Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

59. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Kranj, 18. april 2015

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 1. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Eva, Igor, Marko in Maruša so na list papirja zapisali vsak svoje naravno število. Če bi izbrisali zadnjo števko Evinega števila, bi dobili Igorjevo število. Če bi izbrisali zadnjo števko Igorjevega števila, bi dobili Markovo število. Če pa bi izbrisali zadnjo števko Markovega števila, bi dobili Marušino število. Vsota vseh štirih zapisanih števil je bila 3838. Katera števila so zapisali Eva, Igor, Marko in Maruša?

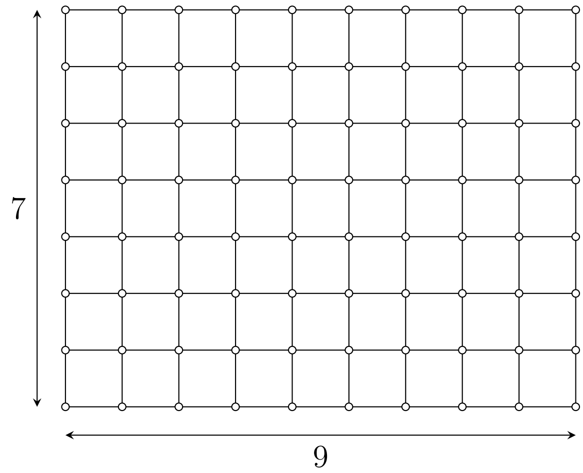
2. Za realni števili x in y velja

$$x^3 + x^2 + xy + x + y + 2 = 0 \quad \text{in} \quad y^3 - y^2 + 3y - x = 0.$$

Določi vrednost izraza $x - y$.

3. Dan je kvadrat $ABCD$ in taki točki E in F izven kvadrata, da sta trikotnika BEC in CFD enakostranična. Dokaži, da je tudi trikotnik AEF enakostraničen.

4. Dana je pravokotna mreža velikosti 7×9 (glej sliko). V spodnjem levem vozlišču mreže je kolonija mravelj, v zgornjem desnem vozlišču pa je njihovo mravljišče. V vseh ostalih vozliščih mreže je po eno zrno riža. Vsaka mravlja iz kolonije se na poti do mravljišča sprehaja po povezavah mreže, vendar le v smereh desno ali navzgor. Na svoji poti pobere vsa zrna riža, na katera naleti, in ko pride do mravljišča, tam tudi ostane. Najmanj koliko mravelj bi moralo biti v koloniji, da bi lahko pobrale vsa zrna riža?



dMFA

59. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Kranj, 18. april 2015

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

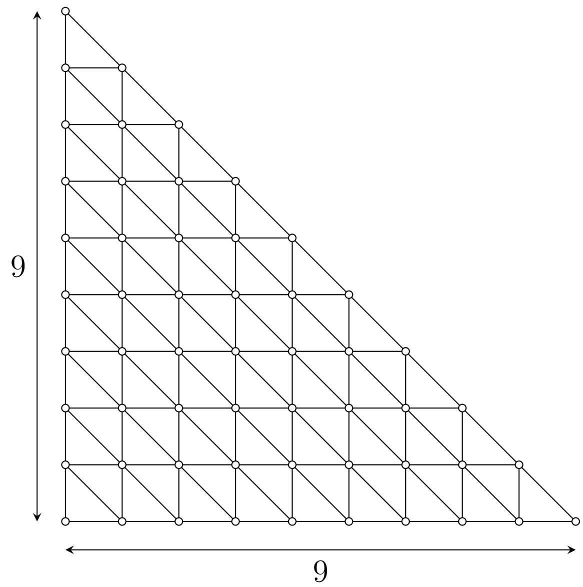
1. Poišči vse pare realnih števil x in y, ki zadoščajo enačbama

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{y-x} &= 1, \\ y + \frac{1}{x-y} &= 2. \end{aligned}$$

2. Poišči vse pare naravnih števil a in b, za katere je $a - b = 101$ in je ab popoln kvadrat.

3. Naj bo P razpolovišče stranice AB trikotnika ABC. Zrcalna slika poltraka PC pri zrcaljenju čez premico AB seka trikotniku ABC očrtano krožnico v točki D. Naj bo E drugo presečišče premice CP s trikotniku ABC očrtano krožnico. Dokaži, da je $|AE| = |BD|$.

4. Dana je trikotna mreža velikosti 9×9 (glej sliko). V zgornjem vozlišču mreže je kolonija mravelj, v desnem vozlišču pa je njihovo mravljišče. V vseh ostalih vozliščih mreže je po eno zrno riža. Vsaka mravlja iz kolonije se na poti do mravljišča sprehaja po povezavah mreže, vendar le v smereh desno, navzdol ali diagonalno desno-navzdol. Na svoji poti pobere vsa zrna riža, na katera naleti, in ko pride do mravljišča, tam tudi ostane. Najmanj koliko mravelj bi moralo biti v koloniji, da bi lahko pobrale vsa zrna riža?



59. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije
Kranj, 18. april 2015

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Za koliko naravnih števil n, $n \leq 2015$, ulomek $\dfrac{3n-1}{2n^2+1}$ ni okrajšan?

2. Poišči vse polinome p lihe stopnje z realnimi koeficienti, za katere velja
$$p(p(x)) \leq (p(x))^3$$
za vse $x \in \mathbb{R}$ in ki imajo koeficient pri x^2 enak 0.

3. Naj bo $ABCD$ štirikotnik, za katerega velja $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB = 20°$, $\sphericalangle DCA = 30°$ in $\sphericalangle CAD = 40°$. Določi velikost kota $\sphericalangle CBD$.

4. V vrsti stoji n luči, $n \geq 3$, ki so oštevilčene s števili od 1 do n. Na začetku je vsaka liha luč v vrsti prižgana, vsaka soda luč pa ugasnjena. V vsaki potezi lahko hkrati zamenjamo stanje treh zaporednih luči v vrsti (ugasnjene prižgemo, prižgane pa ugasnemo).
   (a) Dokaži, da vrstni red izvajanja potez za končno stanje luči ni pomemben.
   (b) Za katera števila n lahko v končno mnogo potezah pridemo do stanja, v katerem bo vsaka liha luč v vrsti ugasnjena, vsaka soda luč pa prižgana?

59. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Kranj, 18. april 2015

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. **Za reševanje imaš na voljo 210 minut.**
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

1. Poišči vse pare naravnih števil a in b, za katere je $2a^b = ab + 3$.

2. Naj bo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zaporedje neničelnih realnih števil, za katerega velja $a_n^2 = -a_{n+1}a_{n-1}$ za vsa naravna števila n, $n \geq 2$. Dokaži, da je zaporedje $a_2, a_4, a_6, \ldots$ geometrijsko.

3. Naj bosta D in E zaporedoma razpolovišči stranic BC in CA trikotnika ABC. Premici AD in BE sekata trikotniku ABC očrtano krožnico zaporedoma še v točkah P in Q. Denimo, da je $|DP| = |EQ|$. Dokaži, da je trikotnik ABC enakokrak z vrhom C.

4. V podjetju, ki ga vodi več direktorjev, imajo sef, ki je zaklenjen s šestimi ključavnicami. Vsak direktor ima tri ključe, s katerimi lahko odklene tri različne ključavnice. Z vsakim ključem lahko odklene natanko eno ključavnico.

   Nobena dva direktorja ne moreta odkleniti istih treh ključavnic in nobena dva direktorja skupaj ne moreta odpreti sefa. Največ koliko direktorjev vodi to podjetje?

59. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Kranj, 18. april 2015

Rešitve nalog in točkovnik

I/1. Evino število mora biti vsaj štirimestno, da lahko trikrat zaporedoma izbrišemo zadnjo števko in še vedno dobimo naravno število. Hkrati pa Evino število ne more biti več kot štirimestno, saj je vsota vseh štirih števil štirimestna. Označimo torej Evino število z $\overline{abcd}$, kjer so a, b, c in d števke. Potem je Igorjevo število $\overline{abc}$, Markovo število $\overline{ab}$ in Marušino število $\overline{a}$. Vsota vseh štirih števil je enaka

$$1000a + 100(a+b) + 10(a+b+c) + (a+b+c+d) = 3838.$$

Ker so a, b, c in d števke, je $a+b+c+d \leq 36$. Ker pa so enice števila 3838 enake 8, mora biti $a+b+c+d \leq 28$. Torej se pri računu k deseticam prenese največ 2. Ker je $a+b+c+2 \leq 29$, se k stoticam prenese največ 2. Ker je $a+b+2 \leq 20$ in so stotice števila 3838 enake 3, se k tisočicam prenese največ 1. Od tod sledi, da je a enak 2 ali 3. Možnost $a = 2$ odpade, saj bi v tem primeru moralo veljati $10 \leq a+b = 2+b \leq 11$, zato bi se pri računu k stoticam moralo prenesti vsaj 7, kar pa ni mogoče. Torej je $a = 3$.

Ker se k stoticam prenese največ 2, je b enak $3, 4$ ali 5. Možnost $b = 5$ odpade, saj bi v tem primeru moralo veljati $8 \leq 8+c = a+b+c \leq 9$, zato bi se k deseticam moralo prenesti vsaj 4, kar pa ni mogoče. Tudi možnost $b = 3$ odpade. V tem primeru bi se namreč k stoticam moralo prenesti 2. Toda ker se k deseticam prenese največ 2, bi veljalo $a+b+c+2 = 8+c < 20$ in zato bi se k stoticam preneslo največ 1. Torej je $b = 4$.

Ker se k deseticam prenese največ 2, je c enak $4, 5$ ali 6. Možnost $c = 6$ odpade, saj bi v tem primeru moralo veljati $13 + c = a+b+c+d \leq 9$, kar pa ni res. Če bi bil $c = 4$, bi se k deseticam moralo prenesti 2. V tem primeru bi imeli $a+b+c+d = 11+d$, zato bi moral biti $d = 9$. Toda potem bi bile enice vsote števil enake 0, kr pa je protislovje. Torej je $c = 5$ in zato $d = 6$.

Eva, Igor, Marko in Maruša so zapisali števila $3456, 345, 34$ in 3.

Utemeljitev, koliko števk imajo števila .... **1 točka**
Utemeljitev, da je a=3 .... **2 točki**
Utemeljitev, da je b=4 .... **2 točki**
Utemeljitev, da je c=5 in d=6 .... **1 točka**
Zapisana reštev (vsa štiri števila) .... **1 točka**

I/2. 1. način. Enačbi odštejemo, da dobimo

$$x^3 - y^3 + x^2 + y^2 + xy + 2x - 2y + 2 = 0.$$

Levo stran preoblikujemo

$$\begin{aligned}
&x^3 - y^3 + x^2 + y^2 + xy + 2x - 2y + 2 = \\
&= (x-y)(x^2+xy+y^2) + (x^2+xy+y^2) + 2(x-y+1) = \\
&= (x-y+1)(x^2+xy+y^2) + 2(x-y+1) = \\
&= (x-y+1)(x^2+xy+y^2+2).
\end{aligned}$$

Ker je $x^2+xy+y^2+2=\frac{1}{2}(x^2+(x+y)^2+y^2)+2>0$, mora biti $x-y+1=0$. Vrednost izraza $x-y$ je enaka -1.

2. način. Iz druge enačbe izrazimo $x=y^3-y^2+3y$ in vstavimo v prvo enačbo ter poenostavimo, da dobimo

$$y^9-3y^8+12y^7-18y^6+34y^5-19y^4+21y^3+11y^2+4y+2=0.$$

S precej spretnosti lahko levo stran enačbe razstavimo

$$(y^3-y^2+2y+1)(y^6-2y^5+8y^4-7y^3+13y^2+2)=0.$$

Ker je

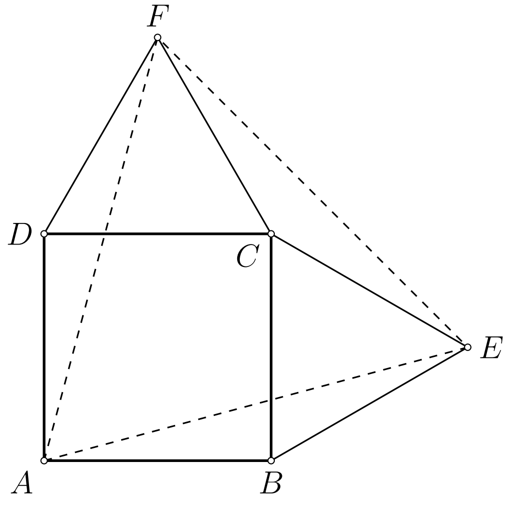
$$\begin{aligned} y^6-2y^5+8y^4-7y^3+13y^2+2 &= y^4(y^2-2y+1)+7y^2\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)+\frac{45}{4}y^2+2= \\ &= y^4(y-1)^2+7y^2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{45}{4}y^2+2>0, \end{aligned}$$

mora biti $y^3-y^2+2y+1=0$ oziroma $y=y^3-y^2+3y+1$. Torej je

$$x-y=(y^3-y^2+3y)-(y^3-y^2+3y+1)=-1.$$

1. način:
Odštetje enačb .... **1 točka**
Faktorizacija .... **3 točke**
$x^2+xy+y^2+2>0$ .... **2 točki**
$x-y=-1$ .... **1 točka**
2.način:
Polinom v samo eni spremenljivki .... **1 točka**
Faktorizacija .... **3 točke**
$y^6-2y^5+8y^4-7y^3+13y^2+2>0$ .... **2 točki**
$x-y=-1$ .... **1 točka**

I/3.



1. način. Ker je $ABCD$ kvadrat in sta trikotnika BEC in CFD enakostranična, je $|EB| = |BA| = |AD| = |DF|$. Torej sta trikotnika EBA in ADF enakokraka z vrhoma pri B in D in imata enako dolge krake. Hkrati velja $\sphericalangle EBA = \sphericalangle ADF = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$, zato sta omenjena trikotnika skladna. Sledi $|AE| = |AF|$. Poleg tega velja $\sphericalangle FAD = \sphericalangle BAE = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle EBA) = 15^\circ$, zato je $\sphericalangle EAF = 90^\circ - \sphericalangle BAE - \sphericalangle FAD = 60^\circ$. Torej je trikotnik EAF enakokrak s kotom 60° pri vrhu A, od koder sledi, da je enakostraničen.

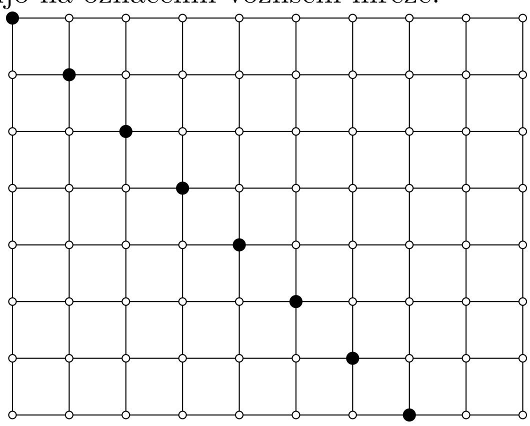
2. način. Ker je $ABCD$ kvadrat in sta trikotnika BEC in CFD enakostranična, je $|EB| = |BA| = |AD| = |DF| = |CE| = |CF|$. Trikotniki EBA, ADF in ECF so torej enakokraki. Velja $\sphericalangle EBA = \sphericalangle ADF = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ ter $\sphericalangle ECF = 360^\circ - 90^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 150^\circ$. Trikotniki EBA, ADF in ECF se torej ujemajo v dveh stranicah in kotu med njima, zato so skladni. Sledi $|EA| = |AF| = |EF|$, zato je trikotnik AEF enakostraničen.

