**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

dMFA

63. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 13. april 2019

Prilepi nalepko s šifro

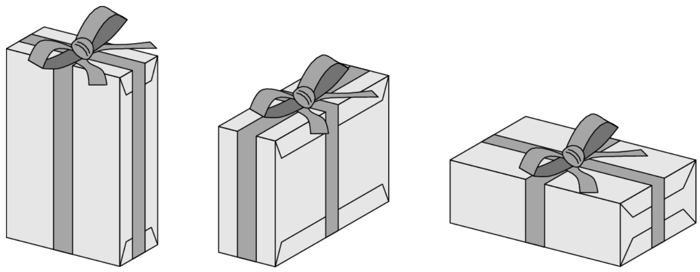
Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. *Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3

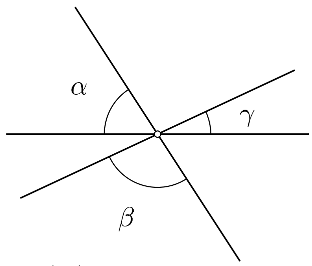
B1	B2	B3

A1. Vsa tri darila prikazana na sliki imajo obliko kvadra z dolžinami robov 10 cm, 20 cm in 30 cm. Dolžine trakov, s katerimi so darila zavita, so od leve proti desni enake x cm, y cm in z cm, pri čemer je pentlja na vseh treh darilih enaka. Katera od naslednjih trditev je pravilna?



(**A**) $x = y = z$ (**B**) $x > y > z$ (**C**) $x = y > z$ (**D**) $x < y < z$ (**E**) $x > y = z$

A2. Polona želi narisati tri premice, ki se sekajo v isti točki (glej sliko), tako da bo za kote med njimi veljalo $\beta = 2\alpha$ in $\alpha = 3\gamma$. Koliko stopinj mora biti velik kot α?



(**A**) 18 (**B**) 36 (**C**) 50 (**D**) 54 (**E**) 60

A3. Koliko je vrednost izraza $2019^3 - 3 \cdot 2019 \cdot 2018 - 2018^3$?

(**A**) -1 (**B**) 0 (**C**) 1 (**D**) 2018 (**E**) 2019

B1. Poišči vsa naravna števila n, katerih kub je enak vsoti kvadratov treh ne nujno različnih deliteljev števila n.

B2. Dan je trikotnik ABC. Naj bosta D in E taki točki, ki ležita zaporedoma na poltrakih CA in CB, a ne na stranicah trikotnika ABC, da velja $|AD| = |BE| = |AB|$. Presečišče premic AE in BD označimo z G, središče trikotniku ABC včrtane krožnice pa z I. Dokaži, da premica GI poteka skozi razpolovišče stranice AB.

B2. Poišči vse pare realnih števil x in y, ki rešijo sistem enačb

$$\frac{y^3 + 15x^2}{y^4 - x^3} = \frac{y^2 + 15x}{y^3 - x^2},$$

$$\frac{1500y^3 + 4x^2}{9y^4 - 4} = \frac{1500y^2 + 4x}{9y^3 - 4}.$$

63. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Državno tekmovanje, 13. april 2019

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. *Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

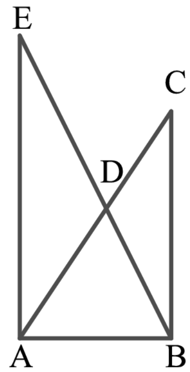
A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Maja je v dva enaka kozarca nalila limonin sok, tako da je bil prvi kozarec napolnjen do $\frac{1}{3}$, drugi pa do $\frac{2}{5}$. Nato je v oba kozarca dolivala vodo, dokler nista bila polna. Nazadnje je oba kozarca izpraznila v večjo skledo, pri čemer se tekočina ni prelila čez rob sklede. Kolikšen del tekočine v skledi je limonin sok?

(A) $\frac{1}{8}$ **(B)** $\frac{3}{16}$ **(C)** $\frac{11}{30}$ **(D)** $\frac{11}{19}$ **(E)** $\frac{11}{15}$

A2. Daljici AE in BC na sliki sta vzporedni in pravokotni na daljico AB. Hkrati velja $|AB| = 4$, $|BC| = 6$ in $|AE| = 8$. Koliko je razlika med ploščinama trikotnikov ADE in BCD?



(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 8 **(E)** 9

A3. David si je izmislil trimestno naravno število s tremi različnimi števkami. Vsako števko tega števila je nadomestil s črko, da je dobil besedo ENA, ki predstavlja njegovo število. Opazil je, da za njegovo število velja $c \cdot ENA = 2331$, kjer je c neko naravno število. Koliko je vrednost števila c?

(A) 3 **(B)** 7 **(C)** 9 **(D)** 21 **(E)** 37

B1. Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ s središčema O_1 in O_2 se od zunaj dotikata. Naj bo p skupna tangenta krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, ki ne poteka skozi njuno dotikališče. Dokaži, da je p tangenta tudi krožnice s premerom O_1O_2.

B2. Ali obstaja tako praštevilo p, da velja $p^2 + p + 1 = n^3$ za neko naravno število n?

B3. Naj bo K končna podmnožica celih števil s $k \geq 3$ elementi. Pravimo, da sta števili $a, b \in K$ *povezani*, če in samo če obstajajo števila $x_1, x_2, \ldots, x_k$, za katera velja:

- $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} = K$,
- $x_1 = a$, $x_k = b$,
- $|x_i - x_{i+1}|$ je liho število za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$.

Dokaži, da v množici K obstajata dve števili, ki nista povezani.

63. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Državno tekmovanje, 13. april 2019

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. *Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

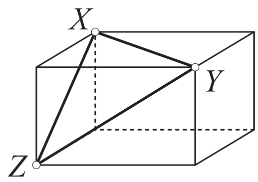
A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Tadej je na tablo zapisal ulomek, različen od 0. Sara je števec Tadejevega ulomka povečala za $40\ \%$, da je dobila nov ulomek. Za koliko odstotkov mora Katja zmanjšati imenovalec Sarinega novega ulomka, da bo dobila ulomek, katerega vrednost bo dvakrat tolikšna, kot je bila vrednost Tadejevega ulomka?

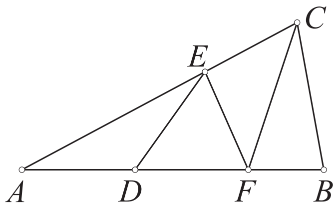
(**A**) 25 (**B**) 30 (**C**) 40 (**D**) 45 (**E**) 50

A2. Dolžine diagonal mejnih ploskev kvadra so enake $|XY| = 8$ cm, $|YZ| = 9$ cm in $|ZX| = \sqrt{55}$ cm (glej sliko). Koliko centimetrov je dolga telesna diagonala tega kvadra?



(**A**) $\sqrt{90}$ (**B**) 10 (**C**) $\sqrt{120}$ (**D**) $\sqrt{200}$ (**E**) 20

A3. Trikotnik ABC je razdeljen na 4 manjše trikotnike ADE, DFE, EFC in FBC z enakimi ploščinami (glej sliko). Koliko je razmerje dolžin $|AF| : |DB|$?



(**A**) $1 : 1$ (**B**) $9 : 8$ (**C**) $8 : 7$ (**D**) $7 : 6$ (**E**) $6 : 5$

B1. Poišči vsa realna števila x, ki rešijo enačbo

$$6^{\log_{10} x} + x^{\log_{10} 6} = 72.$$

B2. Poišči vse polinome stopnje $n \geq 1$, ki imajo vse ničle racionalne, vsak izmed njihovih $n+1$ koeficientov pa je enak 1 ali -1.

B3. Dan je trikotnik ABC. Naj bosta D in E taki točki, ki ležita zaporedoma na poltrakih CA in CB, a ne na stranicah trikotnika ABC, da velja $|AD| = |BE| = |AB|$. Naj bo F presečišče vzporednice k AC skozi točko E in vzporednice k BC skozi točko D. Presečišče premic AE in BD označimo z G. Dokaži, da je premica FG simetrala kota $\sphericalangle EFD$.

63. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Državno tekmovanje, 13. april 2019

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. *Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Naj bo $a = 256$, b pa zmnožek vseh pozitivnih deliteljev števila a. Katera od naslednjih enakosti je pravilna?

(A) $b = a^4$ **(B)** $b = a^9$ **(C)** $b^2 = a^7$ **(D)** $b^2 = a^9$ **(E)** $b^3 = a^{10}$

A2. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poljubna soda funkcija in $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poljubna liha funkcija. Definirajmo funkcijo $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $\varphi(x) = f(g(x)) + g(f(x))$ za vse $x \in \mathbb{R}$. Katera od naslednjih enakosti je zagotovo izpolnjena za vsa realna števila x?

(A) $\varphi(x) = f(f(x))$ **(B)** $\varphi(x) = g(g(x))$ **(C)** $\varphi(x) = \varphi(-x)$
(D) $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ **(E)** $\varphi(x) = 2f(g(x))$

A3. Klara ima 6 enakih kock. Na mejne ploskve vsake kocke je zapisala črke B, A, B, I, C in A, na vsako mejno ploskev po črko. Nato je hkrati vrgla vseh 6 kock. Kolikšna je verjetnost, da lahko iz črk, ki so po metu na zgornih ploskvah kock, sestavi besedo $BABICA$?

(A) $\frac{6!}{(2!)^2}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^2$ **(B)** $\frac{6!}{(2!)^2}\left(\frac{1}{6}\right)^6$ **(C)** $\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^2$ **(D)** $\left(\frac{1}{6}\right)^6$ **(E)** 1

B1. Največ koliko je lahko največji skupni delitelj števil $a-2b+3$, $2a-3b-1$ in $3a+b-2$, če sta a in b naravni števili?

B2. V trikotniku ABC velja $|AC| \neq |BC|$. Naj bo S razpolovišče stranice AB, D presečišče stranice AB in simetrale kota $\sphericalangle ACB$ ter E zrcalna slika točke D pri zrcaljenju čez točko S. Trikotniku ABC očrtana krožnica seka premico CD v točkah C in F, premico CS pa v točkah C in G. Dokaži, da točke E, G, F in S ležijo na isti krožnici.

B3. Dano je naravno število m. Zaporedje a_n je definirano s pogojema $a_1 = m$ in $a_{n+1} = \left[\frac{a_n^2+10a_n}{2a_n+4}\right]$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da je zaporedje a_n od nekega člena dalje konstantno.

Opomba. Za poljubno realno število x oznaka $[x]$ označuje največje celo število, ki ni večje od x.

63. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 13. april 2019

Rešitve nalog za 1. letnik

A1	A2	A3
B	D	C

A1. Na vsakem darilu je trak sestavljen iz 8 odsekov in pentlje. 4 odseki potekajo po stranskih ploskvah, 2 po zgornji in 2 po spodnji ploskvi. Na levem darilu so 4 odseki dolgi 30 cm, 2 odseka 20 cm in 2 odseka 10 cm. Na srednjem darilu sta 2 odseka dolga 30 cm, 4 odseki 20 cm in 2 odseka 10 cm. Na desnem darilu sta 2 odseka dolga 30 cm, 2 odseka 20 cm in 4 odseki 10 cm. Torej velja $x > y > z$.

A2. Če sliko dopolnimo tako, da označimo še sovršne kote kotov α, β in γ, opazimo, da velja $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$. Ker je $\alpha = 3\gamma$ in $\beta = 6\gamma$, iz prejšnje enakosti sledi $20\gamma = 360^\circ$ oziroma $\gamma = 18^\circ$. Torej je $\alpha = 54^\circ$.

A3. Velja $2019^3 - 3 \cdot 2019 \cdot 2018 - 2018^3 = 2019^3 - 3 \cdot 2019 \cdot 2018 \cdot (2019 - 2018) - 2018^3 = 2019^3 - 3 \cdot 2019^2 \cdot 2018 + 3 \cdot 2019 \cdot 2018^2 - 2018^3 = (2019 - 2018)^3 = 1$.

B1. Naj bodo a, b in c delitelji števila n, za katere je $n^3 = a^2 + b^2 + c^2$. Tedaj velja $a, b, c \leq n$, zato je $n^3 = a^2 + b^2 + c^2 \leq 3n^2$ oziroma $n \leq 3$. Primer $n = 1$ odpade, ker 1 ni vsota treh naravnih števil. Če je $n = 2$, sta edina delitelja 1 in 2. Toda nobena od vsot $1^2 + 1^2 + 1^2$, $1^2 + 1^2 + 2^2$, $1^2 + 2^2 + 2^2$ in $2^2 + 2^2 + 2^2$ ni enaka 2^3, zato tudi primer $n = 2$ odpade. Edina rešitev je $n = 3$, saj velja $3^3 = 3^2 + 3^2 + 3^2$.

2. način. Naj bodo $a \leq b \leq c$ delitelji števila n, za katere je $n^3 = a^2 + b^2 + c^2$. Ker c^2 deli n^3, mora deliti tudi $a^2 + b^2$. Toda po naši predpostavki je $a^2 + b^2 \leq 2c^2$, zato imamo dve možnosti, $a^2 + b^2 = c^2$ ali $a^2 + b^2 = 2c^2$. V prvem primeru je $n^3 = 2c^2$ oziroma $\left(\frac{n}{c}\right)^2 n = 2$, kar pomeni, da n deli 2. V drugem primeru je $n^3 = 3c^2$ oziroma $\left(\frac{n}{c}\right)^2 n = 3$, kar pomeni, da n deli 3. Sledi, da je n enak 1, 2 ali 3. Na enak način kot v prvi rešitvi pokažemo, da je rešitev le $n = 3$.

Uporaba dejstva, da je vsak delitelj števila manjši ali enak le temu .... **1 točka**
Izpeljana ocena $n^3 = a^2 + b^2 + c^2 \leq 3n^2$ **skupaj z utemeljitvijo** .... **2 točki**
Ugotovitev $n \leq 3$ .... **1 točka**
Utemeljitev $n \leq 3$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da $n = 1$ **ali** $n = 2$ **nista rešitvi** .... **1 točka**
Edina rešitev $n = 3$ .... **1 točka**

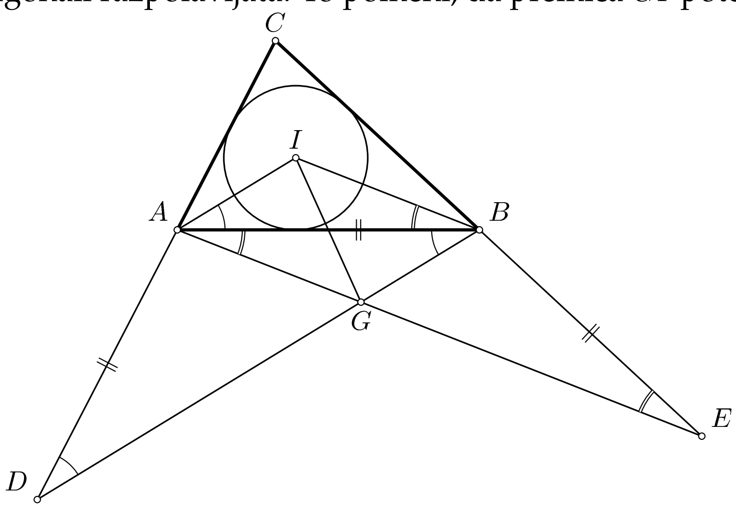
B2. Ker je trikotnik ABE enakokrak z vrhom pri B, velja

$$\sphericalangle EAB = \frac{1}{2}(\pi - \sphericalangle ABE) = \frac{1}{2}\sphericalangle CBA.$$

Premica BI je simetrala kota $\sphericalangle CBA$, zato je $\frac{1}{2}\sphericalangle CBA = \sphericalangle IBA$. Od tod sledi $\sphericalangle EAB = \sphericalangle IBA$, torej sta premici AE in BI vzporedni. Na podoben način sklepamo, da je

$$\sphericalangle ABD = \frac{1}{2}(\pi - \sphericalangle DAB) = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAI,$$

torej sta tudi premici BD in AI vzporedni. Sledi da je $AGBI$ paralelogram, zato se njegovi diagonali razpolavljata. To pomeni, da premica GI poteka skozi razpolovišče stranice AB.



