Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

53. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije
Ljubljana, 18. april 2009

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 1. letnik

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

---

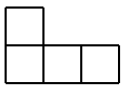
1. Poišči vsa realna števila x, y in z, ki rešijo sistem enačb

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 0, \\ xy-z^2 &= 0, \\ y^2+5z+6 &= 0. \end{aligned}$$

2. Poišči najmanjše naravno število n, deljivo z 20, za katerega je n^2 popoln kub, n^3 pa popoln kvadrat.

3. Naj bosta E in F taki točki na stranicah AB in AD konveksnega štirikotnika $ABCD$, da je $EF \parallel BD$. Daljica CE seka diagonalo BD v točki G, daljica CF pa seka diagonalo BD v točki H. Dokaži: če je $AGCH$ paralelogram, je tudi $ABCD$ paralelogram.

4. V vsako polje kvadratne tabele vpišemo naravno število. Tabela je *zanimiva*, če je vsota vseh števil v tabeli liha in vsota števil v vsakem liku oblike



(lik lahko zrcalimo ali zasukamo)

liha.

(a) Ali obstaja *zanimiva* tabela razsežnosti 3×3?

(b) Ali obstaja *zanimiva* tabela razsežnosti 5×5?

(c) Ali obstaja *zanimiva* tabela razsežnosti 4×4?

dMFA

53. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Ljubljana, 18. april 2009

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

---

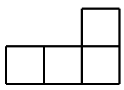
1. Poišči vsa soda naravna števila n, za katera velja

$$-53 < \frac{2009}{53 - n} < 53 - n.$$

2. Poišči vsa praštevila p, za katera je $p^2 + 7^3$ popoln kub.

3. Dan je ostrokotni trikotnik ABC, v katerem je $|AB| > |BC| > |AC|$. Naj bo D od C različna točka na daljici BC, da je $|AC| = |AD|$. Označimo s H višinsko točko trikotnika ABC, z A_1 in B_1 pa nožišči višin iz točk A in B. Premici A_1B_1 in DH se sekata v točki E. Dokaži, da so točke B, D, B_1 in E konciklične.

4. Tabela velikosti 3×3 je razdeljena na 9 kvadratkov. Določi največje število barv, s katerimi lahko pobarvamo kvadratke tabele, da bodo vsaki štirje kvadratki, ki tvorijo lik oblike



(lik lahko zrcalimo ali zasukamo),

pobarvani s kvečjemu tremi različnimi barvami.

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

---

1. Naj bo p praštevilo, a, b in c pa taka cela števila, deljiva s p, da ima polinom

$$q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

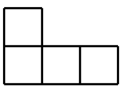
vsaj dve različni celi ničli. Dokaži, da p^2 deli b in p^3 deli c.

2. Dokaži neenakost

$$\frac{9}{4} < \log_2 \pi + \log_4 \pi < \frac{5}{2}.$$

3. Dan je ostrokotni trikotnik ABC, v katerem je $|AB| > |BC| > |AC|$. Naj bo D od C različna točka na daljici BC, da je $|AC| = |AD|$. Označimo s H višinsko točko trikotnika ABC, z A_1 in B_1 pa nožišči višin iz točk A in B. Premica DH seka premico AC v točki E, premico A_1B_1 pa v točki F. Naj bo G presečišče premic AF in BH. Dokaži, da sta si trikotnika HBD in HGE podobna.

4. Tabela velikosti 5×7 ima eno polje rdeče, ostala polja pa bela. Na to tabelo postavljamo ploščice oblike



(ploščico lahko zrcalimo ali zasukamo),

tako da cele ležijo na tabeli. Pri tem se ploščice na rdečem polju lahko prekrivajo, na belih pa ne. Določi vse možne položaje rdečega polja, pri katerih lahko tabelo v celoti prekrijemo.

53. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Ljubljana, 18. april 2009

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

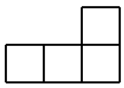
---

1. Dokaži enakost
$$1005^{\ln 121} = 11^{\ln(1+3+5+\ldots+2009)}.$$

2. Poišči vsa naravna števila n, za katera obstaja praštevilo p, da je število p^2+7^n popoln kvadrat.

3. Dan je ostrokotni trikotnik ABC, v katerem je $|AB| > |AC|$. Naj bo D od C različna točka na daljici BC, da je $|AC| = |AD|$. Označimo s H višinsko točko trikotnika ABC, z A_1 in B_1 pa nožišči višin iz točk A in B. Premica DH seka premico AC v točki E, premico A_1B_1 pa v točki F. Naj bo G presečišče premic AF in BH. Dokaži, da se premice EG, CH in AD sekajo v eni točki.

4. Tabela velikosti 8×8 je razdeljena na 64 kvadratkov. Določi najmanjše število barv, s katerimi moramo pobarvati kvadratke tabele, da bodo vsaki štirje kvadratki, ki tvorijo lik oblike



(lik lahko zrcalimo ali zasukamo),

pobarvani z različnimi barvami.