1. način:
Zapis enakosti dolžin $|EB| = |BA| = |AD| = |DF|$ .... 1 točka
Sklep, da sta trikotnika EBA in ADF enakokraka .... 1 točka
Dokaz, da sta trikotnika EBA in ADF skladna .... 1 točka
Zapis $|AE| = |AF|$ in sklep, da je trikotnik AEF enakokrak .... 2 točki
Izračun $\sphericalangle EAF = 60^\circ$ .... 1 točka
Zaključek, da je trikotnik AEF enakostraničen .... 1 točka
2. način:
Zapis enakosti dolžin $|EB| = |BA| = |AD| = |DF| = |CE| = |CF|$ .... 1 točka
Sklep, da so trikotniki EBA, ADF in ECF enakokraki .... 1 točka
Izračun $\sphericalangle EBA = \sphericalangle ADF = \sphericalangle ECF$ .... 2 točki
Sklep, da so trikotniki EBA, ADF in ECF skladni .... 1 točka
Ugotovitev $|EA| = |AF| = |EF|$ in trikotnik AEF je enakostraničen .... 2 točki

I/4. Kolonija mora vsebovati najmanj 8 mravelj.

Dokažimo najprej, da 8 mravelj lahko pobere vsa zrna riža. To lahko storijo na primer tako, da se i-ta od teh 8 mravelj sprehodi najprej navpično navzgor do i-te vrstice mreže, nato po i-ti vrstici v desno do skrajnega desnega roba mreže in nazadnje navzgor do mravljišča. Tako teh 8 mravelj pobere vsa zrna riža, saj i-ta mravlja izprazni celotno i-to vrstico mreže.

Sedaj pa dokažimo, da 7 mravelj ne more pobrati vseh zrn riža. Oglejmo si zrna riža, ki ležijo na označenih vozliščih mreže.



Ker se mravlje lahko sprehajajo le v desno ali navzgor, nobena mravlja ne more pobrati dveh izmed teh zrn riža. Torej 7 mravelj ne more pobrati vseh teh 8 zrn riža.

Pravilni odgovor: 8 mravelj .... 1 točka

Dokaz, da 8 mravelj lahko pobere ves riž .... 1 točka
Identificirana ključna vozlišča .... 4 točke
Dokaz, da 7 mravelj ne more pobrati vseh zrn na označenih vozliščih .... 1 točka

II/1. 1. način. Enačbi seštejemo in dobimo $x+y=3$. Od tod izrazimo $y=3-x$ in vstavimo v prvo enačbo, da dobimo $x+\frac{1}{3-2x}=1$. Odpravimo ulomke in preoblikujemo do $2x^2-5x+2=0$. Levo stran te enačbe lahko razstavimo $2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$. Sledi $x=2$ ali $x=\frac{1}{2}$. V prvem primeru je $y=1$, v drugem pa $y=\frac{5}{2}$. Ker je v obeh primerih $x-y\neq 0$, sta $(2,1)$ in $(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ res rešitvi danega sistema enačb.

2. način. Enačbi odštejemo in dobimo $y-x-\frac{2}{y-x}=1$. Z uvedbo spremenljivke $a=y-x$ preoblikujemo do $a^2-a-2=0$. Levo stran te enačbe lahko razstavimo $(a+1)(a-2)=0$. Sledi $a=-1$ in $a=2$. Za vsak primer a vstavimo v prvo enačbo in dobimo $x=2$ in $x=\frac{1}{2}$. V prvem primeru iz $a=y-x$ sledi $y=1$, v drugem pa $y=\frac{5}{2}$. Ker je v obeh primerih $y-x\neq 0$, sta $(2,1)$ in $(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ res rešitvi danega sistema enačb.

1.način:
Izračun $x+y=3$ .... **2 točki**
Dobljena kvadratna enačba $2x^2-5x+2=0$ .... **2 točki**
Faktorizacija ali uporaba formule za rešitve kvadratne enačbe .... **1 točka**
Izračunana $x=2$ **in** $y=1$ .... **1 točka**
Izračunana $x=\frac{1}{2}$ **in** $y=\frac{5}{2}$ .... **1 točka**

2.način:
Izračun enačbe $y-x-\frac{2}{y-x}=1$ .... **2 točki**
Dobljena kvadratna enačba $a^2-a-2=0$; $a=y-x$ .... **2 točki**
Faktorizacija ali uporaba formule za rešitve kvadratne enačbe .... **1 točka**
Izračunana $x=2$ **in** $y=1$ .... **1 točka**
Izračunana $x=\frac{1}{2}$ **in** $y=\frac{5}{2}$ .... **1 točka**

Tekmovalcu, ki reši nalogo, vendar ne preveri, da rešitve ustrezajo pogoju $x-y\neq 0$**, se odbije 1 točka.**

II/2. 1. način. Naj bo d največji skupni delitelj števil a in b. Torej je $a=dm$ in $b=dn$, kjer sta m in n tuji naravni števili. Ker je $ab=d^2mn$ popoln kvadrat in sta m in n tuji števili, sta tudi m in n popolna kvadrata. Pišimo $m=x^2$ in $n=y^2$, kjer sta x in y naravni števili. Sledi $101=a-b=d(x+y)(x-y)$. Ker je 101 praštevilo in je $x+y\geq 2$, mora veljati $d=x-y=1$ in $x+y=101$. Od tod izračunamo $x=51$ in $y=50$, torej je $a=51^2=2601$ in $b=50^2=2500$.

2. način. Naj bo d največji skupni delitelj števil a in b. Ker d deli 101 in je 101 praštevilo, je lahko le $d=1$ ali $d=101$.

Če je $d=1$, sta si a in b tuji števili. Ker je ab popoln kvadrat, sledi, da sta tudi a in b popolna kvadrata. Pišimo $a=x^2$ in $b=y^2$, kjer sta x in y naravni števili. Tedaj je $101=a-b=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$, od koder sledi $x-y=1$ in $x+y=101$, saj je 101 praštevilo in $x+y\geq 2$. Iz teh dveh enačb zlahka izračunamo $x=51$ in $y=50$, torej je $a=51^2=2601$ in $b=50^2=2500$.

Če je $d=101$, lahko zapišemo $a=101m$ in $b=101n$, kjer sta m in n tuji naravni števili. Ker je $ab=101^2mn$ popoln kvadrat in sta si m in n tuji števili, sledi da sta tudi m in n popolna kvadrata. Pišimo $m=u^2$ in $n=v^2$, kjer sta u in v naravni števili. Tedaj je $101=a-b=101(m-n)=$ oziroma $1=m-n=(u+v)(u-v)$, kar pa je protislovje, saj je $u+v\geq 2$.

Edina rešitev naloge je torej par $a=2601$ in $b=2500$.

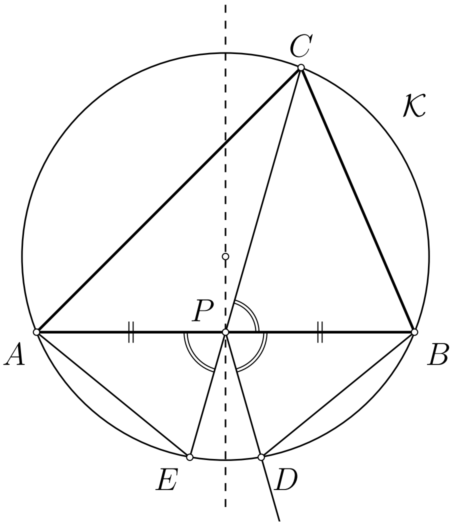
3. način. Zapišimo $a = b + 101$ in izračunamo $ab = b(b + 101) = n^2$ za neko naravno število n. Od tod izrazimo $n^2 - b^2 = (n - b)(n + b) = 101b$. Ker je 101 praštevilo, velja $101|(n - b)$ ali $101|(n + b)$. Obravnavamo obe možnosti.