Ugotovitev $\sphericalangle EAB = \sphericalangle BEA$ ali ugotovitev $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDA$ .... 1 točka
Ugotovitev $\sphericalangle EAB = \frac{1}{2}\sphericalangle CBA$ ali ugotovitev $\sphericalangle ABD = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$ .... 1 točka
Upoštevanje, da je AI simetrala $\sphericalangle BAC$ ali upoštevanje, da je BI simetrala $\sphericalangle CBA$ ..... 1 točka
Dokaz $IB \parallel AG$ ali dokaz $IA \parallel BG$ .... 1 točka
Sklep, da je $AGBI$ paralelogram .... 1 točka
Sklep, da se diagonali paralelograma $AGBI$ razpolavljata .... 2 točki

B3. V obeh enačbah odpravimo ulomke in ju poenostavimo, da dobimo

$$-x^2y^3 + 15x^2y^3 = -x^3y^2 + 15xy^4,$$

$$-6000y^3 + 36x^2y^3 - 16x^2 = -6000y^2 + 36xy^4 - 16x.$$

Prvo enačbo preoblikujemo v $x^2y^2(x-y) = -15xy^3(x-y)$ in nato v

$$xy^2(x-y)(x+15y) = 0.$$

Števili x in y torej zadoščata eni od naslednjih štirih možnosti:

1. možnost: $x = 0$. Ko to vstavimo v drugo od zgornjih dveh enačb, dobimo $y^3 = y^2$ oziroma $y^2(y-1) = 0$. Torej je $y = 0$ ali $y = 1$. Prva možnost odpade, saj pri $x = y = 0$ nekateri ulomki v začetnih enačbah niso dobro definirani. Ostane torej le možnost $y = 1$.

2. možnost: $y = 0$. Iz druge od zgornjih enačb tedaj dobimo $x^2 = x$, torej je $x = 0$ ali $x = 1$. Možnost $x = 0$ kot v prejšnjem primeru odpade, torej dobimo le rešitev $x = 1$.

3. možnost: $y = x$. To spet vstavimo v drugo enačbo in dobimo $-6000x^3 - 16x^2 = -6000x^2 - 16x$, kar lahko preoblikujemo v $6000x^2(1-x) = 16x(x-1)$, slednje pa v $16x(x-1)(375x+1) = 0$. Možnost $x = 0$ odpade, saj je v tem primeru tudi $y = 0$ in nekateri ulomki v začetnih enačbah niso dobro definirani. Iz enakega razloga odpade tudi možnost $x = 1$. Sledi $375x + 1 = 0$ oziroma $x = y = -\frac{1}{375}$.

4. možnost: $x = -15y$. Ko to vstavimo v drugo enačbo in enačbo poenostavimo, dobimo

$$8640y^5 - 6000y^3 - 2400y^2 - 240y = 0.$$

Kot v prejšnjem primeru možnost $y = 0$ odpade, saj je tedaj tudi $x = 0$. Zato lahko zadnjo enačbo delimo z $240y$, da dobimo

$$36y^4 - 25y^2 + 10y - 1 = 0.$$

Opazimo, da zadnji trije členi tvorijo popolni kvadrat, zato enačbo preoblikujemo v $36y^4 - (5y-1)^2 = 0$, nato pa levo stran razstavimo po formuli za razliko kvadratov in dobimo

$$(6y^2 - 5y + 1)(6y^2 + 5y - 1) = 0.$$

Oba faktorja na levi strani enačbe razstavimo in dobimo

$$(3y-1)(2y-1)(6y-1)(y+1) = 0.$$

Rešitve so torej $y = \frac{1}{3}$ in $x = -5$, $y = \frac{1}{2}$ in $x = -\frac{15}{2}$, $y = \frac{1}{6}$ in $x = -\frac{5}{2}$ ter $y = -1$ in $x = 15$. V vseh primerih so vsi ulomki v začetnih enačbah dobro definirani.

Vsi pari (x, y), ki rešijo naloge so torej $(0,1)$, $(1,0)$, $(-\frac{1}{375}, -\frac{1}{375})$, $(-5, \frac{1}{3})$, $(-\frac{15}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{5}{2}, \frac{1}{6})$ in $(15, -1)$.

Poenostavljena prva ali druga enačba, npr: $x^3y^2 + 14x^2y^3 - 15xy^4 = 0$**,**
$9x^2y^3 - 9xy^4 + 4x - 4x^2 + 1500y^2 - 1500y^3 = 0$ **.................................. 1 točka**
Razstavljena prva enačba, npr: $xy^2(x-y)(x+15y) = 0$ **.......................... 1 točka**
Rešitev $x = 0$ **in** $y = 1$ **ter ugotovitev, da** $x = 0$ **in** $y = 0$ **ni rešitev sistema .... 1 točka**
Rešitev $x = 1$ **in** $y = 0$ **ter ugotovitev, da** $x = 0$ **in** $y = 0$ **ni rešitev sistema .... 1 točka**
Rešitev $x = -\frac{1}{375}$ **in** $y = -\frac{1}{375}$ **ter ugotovitev, da** $x = 0$ **in** $y = 0$ **ter** $x = 1$ **in** $y = 1$ **nista rešitvi sistema .... 1 točka**
Rešitve $x = -\frac{15}{2}$ **in** $y = \frac{1}{2}$**,** $x = -5$ **in** $y = \frac{1}{3}$**,** $x = -\frac{5}{2}$ **in** $y = \frac{1}{6}$**,** $x = 15$ **in** $y = -1$ **ter ugotovitev, da** $x = 0$ **in** $y = 0$ **ni rešitev sistema .... 2 točki**
(za dva pravilna para rešitev dobi kandidat 1 točko)

63. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 13. april 2019

Rešitve nalog za 2. letnik

A1	A2	A3
C	B	C

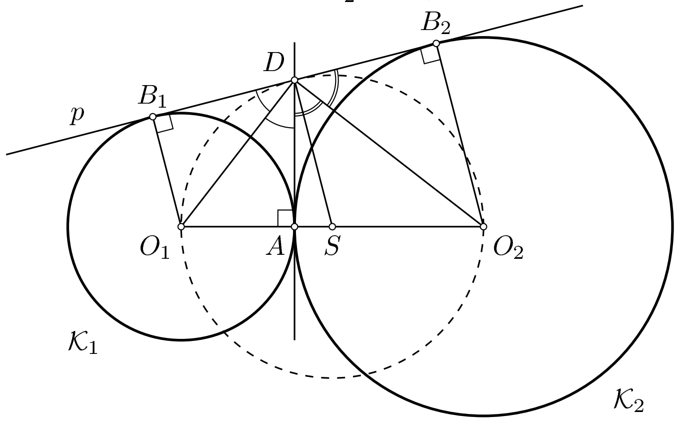
A1. Označimo količino tekočine, ki jo drži en kozarec z e. Tedaj je v skledi $\frac{1}{3}e + \frac{2}{5}e = \frac{11}{15}e$ limoninega soka od skupno $2e$ tekočine. Limonin sok torej predstavlja $\frac{\frac{11}{15}e}{2e} = \frac{11}{30}$ tekočine v skledi.

A2. Razlika med ploščinama trikotnikov ADE in BCD je enaka razliki med ploščinama trikotnikov ABE in ABC, to je $\frac{|AB|\cdot|AE|}{2} - \frac{|AB|\cdot|BC|}{2} = \frac{4\cdot 8}{2} - \frac{4\cdot 6}{2} = 4$.