Rešitve nalog

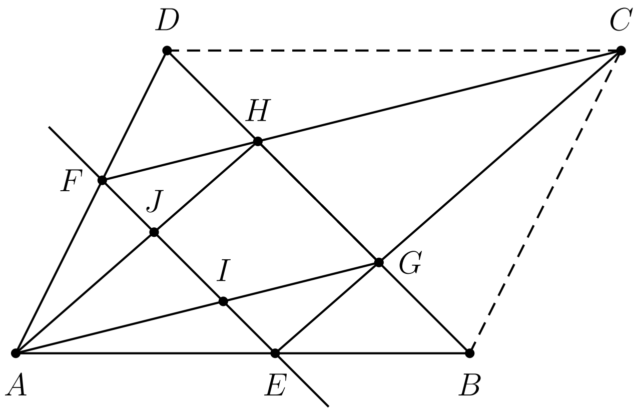
I/1. Iz prve enačbe izrazimo $x = -2z - y$ in vstavimo v drugo. Dobimo $(-2z-y)y - z^2 = 0$ oziroma $-(z+y)^2 = 0$. Od tod sledi $z = -y$. Vstavimo v tretjo enačbo. Dobimo $y^2 - 5y + 6 = 0$ oziroma $(y-2)(y-3) = 0$. Torej je $y = 2$ ali $y = 3$.

Sistem enačb rešijo $x = 2$, $y = 2$, $z = -2$ in $x = 3$, $y = 3$, $z = -3$.

Zapis ene izmed spremenljivk z ostalima dvema (na primer $x = -2z - y$**) in ugotovitev, da ne morejo biti vse tri hkrati pozitivne** . . . . **1 točka**
Sklep $z = -y$ **ali** $x = y$ . . . . **2 točki**
Sklep $x = y = -z$ . . . . **1 točka**
Razcep $(y-2)(y-3) = 0$ **(lahko tudi** $(z+2)(z+3) = 0$**)** . . . . **1 točka**
Vsaka izmed trojic $x = 2$**,** $y = 2$**,** $z = -2$ **oziroma** $x = 3$**,** $y = 3$**,** $z = -3$ . . . . . **po 1 točka**

I/2. Ker je število n deljivo z 20, je oblike $n = 2^{2+a} \cdot 5^{1+b} \cdot k$, kjer je k naravno število, ki ni deljivo niti z 2 niti s 5, a in b pa sta nenegativni celi števili. Če je $n^2 = 2^{2(2+a)} \cdot 5^{2(1+b)} \cdot k^2$ popoln kub, $3 \mid 2(2+a)$ in $3 \mid 2(1+b)$. Če je $n^3 = 2^{3(2+a)} \cdot 5^{3(1+b)} \cdot k^3$ popoln kvadrat, $2 \mid 3(2+a)$ in $2 \mid 3(1+b)$. Od tod sledi, da $6 \mid 2+a$ in $6 \mid 1+b$, zato je a najmanj 4 in b najmanj 5. Najmanjše možno naravno število k je $k = 1$. Pri teh vrednostih dobimo $n = 2^6 \cdot 5^6 = 1\,000\,000$. Ker je n^2 popoln kub in n^3 popoln kvadrat, je to najmanjše tako naravno število.

Zapis $n = 2^{2+a} \cdot 5^{1+b} \cdot k$ . . . . **1 točka**
Sklep, da $3 \mid 2(2+a)$ **in** $3 \mid 2(1+b)$ . . . . **2 točki**
Sklep, da $2 \mid 3(2+a)$ **in** $2 \mid 3(1+b)$ . . . . **2 točki**
Ugotovitev, da je $n = 10^6$ . . . . **2 točki**



I/3. Presečišče premic EF in AG označimo z I, presečišče premic EF in AH pa z J. Ker je $EF \parallel BD$ in $AH \parallel CE$, je štirikotnik $EGHJ$ paralelogram. Zaradi vzporednosti AG in CF pa je tudi $FIGH$ paralelogram. Zato je $|FH| = |IG|$ in $|HJ| = |GE|$ ter velja $\angle FHJ = \angle IGE$, kar pomeni, da sta trikotnika FHJ in IGE skladna. Tako je $|FJ| = |IE|$.
Ker je $EF \parallel BD$, imamo tri pare podobnih trikotnikov: EAF in BAD, EAI in BAG ter JAF in HAD. Iz prve sledi $\frac{|EA|}{|BA|} = \frac{|FA|}{|DA|}$, iz druge $\frac{|EA|}{|BA|} = \frac{|EI|}{|BG|}$ in iz tretje $\frac{|FA|}{|DA|} = \frac{|JF|}{|DH|}$. Dobimo $\frac{|EI|}{|BG|} = \frac{|JF|}{|DH|}$ in zaradi $|FJ| = |IE|$ sledi $|BG| = |DH|$.
Naj bo S razpolovišče daljice AC. Ker je $AGCH$ paralelogram, je S hkrati razpolovišče daljice GH. Zaradi $|BG| = |DH|$ pa sledi, da je S tudi razpolovišče daljice BD. Daljici AC in BD se razpolavljata, zato je $ABCD$ paralelogram.

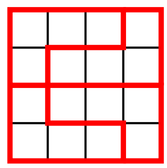
2. način Kot v prvi rešitvi pokažemo, da je $|BG| = |DH|$. Ker je $AG \parallel FC$, velja $\angle AGB = \angle FHB = \angle CHD$, zato se trikotnika AGB in CHD ujemata v kotu in dolžinah priležnih stranic ($|BG| = |DH|$ in $|AG| = |CH|$), torej sta skladna in velja še $|AB| = |CD|$ in $\angle ABG = \angle CDH$. Torej sta AB in CD enako dolgi vzporedni stranici štirikotnika $ABCD$, kar pomeni, da je ta štirikotnik paralelogram.

