AEB$ nad tetivo AB. Zato je $\angle AEB = \alpha$.
Velja tudi, da je $\angle ABD = \frac{\pi}{2} - \alpha$, zato je $\angle TDB = \alpha$. Tako je $\angle EDB = \alpha$ in ta kot je enak $\angle EAB$, saj sta obodna kota nad tetivo BE. Torej je $\angle BAE = \alpha = \angle BEA$, zato je trikotnik ABE enakokrak z vrhom B. Trikotnika ABE in ABC se ujemata v vseh kotih in dolžini skupne in istoležne stranice AB, torej sta skladna.



Izračun $\angle TDB = \alpha$ **. . . . . 2 točki**
Izračun $\angle BAE = \alpha$ **. . . . . 2 točki**
Izračun $\angle BEA = \alpha$ **. . . . . 2 točki**
Sklep, da sta ABE **in** ABC **skladna . . . . 1 točka**

II/4. Zmagovalno strategijo ima drugi igralec. Stolpce razdeli v 1004 parov in sicer sta v prvem paru stolpca 1 in 2, v drugem stolpca 3 in 4, in tako naprej, do zadnjega para, v katerem sta stolpca 2007 in 2008. Kadarkoli da prvi igralec žeton v enega izmed stolpcev, da drugi igralec žeton v isto vrstico drugega stolpca iz para. Najkasneje po 1004 potezah bo moral prvi igralec postaviti žeton v stolpec, kjer se žeton že nahaja. Tedaj bo drugi igralec s postavitvijo žetona tvoril pravokotnik in zmagal.

Opis in dokaz pravilnosti strategije . . . . 7 točk
Če dokaz ni popoln, se za posamezne ugotovitve prizna (neaditivno):
Drugi igralec zmaga, če je v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu zasedeno natanko eno polje . . . . 1 točka
Zapis pravilne strategije brez utemeljitve . . . . do 4 točke
Navedba strategije: drugi igralec postavlja žetone le v eno vrsto . . . . do 2 točki

III/1. Označimo števke števila x z a, b in c, torej $x = \overline{abc}$. Vsa trimestna števila, sestavljena iz števk a, b in c so $\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$, njihova vsota pa je $100(2a+2b+2c)+10(2a+2b+2c)+(2a+2b+2c) = 222(a+b+c)$. Vsota števil na listu je tako enaka

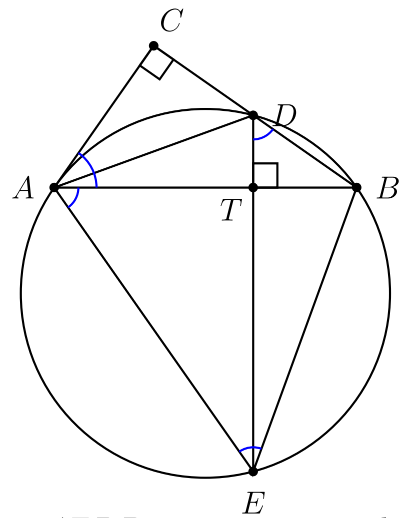
$$3434 = 222(a+b+c) - \overline{abc} = 122a + 212b + 221c.$$

Oglejmo si zgornjo enačbo glede na deljivost z 9. Ostanek števila 3434 pri deljenju z 9 je enak 5, ostanek števila $122a+212b+221c$ pa je enak ostanku števila $5a+5b+5c = 5(a+b+c)$. Od tod sledi, da mora biti ostanek števila $a+b+c$ pri deljenju z 9 enak 1. Ker pa je $6 = 1+2+3 \leq a+b+c \leq 7+8+9 = 24$, je torej $a+b+c$ enako bodisi 10 bodisi 19.

Če je $a+b+c = 10$, lahko ocenimo $3434 = 122a+212b+221c < 221(a+b+c) = 221 \cdot 10 < 3434$, kar ni možno. Torej je $a+b+c = 19$. Sedaj lahko izračunamo $\overline{abc} = 222(a+b+c) - 3434 = 222 \cdot 19 - 3434 = 784$. Edina možnost je $x = 784$.

Zapis vseh trimestnih števil, ki so sestavljena iz števk števila x .... 1 točka
Enačba $3434 = 122a+212b+221c$ .... 2 točki
Sklep $a+b+c=10$ ali $a+b+c=19$ (opazujemo ostanke pri deljenju z 9) .. 2 točki
(Za podoben sklep, če opazujemo večkratnike števila 222, se prizna 2 točki.)
Analiza primerov $a+b+c=10$ ali $a+b+c=19$ .... 1 točka
Zapis rešitve $x = 784$ .... 1 točka
(Če tekmovalec poleg pravilne rešitve $x = 784$ navede še kakšno drugo (napačno) število x, se odbije 1 točka.)