A3. Pozitivni delitelji števila $2331 = 3^2 \cdot 7 \cdot 37$ so $1, 3, 7, 9, 21, 37, 63, 111, 259, 333, 777$ in 2331. Med njimi je le 259 trimestno naravno število s tremi različnimi števkami. Torej je $ENA = 259$ in zato $c = 2331 : 259 = 9$.

B1. Naj bo S razpolovišče daljice O_1O_2 ter A dotikališče krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$. Dotikališči premice p s krožnicama $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ označimo zaporedoma z B_1 in B_2, presečišče premice p s tangento na krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ skozi točko A pa označimo z D. Trikotnika O_1AD in O_1B_1D sta skladna, saj imata dve enako dolgi stranici in enak kot $\frac{\pi}{2}$ nasproti daljše stranice, zato velja $\sphericalangle B_1DO_1 = \sphericalangle O_1DA$. Podobno sklepamo, da velja tudi $\sphericalangle ADO_2 = \sphericalangle O_2DB_2$, in od tod izpeljemo $\sphericalangle O_1DO_2 = \sphericalangle O_1DA + \sphericalangle ADO_2 = \frac{\sphericalangle B_1DA}{2} + \frac{\sphericalangle ADB_2}{2} = \frac{\pi}{2}$. Po Talesovem izreku torej točka D leži na krožnici s premerom O_1O_2, zato je dovolj dokazati, da je premica SD pravokotna na premico p.

Ker točka D leži na krožnici s premerom O_1O_2, je $|SD| = |SO_1|$, torej je trikotnik O_1SD enakokrak z vrhom pri S. Sledi $\sphericalangle SO_1D = \sphericalangle O_1DS$ in zato je $\sphericalangle B_1DS = \sphericalangle B_1DO_1 + \sphericalangle O_1DS = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle DO_1B_1 + \sphericalangle SO_1D = \frac{\pi}{2}$, kar je bilo treba dokazati.



2. način. Primer, ko je premica p vzporedna premici O_1O_2 je očiten, zato lahko predpostavimo, da se omenjeni premici sekata in njuno presečišče označimo s T. Naj bo S razpolovišče daljice O_1O_2, D' pa pravokotna projekcija točke S na premico p. Dotikališči premice p s krožnicama $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ označimo z B_1 in B_2, polmera krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ pa z r_1 in r_2. Iz podobnosti trikotnikov TO_1B_1, TSD' in TO_2B_2 sledi

$$\frac{r_1}{|O_1T|} = \frac{|SD'|}{|ST|} = \frac{r_2}{|O_2T|},$$

torej je

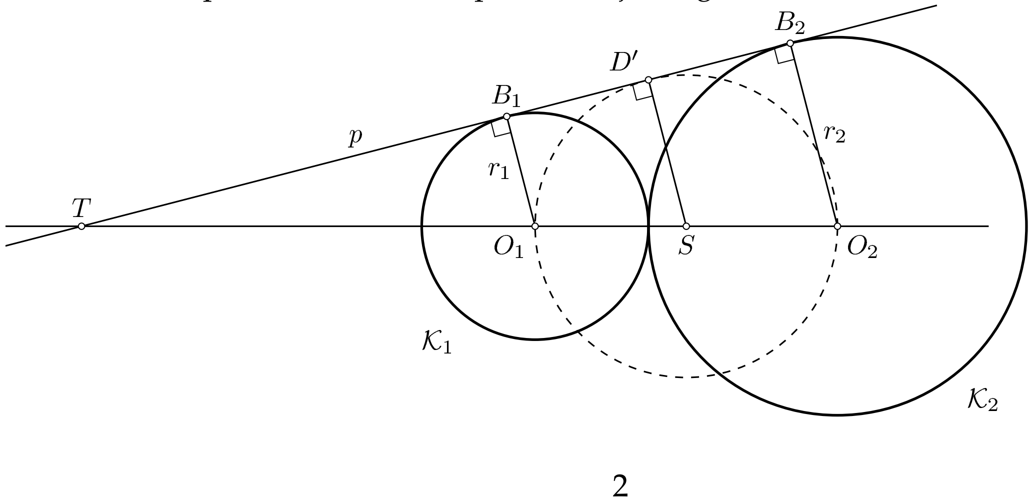
$$|SD'| \cdot |O_1T| = r_1 \cdot |ST| = r_1 \cdot (|SO_1| + |O_1T|) \qquad \text{in}$$

$$r_2 \cdot |O_1T| = r_1 \cdot |O_2T| = r_1 \cdot (|O_2O_1| + |O_1T|) = r_1 \cdot (2|SO_1| + |O_1T|).$$

Prvo enačbo pomnožimo z 2 in od nje odštejemo drugo enačbo, da dobimo

$$(2|SD'| - r_2) \cdot |O_1T| = r_1 \cdot |O_1T|.$$

Od tod sledi $2|SD'| - r_2 = r_1$ oziroma $|SD'| = \frac{r_1+r_2}{2} = \frac{|O_1O_2|}{2} = |SO_1| = |SO_2|$. Torej točka D' leži na krožnici s polmerom O_1O_2 in premica p je tangenta te krožnice.



1. način

Ugotovitev, da D leži na krožnici s premerom O_1O_2 je vredna 4 točke:
Uvedba presečišča tangent .... 1 točka
Skladnost vsaj enega para trikotnikov (B_1DO_1, ADO_1 ali B_2DO_2, ADO_2) .... 1 točka
Ugotovitev, da $\sphericalangle O_1DO_2 = 90^\circ$ .... 1 točka
Sklep, da D leži na krožnici s premerom O_1O_2 .... 1 točka

Ugotovitev, da se p dotika krožnice O_1O_2D je vredna 3 točke:
Ugotovitev $\sphericalangle SO_1D = \sphericalangle O_1DS$ ali $\sphericalangle O_1DA = \sphericalangle DO_2O_1$ .... 1 točka
Izračun $\sphericalangle B_1DS = 90^\circ$ ali $\sphericalangle B_1DO_1 = \sphericalangle DO_2O_1$ .... 1 točka
Zaključek z definicijo tangentnosti ali uporabo izreka o kotu med tetivo in tangento . . . 1 točka

2. način

Konstrukcija razpolovišča zveznice med središči in
pravokotne projekcije na tangento .... 1 točka
Zapis enakosti med razmerji $\frac{r_1}{|O_1T|} = \frac{|SD'|}{|ST|} = \frac{r_2}{|O_2T|}$ .... 1 točka
Izračun $(2|SD'| - r_2) \cdot |O_1T| = r_1 \cdot |O_1T|$ ali podobne enačbe, iz katere direktno sledi $|SD'| = |SO_1| = |SO_2|$ .... 3 točke
Izpeljava, da je $|SD'| = |SO_1| = |SO_2|$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je krožnica s premerom O_1O_2 zato tangentna na p .... 1 točka

B2. Pokazali bomo, da takšno praštevilo ne obstaja. Enačbo preoblikujemo v $p^2 + p = n^3 - 1$ in obe strani razstavimo, da dobimo $p(p+1) = (n-1)(n^2+n+1)$. Če p deli $n-1$, tedaj n^2+n+1 deli $p+1$. Od tod sledi $n^2+n+1 \leq p+1 \leq n$, kar pa je protislovje. Torej mora p deliti n^2+n+1 in zato $n-1$ deli $p+1$. To pomeni, da obstaja naravno število k, da velja $n^2+n+1 = kp$ in $p+1 = k(n-1)$. Iz druge enakosti izrazimo p in ga vstavimo v prvo enakost, da dobimo $n^2+n+1 = k(k(n-1)-1) = k^2n - k^2 - k$. Slednje preoblikujemo v $n^2+(1-k^2)n+(k^2+k+1) = 0$ in to pogledamo kot kvadratno enačbo v spremenljivki n. Ker mora imeti ta enačba rešitev, ki je naravno število, mora biti njena diskriminanta $D = k^4 - 6k^2 - 4k - 3$ popoln kvadrat. Opazimo, da je $D = (k^2-3)^2 - 4k - 12 < (k^2-3)^2$, saj je $4k+12 > 0$. Prvi popoln kvadrat, ki je manjši od $(k^2-3)^2$, je $(k^2-4)^2$, zato mora veljati $D \leq (k^2-4)^2$. Z upoštevanjem zveze $D = k^4 - 6k^2 - 4k - 3$ to neenakost preoblikujemo v $2k^2 - 4k - 19 \leq 0$ oziroma $2k(k-2) \leq 19$. Opazimo, da za $k \geq 5$ neenakost ni izpolnjena, torej so edine naravne rešitve 1, 2, 3 in 4. Toda diskriminanta D je pri teh vrednostih števila k zaporedoma enaka -12, -19, 12 in 141 in v nobenem primeru ni popoln kvadrat. Torej tako praštevilo p ne obstaja.