Ugotovitev, da je $EJHG$ paralelogram ali, da je $FGHI$ paralelogram . . . . **1 točka**
Ugotovitev: trikotnika FHJ in IGE sta skladna (oz. sklep $|FJ| = |IE|$) . . . . . . **1 točka**
Zapisana vsaj dva izmed naslednjih parov podobnih trikotnikov: EAF in BAD, EAI in BAG, JAF in HAD . . . . **1 točka**
Razmerja stranic med temi podobnimi trikotniki . . . . **1 točka**
Sklep $|BG| = |DH|$ . . . . **1 točka**
Ugotovitev, da je S tudi razpolovišče BD ali sklep $|AB| = |CD|$ . . . . **1 točka**
Sklep, da je $ABCD$ paralelogram . . . . **1 točka**

I/4. Zanimivi tabeli razsežnosti 3×3 in 5×5 obstajata (glej prvo in drugo sliko). Z L smo označili liha števila in s S soda. Vseeno je katera liha števila in katera soda smo vpisali (lahko so vsa liha števila enaka 1, vsa soda pa 2). Vsota števil v prvi in drugi tabeli je liho število. V vsakem liku predpisane oblike so tri liha števila in eno sodo ali pa tri soda števila in eno liho, zato je vedno vsota števil v liku liho število.

S	S	S
L	L	L
S	S	S

L	L	L	L	L
S	S	S	S	S
L	L	L	L	L
S	S	S	S	S
L	L	L	L	L



Če je vsota števil v vsakem predpisanem liku liho število, tabelo razsežnosti 4×4 pokrijmo s štirimi liki kot na tretji sliki. Vsota števil v tabeli je tedaj sodo število, zato zanimiva tabela razsežnosti 4×4 ne obstaja.

Zapis zanimive tabele razsežnosti 3×3 .... **1 točka**
Zapis zanimive tabele razsežnosti 5×5 .... **2 točki**
Dokaz, da zanimiva tabela razsežnosti 4×4 **ne obstaja** .... **4 točke**

II/1. Če je $n < 53$, je $\frac{2009}{53-n} > 0 > -53$. Neenakost $\frac{2009}{53-n} < 53 - n$ je enakovredna $2009 < (53-n)^2$ oziroma $\sqrt{2009} < 53 - n$. Ker je $\sqrt{2009} > 44$, sledi $53 - n > 44$ oziroma $9 > n$. Možne vrednosti n so 2, 4, 6 in 8, pri vseh pa je $53 - n \geq 45 > \sqrt{2009}$, zato je prvotna neenakost izpolnjena.

Naj bo še $n > 53$. Neenakost je enakovredna

$$-53(53-n) > 2009 > (53-n)^2.$$

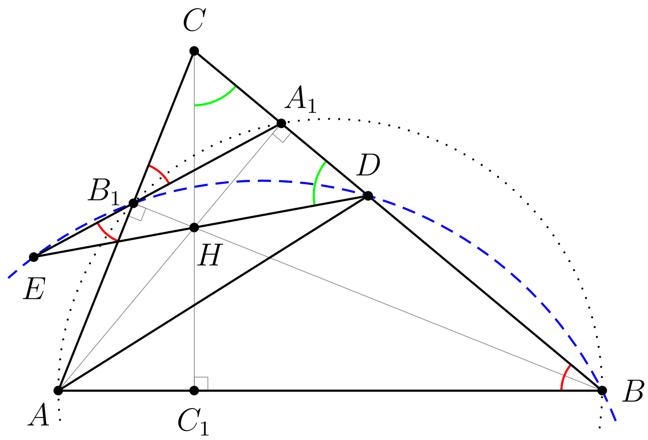
Iz $-53^2 + 53n > 2009$ sledi $n > \frac{2009+53^2}{53} = 90 + \frac{48}{53}$. Po drugi strani je $45 > \sqrt{2009} > n - 53$, zato je $n < 98$. Dobimo še tri možnosti in sicer 92, 94 in 96. Pri vseh treh velja $n - 53 \leq 96 - 53 = 43 < \sqrt{2009}$ in s tem tudi prvotna neenakost.

Ugotovitev, da je potrebno obravnavati dva primera glede na to ali je $53 - n$ **pozitivno ali negativno število** .... **1 točka**
Ocena $44 < \sqrt{2009} < 53 - n$ **(ali zapis kvadratne neenačbe** $n^2 - 106n + 800 > 0$**) v primeru, ko je** $n < 53$ .... **1 točka**
Preiskus dobljenih možnih vrednosti n**, ki so manjše od** 53 .... **1 točka**
Sklep, da neenakost rešijo $n = 2$, $n = 4$, $n = 6$ **in** $n = 8$ .... **1 točka**
Oceni $45 > \sqrt{2009} > 53 - n$ **(ali** $n^2 - 106n + 800 < 0$**) in** $n > 90 + \frac{48}{53}$ **v primeru, ko je** $n > 53$ .... **1 točka**
Preiskus dobljenih možnih vrednosti n**, ki so večje od** 53 .... **1 točka**
Sklep, da neenakost rešijo $n = 92$, $n = 94$ **in** $n = 96$ .... **1 točka**
(Če tekmovalec navede, da neenačbo reši še kakšno drugo sodo naravno število n**, se mu odbije 1 točka.)**

II/2. Naj bo $p^2 + 7^3 = n^3$. Tedaj velja $p^2 = n^3 - 7^3 = (n-7)(n^2 + 7n + 49)$. Očitno je $n > 7$ in $n - 7 < n^2 + 7n + 49$, zato je možno le, da je $n - 7 = 1$ in $n^2 + 7n + 49 = p^2$. Tedaj je $n = 8$ in $p^2 = 169$, zato je $p = 13$. Edino tako praštevilo je $p = 13$.