III/2. Označimo s T presečišče tetiv DE in AB. Vemo, da je trikotnik DTB pravokotni.



Denimo najprej, da je trikotnik ABE enakokrak. Označimo $\angle AEB = \angle BAE = \alpha$. Obodna kota $\angle EAB$ in $\angle EDB$ nad tetivo BE sta enaka, zato je tudi $\angle EDB = \alpha$. Ker pa je DE pravokotna na AB, je zato $\angle ABD = \frac{\pi}{2} - \alpha$. V pravokotnem trikotniku ABC torej velja $\angle ABC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, zato je $\angle CAB = \alpha$. Torej je kot $\angle CAB$ med premico AC in tetivo AB enak kotu $\angle AEB$ nad tetivo AB, kar ravno pomeni, da je CA tangenta na krožnico $\mathcal{K}$.

Obratno, denimo, da je AC tangenta na krožnico $\mathcal{K}$. Označimo $\angle CAB = \alpha$. Ker je AC tangenta, je torej kot $\angle BAC$ enak kotu $\angle AEB$ nad tetivo AB. Zato je $\angle AEB = \alpha$. Velja tudi, da je $\angle ABC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, zato je $\angle TDB = \alpha$. Tako je $\angle EDB = \alpha$ in ta je enak $\angle BAE$, saj sta obodna kota nad tetivo BE. Torej je $\angle BAE = \alpha = \angle BEA$, zato je trikotnik ABE enakokrak z vrhom B.

Sklep $\angle CAB = \angle TDB$ .... 1 točka
Dokaz: če je trikotnik AEB enakokrak, je CA tangenta na $\mathcal{K}$ .... do 3 točke
Dokaz: če je CA tangenta na $\mathcal{K}$, je trikotnik AEB enakokrak .... do 3 točke
(Če tekmovalec dokaže le eno implikacijo, za drugo pa ne poda utemeljitve, se za drugo točk ne prizna.)

III/3. Primerjajmo izraza $\frac{\log_{10} 2 \log_{10} 3 \cdots \log_{10}(n-1)}{10^{n-2}}$ in $\frac{\log_{10} 2 \log_{10} 3 \cdots \log_{10} n}{10^{n-1}}$. Neenakost

$$\frac{\log_{10} 2 \log_{10} 3 \cdots \log_{10}(n-1)}{10^{n-2}} \geq \frac{\log_{10} 2 \log_{10} 3 \cdots \log_{10} n}{10^{n-1}}$$

velja natanko tedaj, ko je $1 \geq \frac{1}{10} \log_{10} n = \log_{10} \sqrt[10]{n}$, kar je enakovredno $10 \geq \sqrt[10]{n}$ oziroma $10^{10} \geq n$. Od tod sledi

$$\frac{\log_{10} 2}{10} > \frac{\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 3}{10^2} > \ldots > \frac{\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 3 \cdots \log_{10}(10^{10}-1)}{10^{10^{10}-2}}$$
$$= \frac{\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 3 \cdots \log(10^{10})}{10^{10^{10}-1}}$$

in

$$\frac{\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 3 \cdots \log(10^{10})}{10^{10^{10}-1}} < \frac{\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 3 \cdots \log(10^{10}+1)}{10^{10^{10}}}$$
$$< \frac{\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 3 \cdots \log(10^{10}+2)}{10^{10^{10}+1}} < \ldots .$$

Torej je vrednost izraza $\frac{\log_{10} 2 \log_{10} 3 \cdots \log_{10} n}{10^{n-1}}$ najmanjša pri $n = 10^{10} - 1$ in $n = 10^{10}$. Enaka je

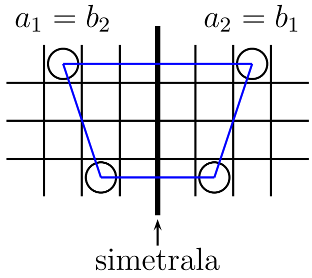
$$\frac{\log_{10} 2 \log_{10} 3 \cdots \log_{10} 10^{10}}{10^{10^{10}-1}}.$$