Če $101|(n - b)$, lahko zapišemo $n - b = 101k$ za neko naravno število k. Iz enačbe $(n - b)(n + b) = 101b$ sledi $kn = b(1 - k)$, kar je protislovje, ker je leva stran enačbe strogo pozitivna, desna pa manjša ali enaka nič.

Če $101|(n + b)$, lahko zapišemo $n + b = 101l$ za neko naravno število l. Iz enačbe $(n - b)(n + b) = 101b$ sledi $l(101l - 2b) = b$, oziroma $101l^2 = b(2l + 1)$, od koder izrazimo $b = \dfrac{101l^2}{2l+1}$, kar mora biti naravno število. Torej $2l+1$ deli $101l^2$. Ker je 101 praštevilo, mora veljati $(2l + 1)|101$, zato lahko zapišemo $101 = (2l + 1)c$, kjer je $c \in \mathbb{N}$. Ker je $2l + 1 > 1$, mora veljati $c = 1$ in $2l + 1 = 101$. Od tod izračunamo $l = 50$ in $b = 50^2 = 2500$. Nato izračunamo še $a = 2601$.

1. način:
Vpeljava največjega skupnega delitelja .... **1 točka**
Ugotovitev, da sta m in n popolna kvadrata .... **2 točki**
Zapis $101 = d(x + y)(x - y)$ .... **1 točka**
Sklep, da je $x - y = 1$ in $x + y = 101$ .... **2 točki**
Izračun rešitve $a = 51^2 = 2601$ in $b = 50^2 = 2500$ .... **1 točka**
2. način:
Vpeljava največjega skupnega delitelja .... **1 točka**
Ugotovitev, da sta v primeru $d = 1$, števili a in b popolna kvadrata .... **1 točka**
Zapis $101 = (x + y)(x - y)$ oziroma $1 = (u + v)(u - v)$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da je $x - y = 1$ in $x + y = 101$ .... **1 točka**
Izračun $a = 51^2 = 2601$ in $b = 50^2 = 2500$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da sta v primeru $d = 101$ števili m in n popolna kvadrata .... **1 točka**
Sklep, da v primeru $d = 101$ ne dobimo nobene rešitve .... **1 točka**
3. način:
Zapis $b(b + 101) = n^2$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da velja $101|(n - b)$ ali $101|(n + b)$ .... **1 točka**
Pravilna obravnava primera, ko $101|(n - b)$ .... **2 točki**
Pravilna obravnava primera, ko $101|(n + b)$ .... **2 točki**
Izračun $b = 2500$ in $a = 2601$ .... **1 točka**

II/3.



1. način. Naj bo $\mathcal{K}$ trikotniku ABC očrtana krožnica. Ker je poltrak PD zrcalna slika poltraka PC pri zrcaljenju čez premico AB, velja $\sphericalangle DPB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle APE$. Oglejmo si zrcaljenje preko simetrale stranice AB. Točka A se prezrcali v točko B. Ker je P središče stranice AB, se pri zrcaljenju ohrani. Iz zgornje enakosti kotov zato sledi, da se poltrak PE prezrcali v poltrak PD. Ker simetrala stranice AB poteka skozi središče krožnice $\mathcal{K}$, se krožnica $\mathcal{K}$ prezrcali sama vase. Torej se presečišče poltraka PE in krožnice $\mathcal{K}$, tj. točka E, prezrcali v presečišče poltraka PD in krožnice $\mathcal{K}$, tj. točko D. Pokazali smo, da se daljica AE prezrcali v daljico BD. Ker zrcaljenje ohranja razdalje, je $|AE| = |BD|$.

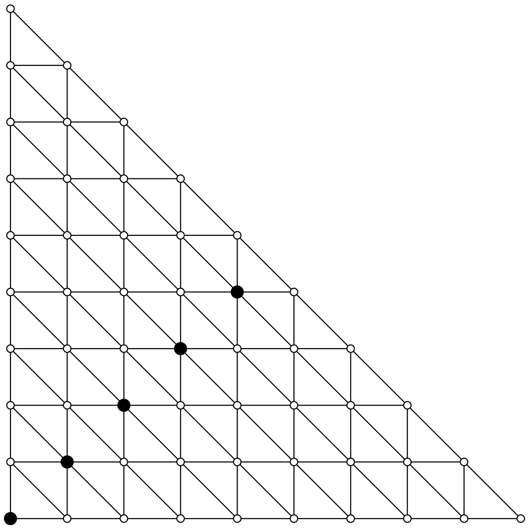
2. način. Naj bo $\mathcal{K}$ trikotniku ABC očrtana krožnica. Ker je poltrak PD zrcalna slika poltraka PC pri zrcaljenju čez premico AB, velja $\sphericalangle DPB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle APE$. Velja tudi $|AP| = |PB|$. Pokazati želimo še $|PE| = |PD|$. Ker tocka P leži na simetrali AB in gre simetrala skozi središče krožnice $\mathcal{K}$ (označimo ga z O) velja: $|OE| = |OD|$, $\sphericalangle APO = \sphericalangle BPO$ in $\sphericalangle EPA = \sphericalangle DPB$. Ker imata trikotnika EPO in DPO še skupno stranico OP, sta skladna in zato je tudi $|PE| = |PD|$. Torej sta si trikotnika AEP in BDP skladna in je $|AE| = |BD|$.

Pokazano $\sphericalangle DPB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle APE$ .... 2 točki
Sklep $|PE| = |PD|$ oz. poltrak PE se preslika v PD .... 3 točke
Sklep: Trikotnika APE in BPD sta skladna oz. AE se preslika v BD .... 1 točka
Sklep $|AE| = |BD|$ .... 1 točka

Če kandidat nakaže, kako bi dokazal enakost, s tem da sta APE in BPD skladna, (pokaže $\sphericalangle DPB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle APE$ in $|AP| = |PB|$), ne pokaže pa $|PE| = |PD|$, dobi največ 3 točke.

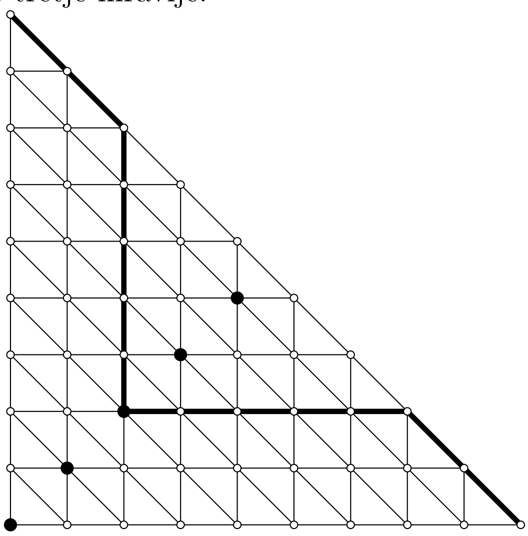
II/4. Kolonija mora vsebovati najmanj 5 mravelj.

Dokažimo najprej, da 4 mravlje ne morejo pobrati vseh zrn riža. Oglejmo si zrna riža, ki ležijo na petih označenih vozliščih mreže.



Ker se mravlje lahko premikajo le desno, navzdol ali diagonalno desno-navzdol, lahko vsaka mravlja pobere največ eno izmed teh zrn riža, zato 4 mravlje ne morejo pobrati vseh.