Zapis $p^2 + 7^2 = n^3$ .... **1 točka**
Razcep $p^2 = (n-7)(n^2 + 7n + 49)$ .... **1 točka**
Ugotovitev $p^2 = 1 \cdot p^2 = p \cdot p$ **(oziroma, da je** $n - 7$ **delitelj števila** p^2 **in je zato lahko le** 1, p **ali** p^2**)** .... **1 točka**
Sklep, da je $n > 7$ **ali** $n^2 + 7n + 49 > 1$ **oziroma ugotovitev, da sistem enačb** $n - 7 = p^2$, $n^2 + 7n + 49 = 1$ **nima rešitev** .... **1 točka**
Ocena $n - 7 < n^2 + 7n + 49$ **ali sklep, da sistem enačb** $n - 7 = p$, $n^2 + 7n + 49 = p$ **nima rešitev** .... **1 točka**
Reševanje sistema $n - 7 = 1$ **in** $n^2 + 7n + 49 = p^2$ .... **1 točka**
Sklep, da enačbo reši $p = 13$ .... **1 točka**

II/3. Naj bo C_1 nožišče višine na stranico AB. Trikotnik CAD je zaradi $|AC| = |AD|$ enakokrak. Premica AA_1 je višina tudi v tem enakokrakem trikotniku, zato je $\angle CDH = \angle HCD = C_1CB = \frac{\pi}{2} - \angle CBA$. Od tod sledi



$$\begin{aligned} \angle EDB &= \pi - \angle CDE = \pi - \angle CDH \\ &= \frac{\pi}{2} + \angle CBA. \end{aligned}$$

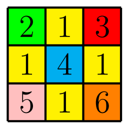
V štirikotniku ABA_1B_1 velja $\angle AA_1B = \frac{\pi}{2} = \angle AB_1B$, zato je tetiven in je $\angle AB_1A_1 = \pi - \angle A_1BA = \pi - \angle CBA$. Dobimo $\angle A_1B_1C = \pi - \angle AB_1A_1 = \angle CBA$ in

$$\angle EB_1B = \angle EB_1A + \angle AB_1B = \angle A_1B_1C + \frac{\pi}{2} = \angle CBA + \frac{\pi}{2}.$$

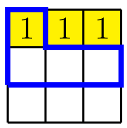
Pokazali smo $\angle EDB = \frac{\pi}{2} + \angle CBA = \angle EB_1B$, kar pomeni, da so točke B, D, B_1 in E koneciklične.

Ugotovitev, da je trikotnik HDC enakokrak . . . . 1 točka
Dokazana tetivnost štirikotnika HA_1CB_1 ali štirikotnika ABA_1B_1 . . . . 1 točka
(Obe točki se priznata tudi v primeru, ko je tekmovalec poskusil dokazati tetivnost štirikotnika AHB_1E in je pri tem pokazal enakosti $\angle A_1AC = \angle DAA_1 = \angle DBB_1$)
Izračun $\angle EDB = \frac{\pi}{2} + \angle CBA$ . . . . 2 točki
Izračun $\angle EB_1B = \frac{\pi}{2} + \angle CBA$ . . . . 2 točki
Sklep, da so točke B, D, B_1 in E koneciklične . . . . 1 točka
(Če je tekmovalec pokazal, da iz tetivnosti štirikotnika $EAHB_1$ sledi konecikličnost točk B, D, B_1 in E, vendar tetivnosti štirikotnika EAB_1H ni dokazal, se mu priznajo 3 točke)

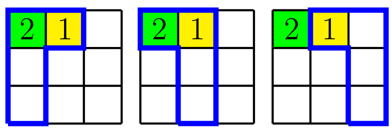
II/4. Tabelo lahko pobarvamo s šestimi različnimi barvami kot prikazuje slika. Med vsakimi štirimi kvadratki v obliki predpisanega lika sta dve polji barve 1, zato so kvadratki največ treh različnih barv.



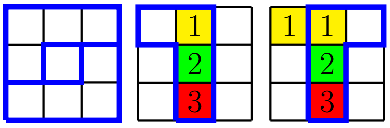
Pokažimo, da ustreznega barvanja z več kot 6 barvami ni. Ločimo dva primera. Denimo, da so vsi kvadratki v prvi vrstici enake barve. V poljih označenega lika so največ tri različne barve, torej barva 1 in še največ dve barvi. Spodnja tri polja so pobarvana z največ tremi različnimi barvami, zato je v taki tabeli največ 6 različnih barv.



Če v prvi vrstici niso vsi kvadratki enake barve, je eden izmed robnih kvadratkov drugačne barve kot srednji. Brez škode lahko privzamemo, da je to kvadratek na levi. Polja v označenem liku na prvi sliki so največ treh različnih barv, zato je na praznih dveh poljih kvečjemu ena nova barva. Enako velja za prazni polji na drugi sliki. V poljih zadnjega stolpca sta lahko še največ dve novi barvi, saj bi sicer lik na zadnji sliki vseboval polja štirih različnih barv. Tabela je tudi v tem primeru pobarvana z največ $2 + 1 + 1 + 2 = 6$ barvami.



2. način Kot v prvi rešitvi zapišemo primer s šestimi barvami. Denimo, da lahko tabelo na tak način pobarvamo z vsaj sedmimi barvami. V poljih obeh likov prve slike so največ po 3 različne barve, zato je v tabeli največ 7 različnih barv. Torej je točno 7 različnih barv, kar pomeni, da so v poljih vsakega označenega lika po točno 3 različne barve, ki so različne od barve sredinskega polja. Zato so vsa polja v srednjem stolpcu različnih barv in vse barve polj v zgornjem liku so različne barvam polj v preostanku tabele. Ker lik na drugi sliki vsebuje največ 3 različne barve, morata biti polji prve vrstice enake barve. Enako velja za lik na tretji sliki, zato so vsa polja prve vrstice enake barve, kar pomeni, da je različnih barv le 6. Protislovje.