Preoblikovanje enačbe v $p(p+1) = (n-1)(n^2+n+1)$ **.............................1 točka**
1. možnost: Ugotovitev, da če p **deli** $n-1$**, tedaj** n^2+n+1 **deli** $p+1$**, od koder sledi** $n^2+n+1 \leq p+1 \leq n$**, kar je protislovje. ....1 točka**
2. možnost: Izračun $pk = n^2+n+1$ **in** $p = k(n-1)-1$ **(ali podoben izraz). ....1 točka**
Zapis kvadratne enačbe $n^2+(1-k^2)n+(k^2+k+1) = 0$ **v spremenljivki** n**. Ugotovitev, da mora biti njena diskriminanta** D **popolni kvadrat. ....1 točka**
Ocena $D < (k^2-3)^2 \leq (k^2-4)^2$**. ....1 točka**
Izračun neenakosti $2k(k-2) \leq 19$**. ....1 točka**
Ugotovljen sklep, da za $k \geq 5$ **neenakost ni izpolnjena in za** $k < 5$ **diskriminanta** D **ni popolni kvadrat. ....1 točka**

B3. Tretji pogoj v nalogi pove, da sta števili a in b povezani, če lahko števila v množici K razporedimo v vrsto, ki se začne z a in konča z b, tako da sta vsaki dve sosednji števili v tej vrsti različne parnosti. Vrsto, v kateri sta vsaki dve sosednji števili različne parnosti, bomo imenovali *alternirajoča* vrsta.

Obravnavajmo različni možnosti glede na parnost števila k.

Denimo, da je k sodo število. Števili a in b sta povezani z alternirajočo vrsto natanko tedaj, ko sta različnih parnosti. Ker je $k \geq 3$, lahko izmed števil v množici K izberemo dve števili, ki sta iste parnosti in zato nista povezani.

Denimo, da je k liho število. Števili a in b sta povezani z alternirajočo vrsto natanko tedaj, ko sta iste parnosti. Ker je $k \geq 3$, lahko izmed števil v množici K izberemo dve števili, ki sta različne parnosti in zato nista povezani.

Števili a in b sta povezani z vrsto števil, pri kateri sta vsaki dve sosednji števili v tej vrsti različne parnosti. .... 1 točka
Za k sodo število sta števili a in b povezani z alternirajočo vrsto natanko tedaj, ko sta različnih parnosti. Ker je $k \geq 3$, lahko izmed števil v množici K izberemo dve števili, ki sta iste parnosti in zato nista povezani. .... 3 točke
Za k liho število sta števili a in b povezani z alternirajočo vrsto natanko tedaj, ko sta iste parnosti. Ker je $k \geq 3$, lahko izmed števil v množici K izberemo dve števili, ki sta različne parnosti in zato nista povezani. .... 3 točke

63. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 13. april 2019

Rešitve nalog za 3. letnik

A1	A2	A3
B	B	E

A1. Če je Tadejev ulomek enak $\frac{a}{b}$, tedaj je Sarin ulomek $\frac{1.4 \cdot a}{b}$, Katjin ulomek pa $\frac{2 \cdot a}{b} = \frac{1.4 \cdot a}{0.7 \cdot b}$. Katja mora imenovalec Sarinega novega ulomka zmanjšati za 30%.

A2. Dolžino, širino in višino kvadra označimo z a, b in c. Tedaj po Pitagorovem izreku velja $a^2+b^2 = |XY|^2 = 64$, $b^2+c^2 = |ZX|^2 = 55$ in $c^2+a^2 = |YZ|^2 = 81$. Enačbe seštejemo, da dobimo $2(a^2+b^2+c^2) = 200$. Dolžina telesne diagonale kvadra je enaka $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10$ cm.

A3. Trikotnika AED in DEF imata ploščini v razmerju $1 : 1$ in skupno višino skozi oglišče E, zato sta tudi njuni stranici v razmerju $|DA| : |FD| = 1 : 1$. Trikotnika ACB in FCB imata ploščini v razmerju $4 : 1$ in skupno višino skozi oglišče C, zato sta njuni stranici v razmerju $|BA| : |BF| = 4 : 1$. Torej je $|BA| = 4|BF|$, $|FA| = |BA| - |BF| = 3|BF|$, $|FD| = \frac{1}{2}|FA| = \frac{3}{2}|BF|$ in $|BD| = |BF| + |FD| = \frac{5}{2}|BF|$. Sledi $|FA| : |BD| = 3|BF| : \frac{5}{2}|BF| = 6 : 5$.

B1. Logaritem je definiran le za pozitivna števila, zato mora biti $x>0$. Število $x=1$ očitno ni rešitev enačbe, zato lahko privzamemo, da je $x \neq 1$. Za pozitivno realno število $x \neq 1$ velja $\log_{10} x=\frac{1}{\log_{x} 10}$, zato je $\log_{10} 6=\frac{\log_{x} 6}{\log_{x} 10}=\log_{10} x \cdot \log_{x} 6$. S pomočjo te zveze lahko dano enakost preoblikujemo do

$$
6^{\log_{10} x}+\left(x^{\log_{x} 6}\right)^{\log_{10} x}=72
$$

in nato upoštevamo enakost $x^{\log_{x} 6}=6$, da dobimo

$$
2 \cdot 6^{\log_{10} x}=72 .
$$

Od tod sledi $6^{\log_{10} x}=36=6^{2}$, torej je $\log_{10} x=2$ oziroma $x=100$.

1. način:
Uporaba enačbe-prehod na novo osnovo logaritma ....1 točka
Preoblikovanje do enačbe $2 \cdot x^{\log_{10} 6}=72$ **.......................................5 točk**
Poenostavljen rezultat $x=100$ **..1 točka**

2. način:
Preverjena rešitev $x=100$ **..1 točka**
Polna utemeljitev, da je rešitev le ena, saj je leva stran enačbe strogo monotona funkcija 6 točk

B2. Naj bo $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ iskani polinom. Če je $\frac{k}{m}$ neka njegova racionalna ničla, tedaj k deli a_0 in m deli a_n. Ker pa sta a_0 in a_n oba enaka 1 ali -1, sta tudi k in m enaka 1 ali -1. Torej so vse ničle polinoma $p(x)$ enake 1 ali -1. Hkrati je tudi vodilni koeficient polinoma $p(x)$ enak 1 ali -1, zato lahko pišemo $p(x) = \pm(x-1)^m(x+1)^k$ za neki nenegativni celi števili m in k (ne obe enaki 0). Če je $m = 0$, tedaj očitno le polinoma $\pm(x+1)$ zadoščata pogojem naloge, in če je $k = 0$, le polinoma $\pm(x-1)$ zadoščata pogojem naloge. V nadaljevanju zato predpostavimo, da sta k in m naravni števili. Sledi

$$\pm p(x) = (x^m - mx^{m-1} + \cdots)(x^k + kx^{k-1} + \cdots) = x^{k+m} + (k-m)x^{k+m-1} + \cdots ,$$

torej je $k - m = \pm 1$.