Sedaj dokažimo, da 5 mravelj lahko pobere vsa zrna riža. To lahko storijo na primer tako, da se i-ta izmed teh 5 mravelj najprej sprehodi diagonalno desno-navzdol i-tega stolpca mreže, nato po njem navzdol do enega od označenih vozlišč mreže, nato po vrstici v desno do roba mreže in nazadnje diagonalno desno-navzdol do mravljišča. Na sliki je prikazana pot tretje mravlje.



Teh 5 mravelj res pobere vsa zrna riža, saj prva mravlja izprazni prvi stolpec in zadnjo vrstico mreže, druga mravlja izprazni drugi stolpec in predzadnjo vrstico in tako naprej.

Ugotovitev, da lahko vsaka mravlja pobere največ eno izmed zrn na označenih mestih .... 2 točki
Dokaz zgornje ugotovitve .... 1 točka
Sklep, da mora kolonija vsebovati vsaj pet mravelj .... 1 točka
Nedvoumen opis poti petih mravelj, ki poberejo vsa zrna, in ugotovitev, da pet mravelj zadošča .... 2 točki
Utemeljitev, da mravlje iz zgornje točke res poberejo vsa zrna .... 1 točka

Če tekmovalec za dejstvo, da mora kolonija vsebovati vsaj pet mravelj, nima pravilne utemeljitve, se mu pri tretji alineji ne dodeli točke.

Če je opis poti iz četrte alineje podan s skico, s katere je jasno razvidno, da so pobrana vsa zrna, se tekmovalcu prizna tudi točka iz zadnje alineje.

III/1. Denimo, da ulomek $\frac{3n-1}{2n^2+1}$ ni okrajšan. Potem obstaja naravno število a, različno od 1, ki deli $3n-1$ in $2n^2+1$. Sledi, da a deli tudi $3(2n^2+1)-2n(3n-1)=2n+3$ in zato tudi $3(2n+3)-2(3n-1)=11$. Ker je 11 praštevilo, sledi $a=11$, torej 11 deli $3n-1$ in $2n^2+1$. To pomeni, da obstaja celo število k, da je $3n-1=11k$. Od tod izrazimo $n=\frac{11k+1}{3}$. Da bo to celo število, mora 3 deliti $11k+1$ oziroma $2k+1$, kar pa se zgodi natanko tedaj, ko je k oblike $k=3m+1$ za neko celo število m. V tem primeru je $n=11m+4$ in tudi število $2n^2+1=2(11m+4)^2+1=2\cdot 11^2m^2+4\cdot 11m+33$ je deljivo z 11. Ker mora biti $1\leq n\leq 2015$, je $0\leq m\leq 182$. Dan ulomek torej ni okrajšan za 183 naravnih števil n.

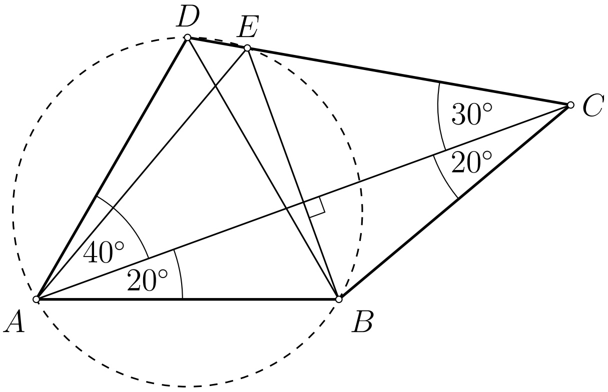
Primer ulomka, ki ni okrajšan (npr. $n=4$**)** .... 1 **točka**
Ugotovitev, da a **deli** $n(2n+3)$ .... 2 **točki**
Sklep, da je $a=11$ .... 1 **točka**
Zapis $n=11m+4$ .... 1 **točka**
Ugotovitev, da je potem $2n^2+1$ **tudi deljivo z** 11 .... 1 **točka**
Sklep, da ulomek ni okrajšan za 183 **števil** .... 1 **točka**

III/2. Pišimo $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, kjer je $a_n\neq 0$. Vodilni člen polinoma $p(p(x))$ je enak $a_n(a_nx^n)^n=a_n^{n+1}x^{n^2}$, vodilni člen polinoma $p(x)^3$ pa $(a_nx^n)^3=a_n^3x^{3n}$, oba sta lihe stopnje. Ker je polinom $p(x)^3-p(p(x))$ povsod nenegativen, mora biti sode stopnje, zato se morata omenjena vodilna člena pokrajšati. Torej je $a_n^{n+1}x^{n^2}=a_n^3x^{3n}$ oziroma $n^2=3n$ in $a_n^{n+1}=a_n^3$. Sledi $n=3$ in $a_n=1$, saj je $a_n\neq 0$, tj. p je polinom stopnje 3 z vodilnim koeficientom 1. Ker je koeficient polinoma p pri x^2 enak 0, je polinom p oblike $p(x)=x^3+ax+b$. Ko slednje upoštevamo v dani neenakosti in neenakost poenostavimo, dobimo $ax^3+a^2x+ab+b\leq 0$ za vsak $x\in\mathbb{R}$. Slednje je mogoče le, če je $a=0$, saj polinom lihe stopnje vedno zavzame tudi pozitivne vrednosti. Neenakost se v tem primeru poenostavi do $b\leq 0$. Polinomi, ki zadoščajo pogojem naloge so natanko polinomi oblike $p(x)=x^3+b$, kjer je $b\leq 0$.

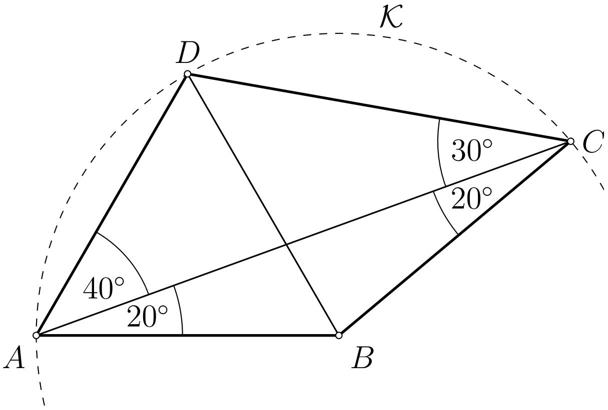
Stopnji polinomov $p^3(x)$ **in** $p(p(x))$ **sta lihi** .... **1 točka**
Stopnja polinoma $p^3(x)-p(p(x))$ **mora biti soda** .... **1 točka**
Stopnja polinoma p **je 3** .... **1 točka**
Koeficient pri členu x^3 **je** 1 .... **1 točka**
Nastavek $p(x)=x^3+ax+b$ **vstavljen v neenakost** .... **1 točka**
Ugotovitev $a=0$ .... **1 točka**
Pravilna družina rešitev s pogojem $b\leq 0$ .... **1 točka**

Dodatek:
Ugotovitev, da je prosti člen manjši ali enak 0**, lahko dobimo tudi drugače: ker je** p **lihe stopnje, ima realno ničlo** x_0**. Potem mora biti** $a_0=p(0)=p(p(x_0))\leq p(x_0)^3=0$ **.1 točka**
Poleg tega je točke možno dobiti še za:
Uganjena vsaj ena pravilna rešitev .... **1 točka**
Izključen polinom stopnje 1 **pri obravnavi** .... **1 točka**
Pravilno razpisana splošna neenakost $p(p(x))\leq p(x)^3$ .... **1 točka**

III/3.