Primerjava izrazov za n in $n+1$ .... **3 točke**
(Za primerjavo izrazov le za majhne n se prizna 1 točka.)
Sklep $\frac{\log_{10} n}{10} \leq 1 \Longleftrightarrow n \leq 10^{10}$ .... **1 točka**
Sklep: izraz (glede na n) najprej pada, nato narašča .... **1 točka**
Izraz je najmanjši pri $n = 10^{10} - 1$ in $n = 10^{10}$ .... **po 1 točka**

III/4. Poimenujmo enakokrak trapez, ki ni pravokotnik, in ima osnovnici vzporedni enemu izmed robov tabele, *pravilen* trapez. Zmaga drugi igralec in to ne glede na to kako igra prvi. Drugi igralec po vsaki potezi prvega preveri, ali lahko s postavitvijo svojega žetona tvori pravilen trapez. Če tega ne more narediti, postavi svoj žeton na tabelo tako, da bo po njegovi potezi simetrična glede na navpično simetralo (t.j. njegova poteza je simetrična potezi prvega igralca glede na navpično simetralo tabele).

Denimo, da je zmagal prvi igralec, ki je v zadnji potezi postavil žeton na polje a_0. Naj bodo a_1, a_2 in a_3 preostala tri polja, ki s poljem a_0 tvorijo pravilen trapez (torej so pokrita z žetoni in so med seboj različna). Označimo z b_0, b_1, b_2 in b_3 njim simetrična polja glede na navpično simetralo tabele. Polja b_1, b_2 in b_3 so pokrita z žetoni, polje b_0 pa je prazno. Pokažimo, da so polja a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2 in b_3 vsa med seboj različna.

Ker je dolžina tabele soda, je $a_i \neq b_i$ za vsak $i = 0, 1, 2, 3$. Če bi veljalo $a_i = b_j$ za $i \neq j$, potem bi bilo tudi $b_i = a_j$, torej bi bila stranica $a_i a_j$ trapeza $a_0 a_1 a_2 a_3$ vodoravna. Vendar potem bi morala biti tudi stranica $a_k a_l$ za $\{k, l\} = \{0, 1, 2, 3\} \backslash \{i, j\}$, vodoravna, ker pravilen trapez nima pravih kotov. Od tod pa bi zaradi enakokrakosti sledilo, da je tudi $b_k = a_l$ in $a_l = b_k$ za $l \neq k$. Zato bi bilo $b_0 = a_m$ za nek $m \neq 0$, kar pa ni mogoče, saj je polje b_0 prazno, na poljih a_1, a_2 in a_3 pa so žetoni.



Vsa polja so med seboj različna, zato sta bili pred zadnjo potezo prvega igralca trojici a_1, a_2, a_3 in b_1, b_2, b_3 pokriti z žetoni, kar pomeni, da je bila pred zadnjo potezo drugega igralca vsaj ena izmed njiju pokrita z žetoni. Drugi igralec je imel priložnost zmagati, a ni zmagal, torej ni upošteval strategije.

Opis in dokaz pravilnosti strategije .... 7 točk
Če dokaz ni popoln, se za posamezne ugotovitve prizna (neaditivno):
Ugotovitev, kako mora drugi igralec postaviti žeton, da po tej potezi ne izgubi do 2 točki
Zapis pravilne strategije brez utemeljitve .... do 4 točke
Zapis pravilne strategije z nepopolno utemeljitvijo .... do 6 točk

IV/1. Ker so a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 členi geometrijskega zaporedja, jih lahko zapišemo v obliki $a_i = a_1 \cdot q^{i-1}$ za $i = 2, 3, 4, 5$, kjer je q neko realno število. Toda $q = \frac{a_2}{a_1}$ je kvocient dveh naravnih števil, torej je racionalno število. Zapišimo $q = \frac{m}{n}$ kot okrajšani ulomek. Tedaj so členi zaporedja enaki

$$a_1, \frac{a_1 \cdot m}{n}, \frac{a_1 \cdot m^2}{n^2}, \frac{a_1 \cdot m^3}{n^3}, \frac{a_1 \cdot m^4}{n^4}.$$