Če je $k = m + 1$, potem je

$$\pm p(x) = (x^2-1)^m(x+1) = (x^{2m} - mx^{2m-2} + \cdots)(x+1) = x^{2m+1} + x^{2m} - mx^{2m-1} + \cdots ,$$

od koder sledi $m = 1$ in $p(x) = \pm(x-1)(x+1)^2 = \pm(x^3 + x^2 - x - 1)$.

Če pa je $k = m - 1$ oziroma $m = k + 1$, pa podobno kot zgoraj sledi

$$\pm p(x) = (x^2-1)^k(x-1) = (x^{2k} - kx^{2k-2} + \cdots)(x-1) = x^{2k+1} - x^{2k} - kx^{2k-1} + \cdots ,$$

torej je $k = 1$ in $p(x) = \pm(x-1)^2(x+1) = \pm(x^3 - x^2 - x + 1)$.

Vse rešitve so torej polinomi $\pm(x-1)$, $\pm(x+1)$, $\pm(x^3 + x^2 - x - 1)$ in $\pm(x^3 - x^2 - x + 1)$.

Dokaz, da so vse ničle enake ± 1 **.. 2 točki**
Zapis v obliki $\pm(x-1)^m(x+1)^k$ **.. 1 točka**
Dokaz, da je $|k-m| = 1$ **.. 1 točka**
Izračun vseh možnih parov (k, m) **.. 3 točke**

B3. Označimo s P presečišče daljice BC in simetrale kota $\sphericalangle BAC$, z Q pa presečišče daljice AC in simetrale kota $\sphericalangle CBA$. Presečišče premic AP in BQ je torej središče trikotniku ABC včrtane krožnice, označimo ga z I. Ker je trikotnik BAD enakokrak z vrhom pri A, je $\sphericalangle BDA = \frac{1}{2}(\pi - \sphericalangle DAB) = \frac{1}{2}(\sphericalangle BAC) = \sphericalangle PAC$. Torej sta premici BD in PA vzporedni in trikotnika BCD in PCA sta si podobna. Sledi

$$\frac{|CB|}{|CD|} = \frac{|CP|}{|CA|} \quad \text{oziroma} \quad |CP| \cdot |CD| = |CB| \cdot |CA|.$$

Na enak način pokažemo, da sta tudi premici AE in QB vzporedni ter trikotnika ECA in BCQ podobna, zato velja še

$$\frac{|CE|}{|CA|} = \frac{|CB|}{|CQ|} \quad \text{oziroma} \quad |CE| \cdot |CQ| = |CB| \cdot |CA|.$$

Iz zgornjih enakosti sledi

$$|CP| \cdot |CD| = |CE| \cdot |CQ| \quad \text{oziroma} \quad \frac{|CP|}{|CQ|} = \frac{|CE|}{|CD|}.$$

To pomeni, da sta trikotnika PCQ in ECD podobna. V posebnem sta premici PQ in ED vzporedni. Štirikotnik $FECD$ je paralelogram, saj ima dva para vzporednih stranic, zato sta trikotnika ECD in DFE skladna. Posledično sta trikotnika PCQ in DFE podobna. Iz vzporednosti premic BD in PA, AE in QB ter PQ in ED sledi, da sta tudi trikotnika QIP in EGD podobna. Torej sta celo štirikotnika $PCQI$ in $DFEG$ podobna. Ker je diagonala CI simetrala kota $\sphericalangle QCP$, je tudi diagonala FG simetrala kota $\sphericalangle EFD$.

2. način. Uporabimo oznake iz prve rešitve. Podobnost trikotnikov PCQ in ECD lahko pokažemo tudi nekoliko drugače. Simetrala notranjega kota trikotnika razdeli nasprotno stranico v razmerju, ki je enako razmerju priležnih stranic. Tako velja

$$\frac{|BP|}{|CP|} = \frac{|AB|}{|AC|} \quad \text{oziroma} \quad |BP| = \frac{|AB| \cdot |CP|}{|AC|}.$$

Slednje vstavimo v enakost $|BP| + |CP| = |BC|$ in izrazimo $|CP|$, da dobimo

$$|CP| = \frac{|CA| \cdot |CB|}{|AB| + |AC|} = \frac{|CA| \cdot |CB|}{|CD|},$$

kjer smo upoštevali še $|AB| = |AD|$. Na enak način izpeljemo še

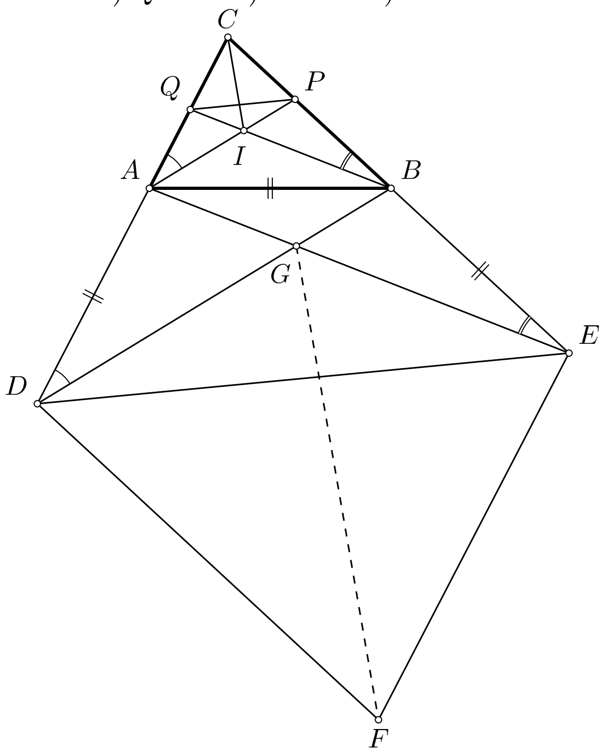
$$|CQ| = \frac{|CA| \cdot |CB|}{|AB| + |BC|} = \frac{|CA| \cdot |CB|}{|CE|}.$$

Od tod sledi $\frac{|CP|}{|CQ|} = \frac{|CE|}{|CD|}$, zato sta si trikotnika PCQ in ECD podobna in premici PQ in ED sta vzporedni. Ker sta tudi premici EF in AC ter premici DF in BC vzporedni, sta si podobna tudi trikotnika PCQ in DFE.

Na enak način kot v prvi rešitvi pokažemo, da sta premici BD in PA ter premici AE in QB vzporedni. Skupaj z vzporednostjo premic PQ in ED to pomeni, da sta trikotnika QIP in EGD podobna. Od tod sledi $\frac{|DE|}{|DG|} = \frac{|PQ|}{|PI|}$, iz podobnosti trikotnikov PCQ in ECD pa še $\frac{|DF|}{|DE|} = \frac{|PC|}{|PQ|}$. Zadnji dve enakosti zmnožimo, da dobimo

$$\frac{|DF|}{|DG|} = \frac{|PC|}{|PI|}.$$

Zaradi vzporednosti premic DF in PC ter premic DG in PI, pa sledi še $\sphericalangle FDG = \sphericalangle CPI$. Trikotnika FDG in CPI se tako ujemata v enem kotu in razmerju stranic ob tem kotu, zato sta si podobna. Na enak način pokažemo, da sta si podobna tudi trikotnika FEG in CQI. Torej je $\sphericalangle EFG = \sphericalangle QCI = \sphericalangle ICP = \sphericalangle GFD$.