1. način. Opazimo da je trikotnik ABC enakokrak z vrhom pri B. Naj bo E taka točka na premici CD, da je $\sphericalangle CAE = 30°$, tako da bo tudi trikotnik ACE enakokrak z vrhom pri E. Ker je $\sphericalangle CAD = 40°$, točka E leži med C in D. Potem je štirikotnik $ABCE$ deltoid, zato se njegovi diagonali AC in BE sekata pod pravim kotom. Torej velja $\sphericalangle BEC = 90° - 30° = 60°$ in zato $\sphericalangle BAD = 60° = \sphericalangle BEC = 180° - \sphericalangle DEB$. To pomeni, da so točke A, B, E in D konciklične. Po izreku o obodnih kotih velja $\sphericalangle EBD = \sphericalangle EAD = 40° - 30° = 10°$, zato je $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CBE + \sphericalangle EBD = (90° - 20°) + 10° = 80°$.



2. način. Opazimo da je trikotnik ABC enakokrak z vrhom pri B. Naj ko $\mathcal{K}$ krožnica s središčem B, ki gre skozi točki A in C. Dokažimo, da tudi točka D leži na krožnici $\mathcal{K}$. Iz podatkov naloge izračunamo $\sphericalangle ADC = 180° - 40° - 30° = 110°$ in $\sphericalangle CBA = 180° - 20° - 20° = 140°$. Torej je središčni kot nad lokom $\widehat{AC}$ enak $\sphericalangle ABC = 360° - \sphericalangle CBA = 220°$ in je dvakratnik kota $\sphericalangle ADC$. Po izreku o središčnem in obodnem kotu je torej $\sphericalangle ADC$ obodni kot nad lokom $\widehat{AC}$, kar pomeni, da točka D leži na krožnici $\mathcal{K}$. Od tod sledi, da je trikotnik CBD enakokrak z vrhom pri B, zato je $\sphericalangle CBD = 180° - 2\sphericalangle DCB = 180° - 100° = 80°$.

1.način:
Ugotovitev, da je $\triangle ABC$ enakokrak .... 1 točka
Določitev točke E tako, da je $\sphericalangle CAE = 30°$ .... 2 točki
Ugotovitev, da je štirikotnik $ABED$ kocikličen .... 2 točki
Izračun $\sphericalangle CBD = 80°$ .... 2 točki

2. način:
Ugotovitev, da je $\triangle ABC$ enakokrak .... 1 točka
Obravnavanje krožnice $\mathcal{K}$ s središčem v točki B, ki gre skozi točki A in C .... 2 točki
Ugotovitev, da točka D leži na krožnici $\mathcal{K}$ .... 2 točki
Izračun $\sphericalangle CBD = 80°$ .... 2 točki

Za pravilno ugotovljeno rešitev brez ustreznega dokaza se podeli 1 točka.

III/4.

(a) Oglejmo si, kaj se dogaja s stanjem ene luči pri izvajanju potez. Vsaka poteza stanje luči bodisi zamenja bodisi ohrani. Končno stanje neke luči, je zato odvisno le od števila izvedenih potez, ki stanje te luči zamenjajo, ni pa odvisno od vrstnega izvajanja potez. Torej tudi končno stanje vseh luči ni odvisno od vrstnega reda izvajanja potez, ampak le od tega, katere poteze izvedemo.

(b) To je mogoče natanko za tiste n, ki so deljivi s 3.

Denimo najprej, da je n deljiv s 3 in pokažimo, da v tem primeru res lahko pridemo do željenega stanja. Naj bo P_i poteza, pri kateri zamanjamo stanja i-te, $(i+1)$-ve in $(i+2)$-ge luči v vrsti. Ker je n deljiv s 3 in vsaka poteza spremeni stanje 3 luči, lahko v tem primeru z $\frac{n}{3}$ potezami, to so $P_1, P_4, P_7, \ldots, P_{n-2}$, spremenimo stanje vseh luči v vrsti in s tem pridemo do željenega stanja.

Sedaj pa pokažimo, da je do željenega stanja mogoče priti le v primeru, če je n deljiv s 3. Ker po točki (a) vrstni red potez ni pomemben, lahko predpostavimo, da poteze P_i izvajamo po vrsti, najprej tiste z manjšim i. Če potezo P_i izvedemo dvakrat, se stanje luči ohrani. Torej lahko nadalje predpostavimo, da vsako potezo P_i izvedemo kvečjemu enkrat. Gremo torej po vrsti po potezah $P_1, P_2, P_3, \ldots$ in se za vsako odločimo, ali jo izvedemo ali ne. Ob koncu mora biti vsaka liha luč ugasnjena, vsaka soda pa prižgana. Ker moramo stanje 1. luči spremeniti, spremeni pa ga lahko le poteza P_1, moramo potezo P_1 nujno izvesti. Po tej potezi so prve tri luči že v pravem stanju. Ker od preostalih potez stanje 2. luči spremeni le poteza P_2, te poteze ne smemo izvesti. Med potezami $P_3, P_4, P_5, \ldots$ stanje 3. luči spremeni le poteza P_3, zato tudi te poteze ne smemo izvesti. Sedaj smo pri potezi P_4 in razmišljamo podobno. Stanje 4. luči moramo spremeniti, zato moramo potezo P_4 izvesti. Po tej potezi so 4., 5. in 6. luč v pravem stanju, zato poteze P_5 ne smemo izvesti in poteze P_6 tudi ne. Nadaljujemo v enakem smislu, potezo P_7 moramo izvesti, potez P_8 in P_9 pa ne, in tako dalje. S tem smo ugotovili, da moramo nujno izvesti zaporedje potez $P_1, P_4, P_7, \ldots$. Da bo to zaporedje spremenilo stanje vseh luči v vrsti, mora biti n deljiv s 3. Če ima namreč n ostanek 1 pri deljenju s 3, potem stanja zadnje luči ne bomo spremenili, saj poteza P_n ni dopustna, ker bi spremenila stanje le ene same luči. Podobno, če ima n ostanek 2 pri deljenju s 3, potem stanja zadnjih dveh luči ne bomo spremenili, saj potezi P_{n-1} in P_n nista dopustni.

Dokaz točke (a) ....2 točki
Primer izvajanja potez ko $3|n$ ....1 točka
Sklep, da je vsako potezo smiselno uporabiti le enkrat .... 1 točka
Ugotovitev katere poteze na začetku/koncu moramo izvesti ....2 točki
Dokončanje sklepa, da tedaj $3|n$ ....1 točka

IV/1. 1. način. Ker je b naravno število, a deli $2a^b$ in ab, torej a deli tudi 3. Ker je 3 praštevilo, je $a = 1$ ali $a = 3$. Če je $a = 1$, dobimo enačbo $2 = b + 3$, ki pa nima rešitev v naravnih številih. Torej je $a = 3$, od koder sledi $2 \cdot 3^b = 3b + 3$ oziroma $2 \cdot 3^{b-1} = b + 1$. Ena rešitev je te enačbe je $b = 1$. Dokažimo, da drugih rešitev v naravnih številih ni. To bomo storili tako, da bomo z indukcijo na b dokazali, da velja $2 \cdot 3^{b-1} > b + 1$ za vse $b \geq 2$. Za $b = 2$ je to res, saj je $2 \cdot 3^1 = 6 > 3 = 2 + 1$. Predpostavimo, da velja $2 \cdot 3^{b-1} > b + 1$ za nek $b \geq 2$. Potem je $2 \cdot 3^b = 3 \cdot 2 \cdot 3^{b-1} > 3(b + 1) > b + 2$. Indukcija je s tem končana. Torej res velja $2 \cdot 3^{b-1} > b + 1$ za vse $b \geq 2$, kar pomeni, da je $b = 1$ edina rešitev enačbe $2 \cdot 3^{b-1} = b + 1$ v naravnih številih.

Dano enačbo reši le par $a = 3$ in $b = 1$.