Ker so vsi členi naravna števila, m in n pa sta si tuji, je n^4 delitelj števila a_1. Zato lahko zapišemo $a_1 = dn^4$, kjer je d neko naravno število. Torej so členi tega zaporedja števila

$$dn^4, dmn^3, dm^2n^2, dm^3n, dm^4.$$

Ker pa ne obstaja praštevilo, ki bi delilo vse člene zaporedja, sledi $d = 1$, zaporedje pa je oblike $n^4, mn^3, m^2n^2, m^3n, m^4$. Vemo še, da so členi zaporedja manjši od 2008, zato je $m^4 < 2008$ in $n^4 < 2008$. Od tod sledi, da je $m \leq 6$ in $n \leq 6$. Toda člen $a_1 = n^4$ ni deljiv s 6, zato je $n \leq 5$. Vemo še, da je $a_2 = n^3m$ deljiv s 5, $a_3 = n^2m^2$ deljiv s 4 in $a_5 = m^3n$ deljiv s 3, zato je produkt mn deljiv z 2, 3 in 5, torej s 30. Hkrati pa je $mn \leq 6 \cdot 5 = 30$, torej je produkt kar enak 30, od koder sledi $m = 6$ in $n = 5$. Členi zaporedja so tako $5^4 = 625$, $5^3 \cdot 6 = 750$, $5^2 \cdot 6^2 = 900$, $5 \cdot 6^3 = 1080$ in $6^4 = 1296$.

Sklep, da je $q \in \mathbb{Q}$ .... 2 točki
Ugotovitev $n^4 \mid a_1$ .... 1 točka
Ugotovitev $d = 1$ .... 1 točka
Omejitev $m, n \leq 6$ .... 1 točka
Sklep $m = 6$, $n = 5$ in zapis zaporedja .... 2 točki

IV/2. Ocenimo vrednost izraza. Očitno je $1-x^2 \leq 1$, vrednost $5x-x^2$ pa je omejena z $5x-x^2 = \frac{25}{4} - (x-\frac{5}{2})^2 \leq \frac{25}{4}$, zato je

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{5x-x^2} \leq \sqrt{1} + \sqrt{\frac{25}{4}} = 1 + \frac{5}{2} = 3 + \frac{1}{2}.$$

Po drugi strani pa je vrednost izraza nenegativna in ne more biti enaka 0, saj bi to pomenilo, da je $1-x^2=0$ in $5x-x^2=0$, kar pa ni možno. Tako so edine celoštevilske vrednosti, ki jih izraz lahko zavzame, enake 1, 2 ali 3.

Pišimo $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{5x-x^2} = a$ in odpravimo korene. Raje kot izraz v taki obliki kvadrirajmo $\sqrt{1-x^2} = a - \sqrt{5x-x^2}$, saj potem dobimo $1-x^2 = a^2 - 2a\sqrt{5x-x^2} + 5x - x^2$ oziroma $2a\sqrt{5x-x^2} = a^2 - 1 + 5x$. Po ponovnem kvadriranju sledi $4a^2(5x-x^2) = (a^2-1)^2 - 10x + 10a^2x + 25x^2$ oziroma

$$x^2(25+4a^2) + x(-10a^2-10) + (a^2-1)^2 = 0.$$

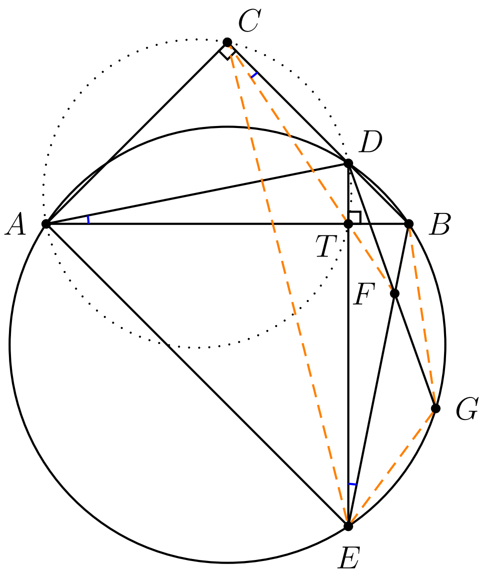
Če je $a=1$ dobimo $x(29x-20)=0$, od koder sledi $x=0$ ali $x=\frac{20}{29}$. Če rešitvi vstavimo v prvotni izraz, ugotovimo, da ustreza le $x=0$.

Pri $a=2$ lahko kvadratno enačbo za x razcepimo kot $(x-1)(41x-9)=0$, od koderdobimo, da je $x=1$ ali $x=\frac{9}{41}$. V obeh primerih izračun pokaže, da je vrednost izraza res enaka 2.

