Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

65. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Prilepi nalepko s šifro

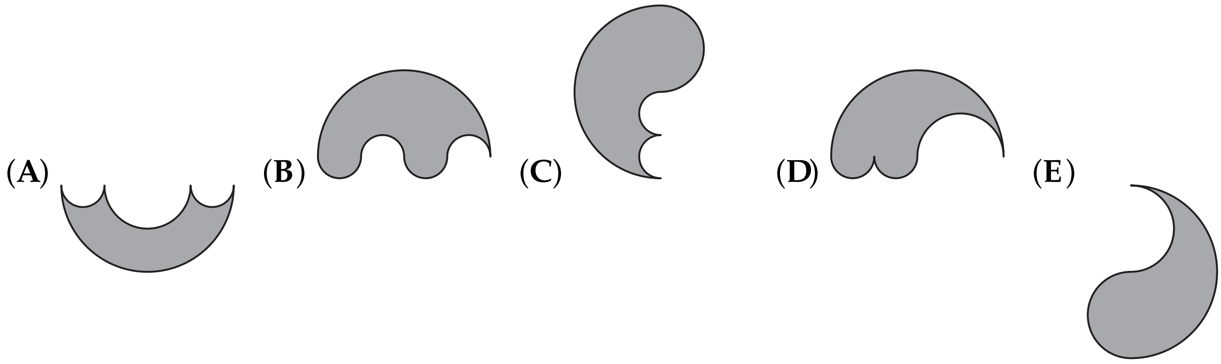
Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. *Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3

B1	B2	B3

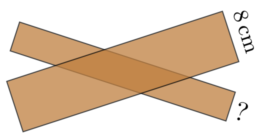
A1. Vsi liki na slikah so omejeni s polkrožnimi loki, pri čemer je največji polkrožni lok pri vseh likih enak. Kateri izmed likov z najmanjšim obsegom ima največjo ploščino?



A2. Vsota števk petmestnega števila je 44. Koliko je produkt števk tega petmestnega števila?

(**A**) $2^3 \cdot 3^8$ (**B**) $2^3 \cdot 9^3$ (**C**) $8 \cdot 4^9$ (**D**) $8 \cdot 3^4$
(**E**) Nič od predhodno naštetega.

A3. Peter je prekril rano z 2 pravokotnima obližema (glej sliko). Ploščina območja, prekritega z obema obližema hkrati, je $40\ \text{cm}^2$, obseg območja, prekritega z obema obližema hkrati, pa je 30 cm. Zgornji obliž je širok 8 cm. Koliko centimetrov je širok spodnji obliž?

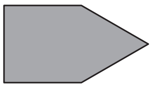


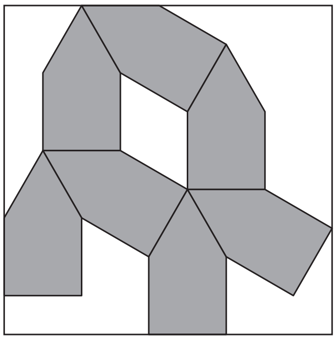
(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 16

B1. Dokaži, da ne obstajata naravni števili a in b, za kateri velja $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2021}$.

B2. Poišči vsa realna števila x, y in z, ki rešijo sistem enačb

$$\frac{3xy}{x-y}=2, \quad \frac{2yz}{y+2z}=3, \quad \frac{xz}{z-4x}=3.$$

B3. Nataša je zlepila kvadrat in enakostranični trikotnik v petkotnik . Iz 7 takih petkotnikov je oblikovala lik (glej sliko).



a) Dokaži, da lahko Natašin lik včrtamo v velik kvadrat tako, kot to prikazuje slika.

b) Ali Natašin lik pokrije več kot $\frac{2}{3}$ površine velikega kvadrata?

dMFA

65. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. *Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3