2. način. Kot v prvi rešitvi sklepamo, da velja $a = 3$ in $2 \cdot 3^b = 3b + 3$. Oglejmo si funkciji $f(x) = 3x + 3$ in $g(x) = 2 \cdot 3^x$. Realne rešitve enačbe $2 \cdot 3^b = 3b + 3$ so tiste točke, pri katerih se grafa funkcij f in g sekata. Funkcija f je linearna funkcija, funkcija g pa je skalarni večkratnik eksponentne funkcije. Grafa takih dveh funkcij se sekata kvečjemu dvakrat. Ker je $f(1) = 6 = g(1)$, je eno presečišče pri $x = 1$. Drugo presečišče leži na intervalu med -1 in 0, saj velja $f(-1) = 0 < \frac{2}{3} = g(-1)$ in $f(0) = 3 > 2 = g(0)$. Enačba $2 \cdot 3^b = 3b + 3$ ima torej dve realni rešitvi, od katerih pa je le $b = 1$ naravno število.

Dano enačbo reši torej le par $a = 3$ in $b = 1$.

Ugotovitev, da a deli 3 ali da sta a in b lihi števili .... 1 točka
Zapis, da za $a = 3$, dobimo enačbo $2 \cdot 3^{b-1} = b + 1$ .... 1 točka
Rešitev $a = 3$ in $b = 1$ .... 1 točka
Utemeljitev, da je to edina rešitev - utemeljitev, da je $a \leq 3$ .... 2 točki
Utemeljitev, da je to edina rešitev - da je za $a = 3$, $b = 1$ edina rešitev enačbe $2 \cdot 3^{b-1} = b + 1$ .... 2 točki

IV/2. 1. način. Za vsak $n \geq 2$ lahko dano rekurzivno formulo preoblikujemo v $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{a_n}{a_{n-1}}$. S pomočjo te formule izračunamo

$$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} \cdot \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \left(-\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right) \cdot \left(-\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}\right) = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}.$$

Z dvakratno zaporedno uporabo te enakosti dobimo

$$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = \frac{a_{2n}}{a_{2n-2}},$$

kar pomeni, da je zaporedje $a_2, a_4, a_6, \ldots$ geometrijsko.

2. način. Potem, ko formulo preoblikujemo v $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{a_n}{a_{n-1}}$, vidimo, da je zaporedje pozitivnih realnih števil $|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots$ geometrijsko, torej obstajata pozitivni realni števili a in q, da je $|a_n| = aq^{n-1}$ za vsa naravna števila n. Sledi, da je za vsak n bodisi $a_n = aq^{n-1}$ bodisi $a_n = -aq^{n-1}$. Če v enačbo, s katero je prvotno zaporedje definirano, vstavimo $2n + 1$ namesto n, dobimo $a_{2n+2}a_{2n} = -a_{2n+1}^2 \leq 0$, zato sta v zaporedju $a_2, a_4, a_6, \ldots$ sosednja člena nasprotnega predznaka. Od tod sklepamo, da je bodisi

$$a_{2n} = (-1)^n aq^{2n-1} = -aq(-q^2)^{n-1}$$

za vse n bodisi

$$a_{2n} = aq(-q^2)^{n-1}$$

za vse n. V obeh primerih je $a_2, a_4, a_6, \ldots$ geometrijsko zaporedje.

3. način. Enakost $a_n^2 = -a_{n+1}a_{n-1}$ kvadriramo, da dobimo $(a_n^2)^2 = a_{n+1}^2 a_{n-1}^2$. To formulo preoblikujemo v $\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2}$ in vidimo, da je zaporedje pozitivnih realnih števil $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots$ geometrijsko, torej obstajata pozitivni realni števili a in q, da je $a_n^2 = aq^{n-1}$ za vsa naravna števila n. Sledi, da je za vsak n bodisi $a_n = \sqrt{a}\sqrt{q^{n-1}}$ bodisi $a_n = -\sqrt{a}\sqrt{q^{n-1}}$. Podobno kot pri 2. načinu dobimo, da je bodisi

$$a_{2n} = (-1)^n\sqrt{a}\sqrt{q^{2n-1}} = (-1)^n\sqrt{a}\sqrt{q}\sqrt{q^{2n-2}} = (-1)^n\sqrt{aq}q^{n-1} = -\sqrt{aq}(-q)^{n-1}$$

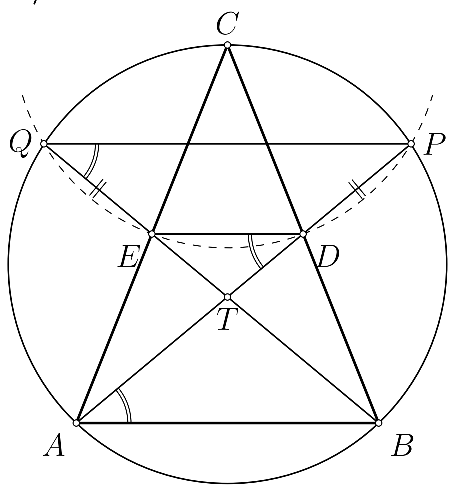
za vse n bodisi

$$a_{2n} = -(-1)^n\sqrt{a}\sqrt{q^{2n-1}} = \sqrt{aq}(-q)^{n-1}$$

za vse n. V obeh primerih je $a_2, a_4, a_6, \ldots$ geometrijsko zaporedje.

Zapis ali upoštevanje, da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{a_n}{a_{n-1}}$ .... 2 točki
Zapis ali upoštevanje enakosti kvocientov ustreznih členov ali funkcij členov zaporedja, npr. $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}$ ali $|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots$ je geometrijsko zaporedje ali $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots$ je geometrijsko zaporedje .... 2 točki
Utemeljitev, da je a_2, a_4, a_6, ... geometrijsko zaporedje .... 3 točke

IV/3.



1. način. Ker sta D in E razpolovišči daljic BC in AC, sta premici DE in AB vzporedni. Od tod sledi $\sphericalangle EDA = \sphericalangle BAD$, po izreku o obodnih kotih pa velja $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAP = \sphericalangle BQP$. Torej je $\sphericalangle EQP = \sphericalangle EDA = \pi - \sphericalangle PDE$, kar pomeni, da je štirikotnik $EDPQ$ tetiven, trikotnika TED in TPQ pa sta si podobna. Naj bo T težišče trikotnika ABC in $x = |DP| = |EQ|$. Iz podobnosti trikotnikov TED in TPQ izpeljemo

$$\frac{|TD| + x}{|TE|} = \frac{|TP|}{|TE|} = \frac{|TQ|}{|TD|} = \frac{|TE| + x}{|TD|}.$$

To enakost lahko preoblikujemo do

$$(|TD| - |TE|)(|TD| + |TE| + x) = 0,$$

od koder sledi $|TE| = |TD|$, saj je $|TD| + |TE| + x > 0$. Trikotnik DET je torej enakokrak z vrhom pri T. Zaradi vzporednosti premic AD in BE, je tudi trikontnik ABT enakokrak z vrhom pri T, torej velja $|BE| = |BT| + |TE| = |AT| + |TD| = |AD|$. Od tod sledi, da sta trikotnika ABE in BAD skladna, saj imata dva para enako dolgih stranic in enak kot med njima $\sphericalangle EBA = \sphericalangle BAD$. Torej je $|AE| = |BD|$ in zato $|AC| = |BC|$.