Zapis primera s 6 **barvami** . . . . **2 točki**
Dokaz, da ustreznega barvanja z več kot 7 **barvami ni** . . . . **2 točki**
Dokaz, da ustreznega barvanja z natanko 7 **barvami ni** . . . . **3 točke**

III/1. Naj bosta y in z različni celi ničli polinoma q. Tedaj velja $y^3+ay^2+by+c=0$ in $z^3+az^2+bz+c=0$. Ker $p \mid a$, $p \mid b$ in $p \mid c$ ter je $y^3=-c-by-ay^2$, p deli y^3. Podobno sledi, da $p \mid z^3$. Ker je p praštevilo, je zato delitelj tako y kot z.

Če zgornji enačbi odštejemo, dobimo $y^3-z^3+a(y^2-z^2)+b(y-z)=0$ oziroma

$$(y-z)(y^2+yz+z^2+a(y+z)+b)=0.$$

Ker je $z \neq y$, tako velja $y^2+yz+z^2+a(y+z)+b=0$. Praštevilo p je delitelj y, z in a, zato p^2 deli $y^2+yz+z^2+a(y+z)=-b$, torej $p^2 \mid b$.

Izrazimo lahko $c=-y^3-ay^2-by$. Ker $p \mid y$, je p^2 delitelj y^2 in p^3 delitelj y^3. Zaradi deljivosti a z p in b z p^2 pa od tod sledi, da $p^3 \mid c$.

2. način Naj bodo x_1, x_2 in x_3 ničle polinoma q in privzemimo, da sta x_1 in x_2 celi števili. Tedaj je $q(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, od koder sledijo Viétove formule $a=-(x_1+x_2+x_3)$, $b=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ in $c=-x_1x_2x_3$. Iz prve enakosti sledi, da je tudi x_3 celo število. Ker je p praštevilo in deli $x_1x_2x_3$, deli vsaj enega izmed števil x_1, x_2 in x_3. Predpostavimo lahko, da p deli x_1. Od tod sledi, da p deli $x_2x_3=b-x_1x_2-x_3x_1$. Spet lahko sklepamo, da p deli eno izmed števil x_2 oziroma x_3 ter predpostavimo, da deli x_2. Zaradi $x_3=a+x_1+x_2$ pa tedaj sledi, da $p \mid x_3$.

Vsako izmed števil x_1, x_2, x_3 je deljivo s p, zato je njihov produkt deljiv s p^3, torej $p^3 \mid -x_1x_2x_3=c$. Podobno je produkt po dveh izmed števil x_1, x_2, x_3 deljiv s p^2, zato $p^2 \mid x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b$.

Zapis Viétovih formul . . . . **1 točka**
Ugotovitev, da so vse tri ničle cela števila . . . . **1 točka**
(Obe točki se priznata tudi, če tekmovalec dobi enačbo $y^2+yz+z^2+a(y+z)+b=0$.**)**
Sklep, da praštevilo p **deli eno izmed ničel polinoma** p . . . . **2 točki**
Sklep, da praštevilo p **deli vse ničle polinoma** p . . . . **1 točki**
Sklep $p^2 \mid b$ . . . . **1 točka**
Sklep $p^3 \mid c$ . . . . **1 točka**

III/2. Ker velja

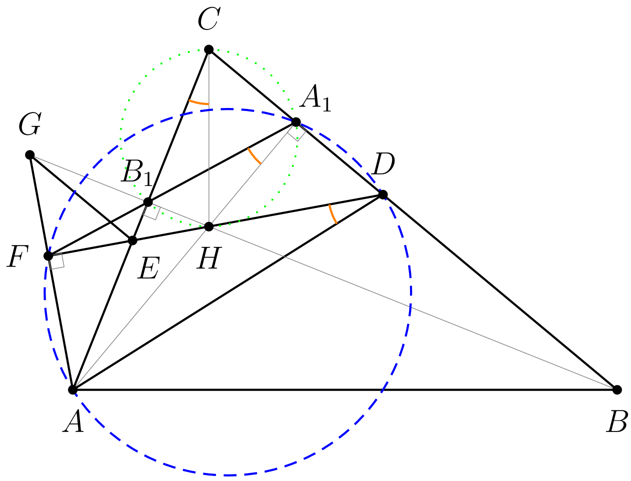
$$\log_2 \pi + \log_4 \pi = \frac{1}{\log_\pi 2} + \frac{1}{\log_\pi 4} = \frac{3}{2 \cdot \log_\pi 2} = \frac{3}{2} \log_2 \pi,$$

je potrebno videti, da je $\frac{9}{2} < 3\log_2 \pi < 5$.

Neenakost $\frac{9}{2} < 3\log_2 \pi$ je enakovredna $3 < \log_2 \pi^2$ oziroma $2^3 < \pi^2$. Slednje drži, saj je $\pi^2 > 3^2 = 9 > 8 = 2^3$. Dokažimo še drugo neenakost, to je $3\log_2 \pi < 5$. Ta je enakovredna $\pi^3 < 2^5$. Spet lahko ocenimo $\pi^3 < 3.15^2 \cdot 3.2 < 10 \cdot 3.2 = 32 = 2^5$, kar je bilo treba dokazati.