Vpeljava točk I, P ali Q .... 1 točka.
Izračun enakosti $\sphericalangle BDA = \sphericalangle PAC = \frac{\alpha}{2}$ ali $\frac{|BP|}{|CP|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ ali $\frac{|AQ|}{|CQ|} = \frac{|AB|}{|BC|}$ .... 1 točka.
Podobnost trikotnikov BCD in PCA ali podobnost trikotnikov ACE in QCB ali vzporednost $BD||AP$ ali vzporednost $AE||QP$ .... 1 točka.
Podobnost trikotnikov PCQ in ECD ali vzporednost $PQ||DE$ .... 1 točka.
Podobnost trikotnikov DEG in PQI ali podobnost trikotnikov DEF in PQC .... 1 točka.
Podobnost trikotnikov FEG in CQI ali podobnosti trikotnikov FDG in CPI (lahko le razmerje $\frac{|EG|}{|EF|} = \frac{|QI|}{|QC|}$ oziroma $\frac{|DF|}{|DG|} = \frac{|PC|}{|PI|}$) .... 1 točka.
Sklep $\sphericalangle EFG = \sphericalangle QCI = \sphericalangle ICP = \sphericalangle DFG$ .... 1 točka.

63. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 13. april 2019

Rešitve nalog za 4. letnik

A1	A2	A3
D	C	A

A1. Ker je $a = 2^8$, je $b = 1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^8 = 2^{0+1+2+\ldots+8} = 2^{36}$. Torej velja $b^2 = 2^{72} = a^9$. Pravilen odgovor je (**D**).

A2. Ker je $f(x)$ soda funkcija in $g(x)$ liha funkcija, velja $f(-x) = x$ in $g(-x) = -g(x)$ za vsa realna števila x. Torej je $\varphi(-x) = f(g(-x)) + g(f(-x)) = f(-g(x)) + g(f(x)) = f(g(x)) + g(f(x)) = \varphi(x)$. Pravilen odgovor je (**C**). Primer $f(x) = x^2$ in $g(x) = 2x$ pokaže, da nobena od ostalih enakosti ni nujno izpolnjena, saj v tem primeru velja $\varphi(x) = 6x^2$, $f(f(x)) = x^4$, $g(g(x)) = 4x$ in $2f(g(x)) = 8x^2$.

A3. Verjetnosti, da na eni kocki pade črka A, B, C oz. I so zaporedoma enake $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ oz. $\frac{1}{6}$. Mislimo si, da Klara kocke vrže tako, da so urejene v vrsto. Tedaj je verjetnost, da pade beseda $BABICA$ enaka $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^2$. Ugoden pa je katerikoli izid, kjer so črke v tej besedi premešane. Vseh takih izidov je skupaj $\frac{6!}{(2!)^2}$, saj gre za permutacije s ponavljanjem na 6 elementih, pri čemer se črki A in B pojavita 2-krat. Verjetnost, da lahko Klara iz dobljenih črk sestavi besedo $BABICA$ je torej $\frac{6!}{(2!)^2} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^2$.

B1. Naj bo d največji skupni delitelj danih števil. Tedaj d deli tudi števila

$$
\begin{aligned}
&(2a-3b-1)-2(a-2b+3)=b-7,\\
&(a-2b+3)+2(b-7)=a-11,\\
&(3a+b-2)-(b-7)=3a+5,\\
&(3a+5)-3(a-11)=38.
\end{aligned}
$$

Torej je d lahko največ 38. Če izberemo $a=11$ in $b=7$, potem je $a-2b+3=0$, $2a-3b-1=0$ in $3a+b-2=38$, torej je največji skupni delitelj res lahko 38.

Navedba ali uporaba dejstva, da za poljubni celi števili e in f njun največji skupni delitelj $gcd(e,f)$ deli poljubno linearno kombinacijo e in f .... 1 točka
Zapis enakosti $(2a-3b-1)-2(a-2b+3)=b-7$ (oziroma ekvivalentna eliminacija ene spremenljivke iz enačb) .... 1 točka
Zapis enakosti $(a-2b+3)+2(b-7)=a-11$ (oziroma ekvivalentna eliminacija druge spremenljivke iz enačb) .... 1 točka
Zapis enakosti $(3a+b-2)-(b-7)=3a+5$ (oziroma ekvivalentna eliminacija druge spremenljivke iz enačb na drug način kot prej) .... 1 točka
Zapis enakosti $(3a+5)-3(a-11)=38$ (oziroma ekvivalentna eliminacija vseh spremenljivk iz enačb) in sklep, da je d lahko največ 38. .... 1 točka
Konstrukcija primera z $a=11$ in $b=7$ (oziroma ekvivalentno), ki da $d=38$. .... 2 točki

Opomba: Če je dvakrat eliminirana ista spremenljivka, se tekmovalcu da tudi točka od eliminacije druge spremenljivke.

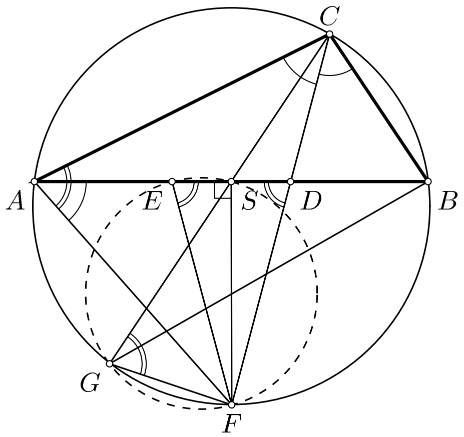
B2. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je $|AC| > |BC|$. Potem točka D leži med S in B, točka E pa med S in A. Hkrati točka G leži na istem bregu premice FS kot točka E. Simetrali stranice in nasprotnega kota v trikotniku se vedno sekata na trikotniku očrtani krožnici. Torej simetrala stranice AB poteka skozi točko F, kar pomeni, da je premica SF pravokotna na premico AB. Od tod sledi, da sta trikotnika FSD in FSE skladna, zato velja

$$\sphericalangle FES = \sphericalangle SDF = \sphericalangle ADF = \sphericalangle ACD + \sphericalangle DAC.$$

Po izreku o obodnih kotih je

$$\sphericalangle FGS = \sphericalangle FGC = \sphericalangle FAC = \sphericalangle FAB + \sphericalangle BAC = \sphericalangle FCB + \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACF + \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD + \sphericalangle DAC$$

Od tod sledi $\sphericalangle FES = \sphericalangle FGS$. Ker točki E in G ležita na istem bregu premice FS, po izreku o obodnih kotih sledi, da točke E, G, F in S ležijo na isti krožnici.

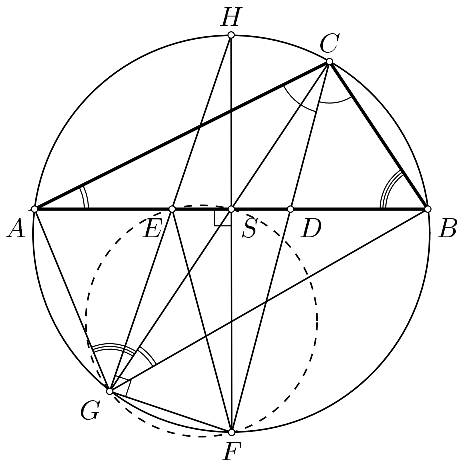


2. način. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je $|AC| > |BC|$. Potem točka D leži med S in B, točka E pa med S in A. Ker je $AGBC$ tetiven štirikotnik, je $\sphericalangle BGC = \sphericalangle BAC$, torej sta trikotnika GBS in ACS podobna, saj imata dva enaka kota. Podobno je $\sphericalangle SGA = \sphericalangle CBS$, zato sta tudi trikotnika AGS in CBS podobna. Iz prve podobnosti sledi $\frac{|SG|}{|SA|} = \frac{|BG|}{|AC|}$, iz druge pa $\frac{|SG|}{|SB|} = \frac{|AG|}{|BC|}$. Ker pa je $|SA| = |SB|$, iz obeh enakosti sledi $\frac{|BG|}{|AC|} = \frac{|AG|}{|BC|}$ oziroma $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|BG|}{|AG|}$. Ker je premica CD simetrala kota $\sphericalangle ACB$, je $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$. Točki D in E sta simetrični glede na razpolovišče stranice AB, zato velja $|BE| = |AD|$ in $|AE| = |BD|$. Iz vsega tega izpeljemo

$$\frac{|BE|}{|AE|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|BG|}{|AG|}.$$

Ker točka E leži na daljici AB, od tod sledi, da je premica GE simetrala kota $\sphericalangle BGA$.