B1	B2	B3

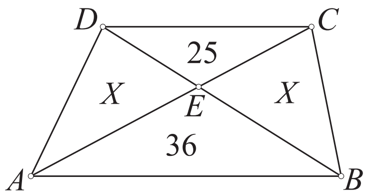
A1. Na državno tekmovanje v računanju se lahko uvrsti največ 30 tekmovalcev. Na letošnjem državnem tekmovanju so tekmovalci reševali 4 naloge, pri čemer je $\frac{1}{3}$ tekmovalcev rešila natanko 3 naloge, $\frac{1}{4}$ tekmovalcev je rešila natanko 2 nalogi, $\frac{1}{6}$ tekmovalcev je rešila natanko 1 nalogo, $\frac{1}{8}$ tekmovalcev pa ni rešila nobene naloge. Koliko tekmovalcev je rešilo vse 4 naloge?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

A2. Lucijana je iz množice števil $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ izbrala 3 različna števila. Z njimi je zapisala največje možno trimestno število in najmanjše možno trimestno število. Dobljeni števili je seštela in dobila število 545. Koliko je vsota 3 števil, ki jih je izbrala Lucijana?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 9 (**D**) 11 (**E**) 13

A3. Diagonali AC in BD trapeza $ABCD$ se sekata v točki E in razdelita trapez na 4 trikotnike s ploščinami $25\ \mathrm{cm}^2$, $36\ \mathrm{cm}^2$, $X\ \mathrm{cm}^2$ in $X\ \mathrm{cm}^2$ (glej sliko). Kolikšna je vrednost X?



(**A**) 25 (**B**) 30 (**C**) 32 (**D**) 36 (**E**) 61

B1. Poišči vsa realna števila x, za katera velja $(x^2 - 7x + 11)^{x^2-13x+42} = 1$.

B2. Naj bo ABC ostrokotni trikotnik. Krožnica s središčem v A, ki se dotika stranice BC, seka stranico AB v točki B_1 in stranico CA v točki C_2. Krožnica s središčem v B, ki se dotika stranice CA, seka stranico BC v točki C_1 in stranico AB v točki A_2. Krožnica s središčem v C, ki se dotika stranice AB, seka stranico CA v točki A_1 in stranico BC v točki B_2. Dokaži, da je trikotnik, ki ga določajo premice A_1A_2, B_1B_2 in C_1C_2, podoben trikotniku ABC.

B3. Veronika ima list karirastega papirja z 78×78 kvadratki. List želi razrezati na manjše kose, od katerih bo vsak imel bodisi 14 bodisi 15 kvadratkov, pri čemer z vsakim rezom prereže enega od kosov papirja na dva dela vzdolž ene od črt na papirju. Najmanj kolikokrat mora Veronika prerezati papir?

65. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

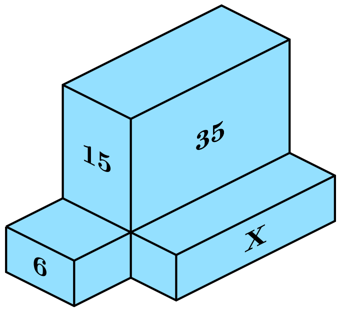
Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. *Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3

B1	B2	B3



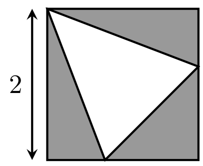
A1. Nik je postavil nekaj kvadrov drug poleg drugega, tako da so se njihove mejne ploskve prilegale druga na drugo, in na 3 mejne ploskve napisal njihove ploščine (glej sliko). Koliko je ploščina mejne ploskve označene z X?

(**A**) 12 (**B**) 14 (**C**) 15 (**D**) 26 (**E**) Nič od predhodnega.

A2. Ana in Meta sta se hkrati odpeljali iz vasi Zabukovje v vas Zahrastje, Ana s kolesom in Meta z avtom. Ana je vozila s konstantno hitrostjo 30 km/h, Meta pa s konstantno hitrostjo 70 km/h. Ko je Meta prišla v Zahrastje, je bila tam 1 h, nato pa se je z enako hitrostjo 70 km/h odpeljala nazaj v Zabukovje. Na poti nazaj je srečala Ano 105 km od Zahrastja. Koliko kilometrov je razdalja med vasema Zabukovje in Zahrastje?