Zapis neenakosti $\frac{9}{2} < 3\log_2 \pi < 5$ **.......... 1 točka**
Zapis neenakosti $2^3 < \pi^2$ **in** $\pi^3 < 2^5$ **(ali** $2\sqrt{2} < \pi < \sqrt[3]{32}$**) .... 1 točka**
Sklep, da je $\pi > 3$ **(ali** $\pi > 3.14$**) in zato velja** $\pi^2 > 8$ **(oziroma** $2\sqrt{2} < \pi$**) ...... 1 točka**
Dokazana neenakost $3.15^3 < 32$ **ali** $3.15^2 \cdot 3.2 < 32$ **(ali** ${\frac{22}{7}}^3 < 32$**) .... 2 točki**
Sklep, da zaradi $\pi < 3.15$ **(ali** $\pi < \frac{22}{7}$**) velja** $\log_2 \pi + \log_4 \pi < \frac{5}{3}$ **.......... 2 točki**

III/3. Trikotnik CAD je zaradi $|AC| = |AD|$ enakokrak. Premica AA_1 je višina tudi v tem enakokrakem trikotniku, zato je $\angle HDA = \angle ACH$. V štirikotniku HA_1CB_1 velja $\angle CA_1H = \frac{\pi}{2} = \angle CB_1H$, zato je tetiven in je $\angle B_1A_1H = \angle B_1CH$. Dobili smo



$$\begin{aligned}\angle FA_1A &= \angle B_1A_1H = \angle B_1CH\\ &= \angle ACH = \angle HDA\\ &= \angle FDA,\end{aligned}$$

torej so tudi točke A, D, A_1 in F konciklične. To pomeni, da je $\angle AFD = \angle AA_1D = \frac{\pi}{2}$. Daljici AB_1 in HF sta višini v trikotniku AHG in se sekata v točki E. Zato je E višinska točka tega trikotnika in je EG pravokotna na AH. Ker pa je AH pravokotna na BC, od tod sledi, da je EG vzporedna z BC. Zato je $\angle EGH = \angle HBD$ in zaradi $\angle GHE = \angle BHD$ sledi, da sta si trikotnika HBD in HGE podobna.

Sklep $\angle B_1CH = \angle HDA$ **.......... 1 točka**
Štirikotnik A_1CB_1H **je tetiven (lahko tudi tetivnost štirikotnika** ABA_1B_1**) .... 1 točka**
Sklep $\angle B_1CH = \angle B_1A_1H$ **(ali dokazana tetivnost štirikotnika** $ABDH$**) .... 1 točka**
Ugotovitev, da je štirikotnik ADA_1F **tetiven .... 1 točka**
Sklep $\angle AFD = \frac{\pi}{2}$ **.......... 1 točka**
Ugotovitev $EG \perp AH$ **.......... 1 točka**
Zaključek, da sta si trikotnika HBD **in** HGE **podobna (oziroma enakost kotov** $\angle EGH = \angle HBD$**) .... 1 točka**

III/4. Denimo, da smo v celoti uspeli prekriti tabelo. Vsaka ploščica, ki prekriva rdeče polje, prekriva vsaj še eno belo polje, ki leži levo, desno, nad ali pod rdečim poljem. V primeru, da bi rdeče polje prekrivalo 5 ali več ploščic, bi se vsaj dve izmed njih prekrivali na belem polju. Torej se na rdečem polju prekrivajo kvečjemu 4 ploščice. Vse ploščice skupaj morajo torej imeti med 35 in 38 polj. Ker pa ima vsaka ploščica 4 polja, morajo vse ploščice skupaj imeti 36 polj. Torej je vseh ploščic 9, na rdečem polju pa se prekrivata dve ploščici.

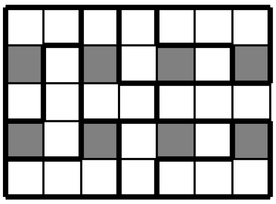


Tabela 1

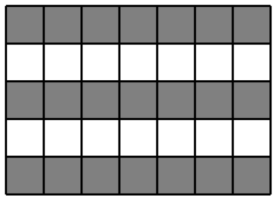


Tabela 2

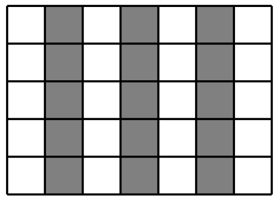
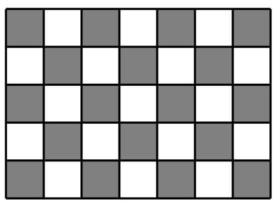


Tabela 3

Iz tabele 1 je zaradi simetrije razvidno, da rdeče polje lahko leži na enem izmed osenčenih polj. Ne glede na to, kako postavimo ploščico na tabelo 2 ali 3, bo vedno prekrivala liho osenčenih polj. Ker je ploščic liho, bodo skupaj prekrivale liho osenčenih polj. Osenčenih polj je na obeh tabelah 2 in 3 liho. Če bi torej rdeče polje ležalo na osenčenem polju tabele 2 ali 3, bi morale vse domine skupaj prekrivati sodo osenčenih polj. To pa ni mogoče. Torej so osenčena polja iz tabele 1 edini možni položaji rdečega polja.

Ugotovitev, da je vseh ploščic 9 **. . . . . 1 točka**
Ugotovitev, da so možni položaji rdečega polja natanko osenčena polja tabele 1 in zapis konkretne konfiguracije, ki ploščo pokrije . . . . 2 točki
(Tekmovalcu se 1 točka odbije, če niso navedena vsa označena polja ampak samo nekatera. Prav tako se 1 točko odbije, če so označena polja, ki jih ni možno pokriti. Tekmovalcu se 1 točka odbije tudi, če manjka katera izmed konfiguracij, ki dokazujejo, da je prekrivanje na določenem polju možno.)
Sklep, da rdeče polje ne more ležati na osenčenih poljih tabele 2 . . . . 2 točki
(Tekmovalcu se prizna 1 točka, če ne izloči vseh osenčenih polj tabele 2, vendar uspe izločiti vogalna polja.)
Sklep, da rdeče polje ne more ležati na osenčenih poljih tabele 3 (oziroma, da ne more ležati na osenčenih poljih spodnje tabele) . . . . 2 točki



(Če tekmovalec navede tudi, da rdeče polje ne more ležati na kakšnem izmed osenčenih polj tabele 1, se mu odbije 1 točko.)