Označimo s H drugo presečišče premice GE in trikotniku ABC očrtane krožnice. Ker je premica GE simetrala kota $\sphericalangle BGA$, sta krožna loka $\widehat{BH}$ in $\widehat{AH}$ enako dolga. Podobno je premica CF simetrala kota $\sphericalangle ACB$, zato sta tudi krožna loka $\widehat{AF}$ in $\widehat{BF}$ enako dolga. Od tod sledi, da je daljica HF premer trikotniku ABC očrtane krožnice, torej po Talesovem izreku velja $\sphericalangle FGE = \sphericalangle FGH = \frac{\pi}{2}$. Hkrati pa iz enakosti krožnih lokov sledi tudi, da premica HF poteka skozi S in je pravokotna na stranico AB, torej je $\sphericalangle ESF = \frac{\pi}{2}$. Po Talesovem izreku torej točke E, G, F in S ležijo na isti krožnici.



Ugotovitev $FS \perp AB$ in utemeljitev . . . . 1+1 točka
Ugotovitev $\sphericalangle FGS = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ACF$ (ali ekvivalentno) . . . . 2 točki
Ugotovitev $\sphericalangle FES = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ACF$ (ali ekvivalentno) . . . . 2 točki
Utemeljitev, da je $EGFS$ tetiven . . . . 1 točka

B3. Če je $a_n \geq 0$ za nek n, tedaj je $\frac{a_n^2+10a_n}{2a_n+4} \geq 0$ in zato je tudi $a_{n+1} \geq 0$. Ker je $a_1 = m > 0$, so torej vsi členi zaporedja a_n nenegativna cela števila.

Za majhna naravna števila m izračunamo nekaj členov zaporedja a_n:

- pri $m = 1$ dobimo $1, 1, 1, 1, \ldots$,
- pri $m = 2$ dobimo $2, 3, 3, 3, \ldots$,
- pri $m = 3$ dobimo $3, 3, 3, 3, \ldots$,
- pri $m = 4$ dobimo $4, 4, 4, 4, \ldots$,
- pri $m = 5$ dobimo $5, 5, 5, 5, \ldots$,
- pri $m = 6$ dobimo $6, 6, 6, 6, \ldots$,
- pri $m = 7$ dobimo $7, 6, 6, 6, \ldots$,
- pri $m = 8$ dobimo $8, 7, 6, 6, \ldots$

Opazimo, da se člen zaporedja na vsakem koraku zmanjša, razen v primeru, ko je enak 2. Zato obravnavamo dve primera:

1. primer: Recimo, da je $a_n = 2$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Potem je $a_{n+1} = 3$. Ker je $\left[\frac{3^2+10\cdot 3}{2\cdot 3+4}\right] = \left[\frac{39}{10}\right] = 3$, sledi, da je $a_k = 3$ za vse $k \geq n + 1$. Naloga je v tem primeru dokazana.

2. primer: Recimo, da je $a_n \neq 2$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo, da je zaporedje v tem primeru padajoče. Ker so vsi členi zaporedja a_n cela števila, je pogoj $a_{n+1} \leq a_n$ ekvivalenten pogoju $\frac{a_n^2+10a_n}{2a_n+4} < a_n+1$. Ta neenakost pa je ekvivalentna neenakosti $a_n^2-4a_n+4 > 0$ oziroma $(a_n-2)^2 > 0$, kar očitno drži za vsak $n \in \mathbb{N}$, saj po predpostavki noben člen zaporedja ni enak 2. Zaporedje a_n je torej padajoče, njegovi členi pa so nenegativna cela števila (različna od 2), zato mora biti zaporedje od nekega člena naprej konstantno.

2. način. Če je $a_n \geq 1$ za nek n, tedaj je $10a_n \geq 2a_n + 4$, torej je tudi $a_{n+1} \geq 1$. Ker je $a_1 = m \geq 1$, so torej vsi členi zaporedja a_n naravna števila. Opazimo, da velja

$$\left[\frac{1^2+10\cdot 1}{2\cdot 1+4}\right] = \left[\frac{11}{6}\right] = 1, \quad \left[\frac{2^2+10\cdot 2}{2\cdot 2+4}\right] = \left[\frac{24}{8}\right] = 3, \quad \left[\frac{3^2+10\cdot 3}{2\cdot 3+4}\right] = \left[\frac{39}{10}\right] = 3,$$

$$\left[\frac{4^2+10\cdot 4}{2\cdot 4+4}\right] = \left[\frac{56}{12}\right] = 4, \quad \left[\frac{5^2+10\cdot 5}{2\cdot 5+4}\right] = \left[\frac{75}{14}\right] = 5, \quad \left[\frac{6^2+10\cdot 6}{2\cdot 6+4}\right] = \left[\frac{96}{16}\right] = 6,$$

$$\left[\frac{7^2+10\cdot 7}{2\cdot 7+4}\right] = \left[\frac{119}{18}\right] = 6, \quad \left[\frac{8^2+10\cdot 8}{2\cdot 8+4}\right] = \left[\frac{144}{20}\right] = 7.$$

Iz prvih šestih enakosti sledi, da če je nek člen zaporedja manjši ali enak 6, potem je zaporedje od nekje dalje konstantno (in enako 1, 3, 4, 5 ali 6). Zadnji dve enakosti namigujeta, da če je nek člen zaporedja večji kot 6, potem bo naslednji člen strogo manjši. Pokažimo, da to res velja. Denimo torej, da je $a_n > 6$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Pokazati želimo, da je tedaj $a_{n+1} < a_n$. Ker so vsi členi zaporedja naravna števila, je slednja neenakost ekvivalentna neenakosti $a_{n+1} \leq a_n - 1$, ta pa neenakosti $\frac{a_n^2+10a_n}{2a_n+4} < a_n$. Ko odpravimo ulomke, dobimo $a_n^2 - 6a_n > 0$ oziroma $a_n(a_n - 6) > 0$. Neenakost je izpolnjena, saj je a_n naravno število in po predpostavki velja $a_n > 6$. Od tod sledi, da so za poljuben m členi zaporedja prej ali slej manjši ali enaki 6, od prej pa že vemo, da je v tem primeru zaporedje od nekega člena naprej konstantno.

1. način: Utemeljen skelp, da so vsi čelni nenegativni ....1 točka
Argument, da če v zaporedju za nek i velja: $a_i = 2$, je zaporedje od naslednjega člena dalje konstanto ....1 točka
Zapis neenačbe $a_{n+1} \leq a_n$ ....1 točka
Pravilno razpisane enačbe do $(a_n - 2)^2 > 0$ ....1 točka
Sklep, da je zaporedje padajoče za vse a_n razen za $a_n = 2$ ....1 točka
Sklep: Ker je zaporedje padajoče in nenegativno bo od nekod dalje konstantno . 2 točki

2. način: Utemeljen skelp, da so vsi čelni nenegativni .... 1 točka
Utemeljena ugotovitev, da če v zaporedju za nek i velja: $1 \leq a_i \leq 6$, je zaporedje konstanto od tega člena naprej ....1 točka
Zapis neenačbe $a_{n+1} < a_n$ ....1 točka
Pravilno razpisane enačbe do $a_n(a_n - 6) > 0$ ....1 točka
Skelp, da je zaporedje strogo padajoče za vse $a_n > 6$ ....1 točka
Sklep: za nek dovolj velik i bo veljalo: $a_i \leq 6$ iz česar sledi, da bo zaporedje od i.tega člena dalje konstantno ....2 točki

Opomba: Če v postopku reševanja ni očitno, da je tudi zaporedje, ki vsebuje 0, od nekod dalje konstantno, ali da zaporedje, ki se začne z naravnim številom, ne more vsebovati člena, ki bi bil 0, se zgubi ena točka.

Prav tako se izgubi 1 točka, če nepravilno odparvijo celi del.