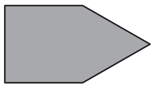
(**A**) $262,5$ (**B**) 300 (**C**) 315 (**D**) 345 (**E**) 375

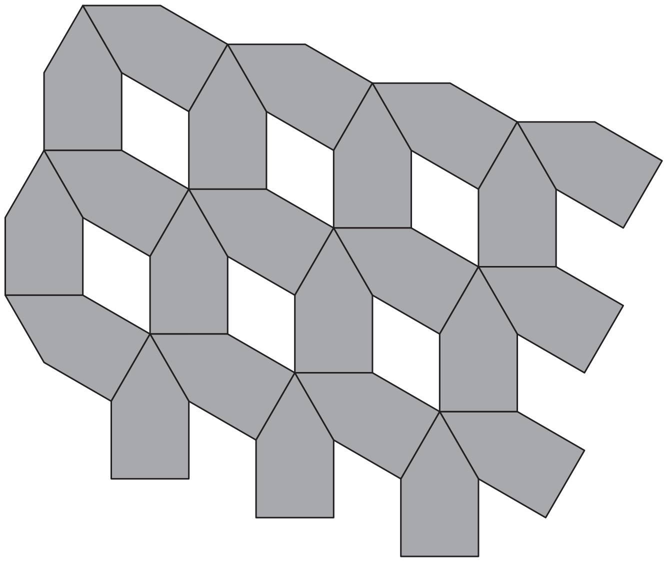
A3. Kvadrat s stranico dolžine 2 je razdeljen na 4 trikotnike (glej sliko). Vsi 3 osenčeni trikotniki imajo enako ploščino. Koliko je ploščina belega trikotnika?



(**A**) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (**B**) $\frac{8}{5}$ (**C**) 2 (**D**) $3\sqrt{5}-5$ (**E**) $6-2\sqrt{5}$

B1. Poišči vsa cela števila a, za katera je tudi $\log_2(a^2 - 4a - 1)$ celo število.

B2. Nataša je zlepila kvadrat in enakostranični trikotnik v petkotnik . Opazila je, da lahko z njimi oblikuje neskončen vzorec, ki ravnine ne pokrije v celoti. Ali Natašin vzorec pokrije več kot 75% površine ravnine?



B3. Dan je trapez $ABCD$, v katerem je krak BC enako dolg kot osnovnica AB, velikosti kotov $\sphericalangle CBD$, $\sphericalangle DBA$ in $\sphericalangle ADB$ pa so v tem vrstnem redu v razmerju $1 : 3 : 5$. Izračunaj velikosti notranjih kotov trapeza $ABCD$.

65. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Prilepi nalepko s šifro

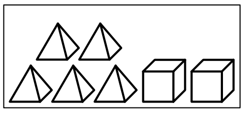
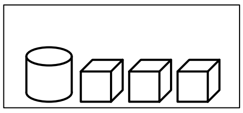
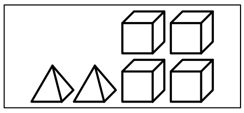
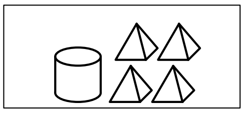
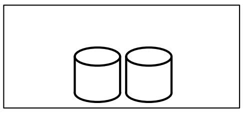
Naloge za 4. letnik

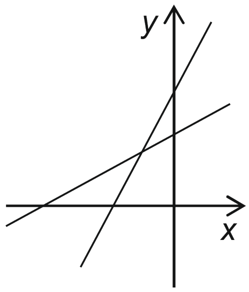
Čas reševanja: **180 minut**. *Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3

B1	B2	B3

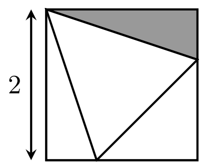
A1. Vsa enaka telesa tehtajo enako, skupna masa teles na vseh, razen na 1 spodnji sliki, je enaka. Na kateri izmed spodnjih slik se skupna masa teles razlikuje od skupne mase teles na preostalih slikah?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 



A2. Od dveh narisanih premic v kordinatnem sistemu ima ena od premic enačbo $y = ax + b$ za neki različni realni števili a in b (glej sliko). Katera izmed spodnjih enačb je lahko enačba druge premice?