2. način. Kot v prvi rešitvi dokažemo, da sta premici DE in AB vzporedni in da je štirikotnik $EDPQ$ tetiven. Zato je $\sphericalangle EPD = \sphericalangle EQD$. Ker sta tetivi DP in EQ enako dolgi, pa je $\sphericalangle DEP = \sphericalangle QDE$. Zato je $\sphericalangle PDE = \sphericalangle DEQ$, kar pomeni, da je štirikotnik $EDPQ$ enakokrak trapez. Torej je $\sphericalangle TED = \sphericalangle EDT = \sphericalangle BAT$ oziroma $\sphericalangle BED = \sphericalangle BAD$. To pomeni, da je štirikotnik $ABDE$ tetiven. Ker pa sta premici AB in ED vzporedni, je tudi štirikotnik $ABDE$ enakokrak trapez. Sledi $|AE| = |BD|$ in zato $|AC| = |BC|$.

1. način:
Ugotovitev vzporednosti $AB||DE$ in izračun ene enakosti kotov s pomočjo te vzporednosti .... **1 točka**
Izračun ene enakosti kotov z upoštevanjem tetivnosti petkotnika $ABPCQ$ .... **1 točka**
Dokaz podobnosti trikotnikov TDE in TQP .... **1 točka**
Izpeljava enačbe $\frac{|TD|+x}{|TE|} = \frac{|TE|+x}{|TD|}$ .... **1 točka**
Utemeljitev, da je trikotnik DET enakokrak .... **1 točka**
Utemeljitev, da sta si trikotnika ABE in BAD skladna .... **1 točka**
Sklep, da je $|AC| = |BC|$ .... **1 točka**
2. način:
Ugotovitev vzporednosti $AB||DE$ in izračun ene enakosti kotov s pomočjo te vzporednosti .... **1 točka**
Izračun ene enakosti kotov z upoštevanjem tetivnosti petkotnika $ABPCQ$ .... **1 točka**
Dokaz tetivnosti štirikotnika $PQED$ .... **1 točka**
Utemeljitev, da je $PQED$ enakokrak trapez .... **1 točka**
Dokaz tetivnosti štirikotnika $ABDE$ .... **1 točka**
Utemeljitev, da je $ABDE$ enakokrak trapez .... **1 točka**
Sklep, da je $|AC| = |BC|$ .... **1 točka**

IV/4. 1. način. Podjetje vodi največ **10** direktorjev.

Označimo ključavnice oziroma pripadajoče ključe s številkami od 1 do 6. Vsak direktor ima set 3 ključev od 3 različnih ključavnic in nobena dva direktorja nimata enakih setov. Zato najprej preštejmo, koliko različnih setov 3 ključev obstaja. Za posamezen set ključev imamo na izbiro 6 ključavnic, med katerimi moramo izbrati 3. Gre torej za kombinacije, pri katerih izmed 6 elementov izberemo 3. Takih kombinacij je $\binom{6}{3} = 20$ (preštejemo jih lahko tudi tako, da si izpišemo vse možnosti). Vsakemu setu 3 ključev pripada *komplementarni* set 3 ključev, to je set, v katerem so ključi preostalih 3 ključavnic. Tako na primer setu ključev $\{2, 3, 5\}$ pripada komplementarni set ključev $\{1, 4, 6\}$. Množico vseh različnih setov ključev razbijemo na 10 parov komplementarnih si setov ključev. Ker vsak tak par ključev skupaj odklene sef, nobena dva direktorja ne moreta imeti komplementarnih si setov ključev. Torej je direktorjev lahko največ 10, saj iz vsakega para komplementarnih si setov ključev kvečjemu en set pripada nekemu direktorju.

Pokažimo, da 10 direktorjev res lahko vodi podjetje, torej da obstaja 10 setov ključev, ki ustrezajo pogojem naloge. Vse kar moramo storiti je, da iz vsakega para komplementarnih si setov ključev izberemo po en set (na primer tistega, ki vsebuje ključ 1). Tako ima lahko 10 direktorjev na primer naslednje sete ključev: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 4, 6\}$, $\{1, 5, 6\}$.

2. način. Označimo ključavnice oziroma pripadajoče ključe s številkami od 1 do 6. Zapišimo vse možne različne kombinacije treh ključev in sicer v parih:

- $\{1,2,3\}$ in $\{4,5,6\}$,
- $\{1,2,4\}$ in $\{3,5,6\}$,
- $\{1,2,5\}$ in $\{3,4,6\}$,
- $\{3,4,5\}$ in $\{1,2,6\}$,
- $\{1,3,4\}$ in $\{2,5,6\}$,
- $\{1,3,5\}$ in $\{2,4,6\}$,
- $\{2,4,5\}$ in $\{1,3,6\}$,
- $\{1,4,5\}$ in $\{2,3,6\}$,
- $\{2,3,5\}$ in $\{1,4,6\}$,
- $\{2,3,4\}$ in $\{1,5,6\}$.

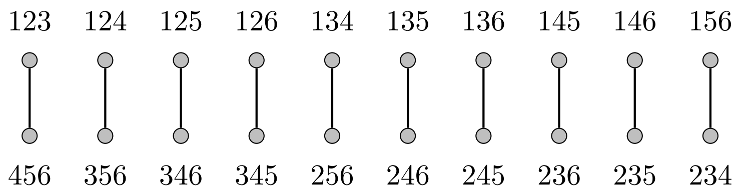
Opazimo, da vsak od teh parov kombinacij ključev vsebuje vseh 6 ključev, torej kvečjemu ena kombinacija iz vsakega para pripada nekemu direktorju. Ker je teh parov 10, podjetje vodi največ 10 direktorjev.

Vidimo tudi, da 10 direktorjev res lahko vodi podjetje, saj imajo lahko ti direktorji na primer prve kombinacije ključev iz vsakega para. Nobeni dve kombinaciji iz tega izbora ne vsebujeta vseh šestih ključev, saj pri vsaki od njih manjka ključ 6.

3. način. Naj predstavlja $\mathcal{K} = \{1,2,3,4,5,6\}$ množico vseh ključev. Vsak direktor ima 3 različne ključe, torej neko podmnožico množice $\mathcal{K}$, ki ima natanko 3 elemente. Označimo vse take podmnožice s $\binom{\mathcal{K}}{3}$. Ker nobena dva direktorja nimata enakega kompleta ključev, vsak element $\binom{\mathcal{K}}{3}$ predstavlja set ključev enega potencialnega direktorja. Naj bosta $A, B \subset \binom{\mathcal{K}}{3}$ kompleta ključev dveh različnih direktorjev. Če bi veljalo $A \cup B = \mathcal{K}$, bi lahko ta dva direktorja skupaj odprla sef. Naj bo G graf, kjer je

$$V(G) = \binom{\mathcal{K}}{3} \quad \text{in} \quad \{A, B\} \in E(G) \iff A \cup B = \mathcal{K}.$$

Vsaka neodvisna množica tega grafa ustreza neki skupini direktorjev, ki zadošča pogojem naloge. Nas zanima največja neodvisna množica. Naj $\alpha(G)$ označuje moč največje neodvisne množice v grafu G. Graf G je prikazan na spodnji sliki (vozlišča smo zaradi preglednosti označili kar s števili, katerih števke so elementi množic, ki ustrezajo vozliščem grafa):



Če je $G = G_1 + G_2$, tj. disjunkna unija dveh grafov, potem velja $\alpha(G) = \alpha(G_1) + \alpha(G_2)$. Ker je $\alpha(K_2) = 1$, je $\alpha(G) = 10$, saj je $G \cong \underbrace{K_2 + K_2 + \cdots + K_2}_{10}$.

Ugotovitev, da je pravilni odgovor 10 .... 1 točka
Ugotovitev, da je $\binom{6}{2} = 20$ setov 3 ključev .... 1 točka
Ugotovitev, da za vsak set ključev obstaja natanko 1 komplementarni set .... 1 točka
Utemeljitev, da komplementarni pari ne nastopajo hkrati v rešitvi .... 1 točka
Utemeljitev, da je direktorjev največ 10 .... 1 točka
Utemeljitev, da je direktorjev res lahko 10 .... 2 točka