IV/1. Ker je

$$\begin{aligned} & 1+3+5+\ldots+2009= \\ &= (1+2009)+(3+2007)+\ldots+(1003+1007)+1005 \\ &= 502\cdot 2010+1005=1005^2, \end{aligned}$$

je dovolj pokazati $1005^{\ln(121)}=11^{\ln(1005^2)}$. Če dobljeno enakost logaritmiramo, dobimo

$$\ln(121)\ln(1005)=\ln(1005^2)\ln(11),$$

ki je enakovredna $\ln(11^2)\ln(1005)=2\ln(1005)\ln(11)$. Slednja velja, saj je $\ln(11^2)=2\ln(11)$, torej velja tudi prvotna enakost.

Izračun $1+3+5+\ldots+2009=1010025$ .... **1 točka**
Zapis $1+3+5+\ldots+2009=1005^2$ .... **1 točka**
Sklep $\ln(121)=2\ln(11)$ .... **1 točka**
Sklep $\ln(1005)^2=2\ln(1005)$ .... **1 točka**
Preoblikovanje na enakost $1005^{\ln(11)}=11^{\ln(1005)}$ .... **1 točka**
Sklep, da je začetna enakost enakovredna enakosti $\ln(11^2)\ln(1005)=2\ln(1005)\ln(11)$ **oziroma** $\ln(11)\ln(1005)=\ln(1005)\ln(11)$ .... **2 točki**

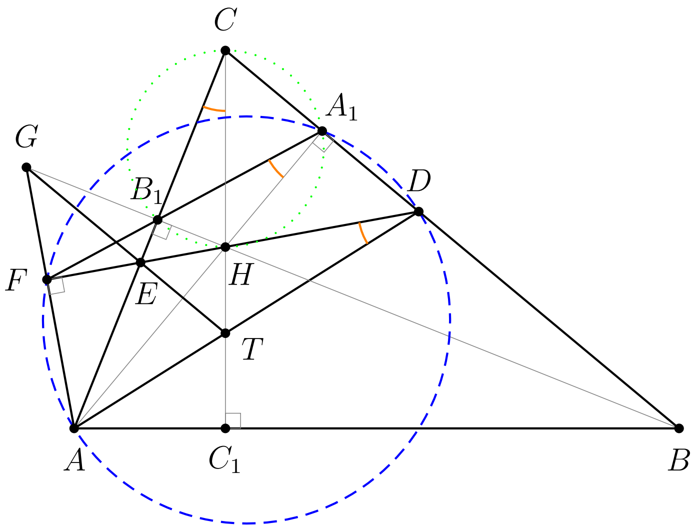
IV/2. Naj bo $p^2+7^n=m^2$. Potem velja $7^n=m^2-p^2=(m-p)(m+p)$. Ločimo dve možnosti. Če je $m-p=1$ in $m+p=7^n$, sledi $2p=7^n-1$. Denimo, da je $n\geq 2$. Tedaj je $2p=7^n-1=(7-1)(7^{n-1}+7^{n-2}+\ldots+7+1)$, zato dobimo $p=3(7^{n-1}+7^{n-2}+\ldots+7+1)$, kar pa ni možno, saj je izraz v oklepajih večji od 1. Če je $n=1$, dobimo $p=3$.

Druga možnost je, da je $m-p=7^k$ in $m+p=7^{n-k}$, kjer je k neko naravno število. Očitno velja $n-k>k$. Tedaj je $2p=7^{n-k}-7^k=7^k(7^{n-2k}-1)$. Izraz v oklepajih je sodo število, večje od 2, zato smo $2p$ zapisali kot produkt vsaj treh praštevil, kar ni možno.

Torej je $n=1$ edino naravno število, pri katerem obstaja praštevilo p, da je p^2+7^n popolni kvadrat. Tako praštevilo je kar $p=3$, popolni kvadrat pa $3^2+7=16=4^2$.

Razcep $7^n=(m-p)(m+p)$ .... **1 točka**
Zapis $m-p=7^k$ **in** $m+p=7^{n-k}$ **z oceno** $n-k>k$ .... **1 točka**
V primeru $k=0$ **razcep** $2p=6(7^{n-1}+7^{n-2}+\ldots+7+1)$ .... **1 točka**
V primeru $k=0$ **sklep, da je** $p=3$ .... **1 točka**
V primeru $k>0$ **razcep** $2p=7^k(7^{n-2k}-1)$ **(ali ugotovitev, da** $7\mid p$**)** .... **1 točka**
V primeru $k>0$ **sklep, da je** $7^k(7^{n-2k}-1)$ **produkt vsaj** 3 **praštevil (ali ugotovitev, da** $p=7$ **ni rešitev)** .... **1 točka**
Zapis rešitve: $p=3$**,** $n=1$ .... **1 točka**

IV/3. Trikotnik CAD je zaradi $|AC| = |AD|$ enakokrak. Premica AA_1 je višina tudi v tem enakokrakem trikotniku, zato je $\angle HDA = \angle ACH$. V štirikotniku HA_1CB_1 velja $\angle CA_1H = \frac{\pi}{2} = \angle CB_1H$, zato je tetiven in je $\angle B_1A_1H = \angle B_1CH$. Dobili smo