Ostane še primer $a=3$, ko dobimo kvadratno enačbo $61x^2-100x+64=0$. Ker pa je njena diskriminanta $D = 100^2 - 4\cdot 61\cdot 64 = 100^2 - (2\cdot 64)(2\cdot 61) = 100^2 - 128\cdot 122$ negativna, nima realnih rešitev.

Vrednost izraza je torej celo število, ko je $x=0$, $x=\frac{9}{41}$ ali pa $x=1$.

Omejitev $0 \leq a \leq 3$ **.......... 2 točki**
Zapis enačbe $x^2(25+4a^2)+x(-10a^2-10)+(a^2-1)^2=0$ **.......... 1 točka**
Obravnava primerov $a \in \{0,1,2,3\}$ **in izločitev neustreznih** x **.......... po 1 točka**
(Če se pri posameznem primeru ne preveri ustreznost vseh x**, se točke ne prizna.)**



IV/3. Ker je vsota nasprotnih kotov $\angle ATD$ in $\angle ACD$ v štirikotniku $ATDC$ enaka π, je ta štirikotnik tetiven. Označimo $\angle TCD = \alpha$. Zaradi tetivnosti sledi $\angle TAD = \angle TCD = \alpha$. Ker pa so točke A, B, E, D konciklične, velja tudi $\angle BED = \angle BAD = \angle TAD = \alpha$. Dobili smo torej $\angle FED = \angle BED = \alpha = \angle TCD = \angle FCD$, torej sta v štirikotniku $FECD$ kota FED in FCD enaka, zato je tudi ta štirikotnik tetiven.
Naj bo sedaj $\angle ECF = \beta$. Zaradi tetivnosti štirikotnika $FECD$ sledi $\angle EDF = \angle ECF = \beta$. Ker pa točke E, D, B in G ležijo na krožnici $\mathcal{K}$, sledi še $\angle EBG = \angle EDG = \angle EDF = \beta$.
Označimo še $\angle EFC = \gamma$. Zaradi tetivnosti štirikotnika $CDFE$ sledi $\angle EDC = \angle EFC = \gamma$, torej je $\angle EDB = \pi - \angle EDC = \pi - \gamma$. Ker pa so točke D, B, G in E konciklične sledi, da je $\angle EGB = \pi - \angle EDB = \pi - (\pi - \gamma) = \gamma$, torej je $\angle EFC = \angle EGB$. Ker pa smo že pokazali, da velja $\angle ECF = \beta = \angle EBG$, se trikotnika ECF in EBG ujemata v dveh kotih, zato sta si podobna.

Ugotovitev, da je $ATDC$ tetivni štirikotnik .... 1 točka
Sklep: $\angle FED = \angle FCD$ (ali tetivnost $AFBC$ in $\angle EDC = \angle EFC$) .... 2 točki
Ugotovitev, da je $FECD$ tetivni štirikotnik .... 1 točka
Izračun enakosti dveh istoležnih kotov v $\triangle CEF$ in $\triangle BEG$ .... 2 točki
Sklep, da sta si trikotnika CEF in BEG podobna .... 1 točka

IV/4. Elemente množice K označimo z $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ tako, da velja $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$. Dokažimo trditev z indukcijo. Očitno je vsota vseh števil, ki so manjša od a_2, enaka a_1 in torej manjša od a_2. Denimo sedaj, da za naravno število n velja

$$a_n > a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Dokažimo, da taka ocena velja tudi za $n+1$.

Ker je $a_n < a_{n+1}$, a_{n+1} ne more biti delitelj števila a_n, zato je a_n delitelj a_{n+1}. Torej obstaja naravno število k, da velja $a_{n+1} = ka_n$. Ker sta a_n in a_{n+1} različni, je $k \geq 2$. Zato velja

$$a_{n+1} = ka_n \geq 2a_n = a_n + a_n > a_n + (a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1),$$

kjer smo upoštevali indukcijsko predpostavko. To pa ravno pomeni, da trditev velja tudi za $n+1$ in zato tudi za vsa ostala števila.

Ureditev elementov množice K po velikosti (npr. $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$) .... 2 točki
Dokaz lastnosti za a_1 in a_2 .... 1 točka
Sklep $a_n \mid a_{n+1}$ (ali enakovreden) .... 1 točka
Sklep $a_{n+1} \geq 2a_n$ (ali enakovreden) .... 1 točka
Induktivni sklep .... 2 točki
(Če je obravnavan le poseben primer, ko K sestavljajo členi geometijskega zaporedja, se prizna 0 točk.)