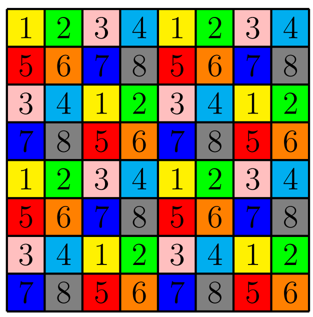
$$\begin{aligned} \angle FA_1A &= \angle B_1A_1H = \angle B_1CH \\ &= \angle ACH = \angle HDA \\ &= \angle FDA, \end{aligned}$$

torej so tudi točke A, D, A_1 in F konciklične. To pomeni, da je $\angle AFD = \angle AA_1D = \frac{\pi}{2}$. Daljici AB_1 in HF sta višini v trikotniku AHG in se sekata v točki E. Zato je E višinska točka tega trikotnika in je EG pravokotna na AH. Ker pa je AH pravokotna na BC, od tod sledi, da je EG vzporedna z BC.

Označimo s T presečišče premic EG in AD ter naj bo C_1 nožišče višine na stranico AB v trikotniku ABC. Ker je ET vzporedna z CD, je štirikotnik $TDCE$ trapez. Toda $\angle TDC = \angle ECD$, zato je ta trapez enakokrak. Od tod sledi $\angle TCE = \angle TDE = \angle ADH = \angle ABH = \angle C_1BH = \angle HCE$, zato so točke C, H in T kolinearne, kar je bilo še potrebno pokazati.

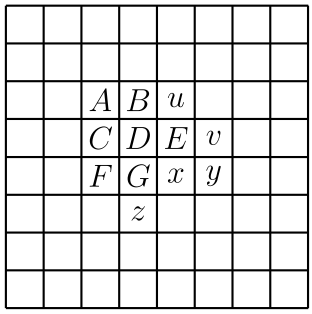
Vsaj ena izmed ugotovitev: $\angle ACH = \angle HDA$, štirikotnik CB_1HA_1 je tetiven, štirikotnik $ABDH$ je tetiven . . . . **1 točka**
Sklep $\angle B_1A_1H = \angle HDA$ . . . . **1 točka**
Štirikotnik ADA_1F je tetiven . . . . **1 točka**
Sklep, da je $\angle AFD = \frac{\pi}{2}$ . . . . **1 točka**
Ugotovitev, da je $GE \perp AH$ . . . . **1 točka**
Definirana točka T in dokaz, da je $TDCE$ enakokrak trapez . . . . **1 točka**
Zaključek, da so točke C, H in T kolinearne . . . . **1 točka**

IV/4. Zadostuje 8 barv. Označimo barve s številkami od 1 do 8 in tabelo pobarvajmo kot prikazuje prva slika. Vsak lik predpisane oblike je pobarvan z različnimi barvami, saj najbližja kvadratka enake barve ležita diagonalno z enim vmesnim kvadratkom in obeh hkrati ne moremo pokriti z enim samim likom.

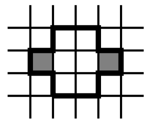


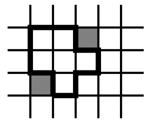
Denimo, da zadostuje že 7 barv. Imenujmo dva kvadratka *povezana*, če sta oba vsebovana v nekem liku predpisane oblike. Označimo nekatere kvadratke v tabeli, kot prikazuje druga slika. Ker sta vsaka dva izmed kvadratkov A, B, C, D, E, F, G povezana, morajo biti ti kvadratki pobarvani z različnimi barvami (skupaj jih je ravno 7).

Kvadratek u je povezan s kvadratki A, B, C, D, E, G, torej mora biti iste barve kot kvadratek F. Kvadratek x je povezan s kvadratki B, C, D, E, F, G, torej mora biti iste barve kot A. Kvadratek v je povezan s kvadratki B, u, D, E, G, x. Ker je u take barve kot F, x pa kot A, mora barva kvadratka v enaka barvi kvadratka C. Kvadratek z je povezan s kvadratki C, D, E, F, G, x, torej mora biti iste barve kot B. Kvadratek y je povezan s kvadratki u, D, E, v, G, x, ki so enakih barv kot F, D, E, C, G, A, torej mora biti y enake barve kot B. Vendar kvadratki G, x, y, z tvorijo lik predpisane oblike, ki ni pobarvan s štirimi različnimi barvami, saj sta kvadratka y in z pobarvana z isto barvo (s tako kot B). Zato 7 barv ne zadostuje.



Zapisan primer, ko zadostuje 8 **barv .... 3 točke**
(Če je zapisan primer z 9 **barvami, se prizna 1 točka. V kolikor tekmovalec ne zapiše primera z** 8 **barvami, vendar navede, da je to rešitev, se prizna 1 točka.)**
Sklep, da 6 **barv ne zadostuje .... 1 točka**

Če zadostuje 7 **barv, sta vsaka dva osenčena kvadratka kot na sliki**  **enake barve .... 1 točka**
(Točka se ne prizna, če ni predpostavljeno, da obravnavamo primer z natanko 7 **barvami.)**

Če zadostuje 7 **barv, sta vsaka dva osenčena kvadratka kot na sliki**  **enake barve .... 1 točka**
(Točka se ne prizna, če ni predpostavljeno, da obravnavamo primer z natanko 7 **barvami.)**
Zaključek, da 7 **barv ne zadostuje .... 1 točka**