(A) $y = ax - b$ (B) $y = bx + a$ (C) $y = \frac{b}{a}x + b$
(D) $y = -bx + a$ (E) $y = \frac{a}{b}x + a$



A3. Kvadrat s stranico dolžine 2 je razdeljen na 4 trikotnike, od teh sta 2 trikotnika enakokraka (glej sliko). Ploščina enega od enakokrakih trikotnikov je dvakrat tolikšna, kot je ploščina drugega enakokrakega trikotnika. Koliko je ploščina osenčenega trikotnika?

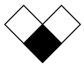
(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{8}{13}$ (D) $2 - \sqrt{2}$ (E) $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$

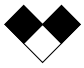
B1. Zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je podano s prvim členom $a_1 = 3$ in rekurzivno zvezo $(3-a_{n+1})(6+a_n) = 18$ za vse $n \geq 1$. Dokaži, da za vsako naravno število n velja

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{n+2}{3}.$$

B2. Dan je enakokrak trikotnik ABC z vrhom pri C, v katerem je $\sphericalangle ACB < 90^\circ$. Naj bo X od C različna točka na stranici AC in Y od C različna točka na stranici BC. Naj bo D taka točka, da je premica DX vzporedna premici AB, premica AC pa je notranja simetrala kota $\sphericalangle BAD$. Podobno naj bo E taka točka, da je premica EY vzporedna premici AB, premica BC pa je notranja simetrala kota $\sphericalangle EBA$. Denimo, da obstaja taka točka T na stranici AB, da velja $|XT| = |XD|$ in $|YT| = |YE|$. Izrazi vrednost izraza $|AX| + |BY|$ z dolžinami stranic trikotnika ABC.

B3. Selena ima list karirastega papirja s 7×7 kvadratki, na katerem so kvadratki pobarvani črno in belo v vzorcu šahovnice, pri čemer so vogalni kvadratki črni. Iz papirja želi izrezati nekaj enakih koščkov, pri čemer bo rezala le po stranicah kvadratkov.

(a) Največ koliko koščkov oblike  bi lahko Selena izrezala iz svojega lista papirja?

(b) Največ koliko koščkov oblike  bi lahko Selena izrezala is svojega lista papirja?

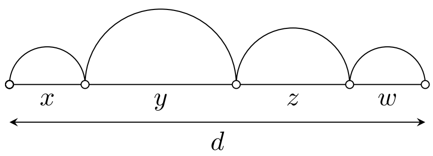
65. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Rešitve nalog za 1. letnik

A1	A2	A3
C	A	B

A1. Skupna dolžina polkrožnih lokov nad daljico dolžine d je enaka $\frac{\pi d}{2}$ neglede na to, koliko je teh polkrožnih lokov in kako veliki so (glej primer na sliki).

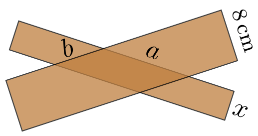


$$\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi y}{2}+\frac{\pi z}{2}+\frac{\pi w}{2}=\frac{\pi(x+y+z+w)}{2}=\frac{\pi d}{2}$$

Torej je obseg vseh 5 likov enak, saj je enak $2\cdot\frac{\pi d}{2}$, kjer je d premer največjega krožnega loka. Največjo ploščino izmed vseh likov ima lik (C), saj je ta edini, ki ima ploščino večjo od ploščine polkroga omejenega z največjim krožnim lokom.

A2. Vsota 5 enomestnih števil je enaka 44 samo, če je eno od teh števil enako 8 in so ostala štiri števila enaka 9, torej $8+9+9+9+9=44$. Produkt je zato enak $8\cdot 9^4=2^3\cdot 3^8$.

A3. Območje, ki je prekrito z obema obližema, ima obliko paralelograma. Označimo stranici paralelograma z a in b, z x pa stranico spodnjega obliža, katere dolžino iščemo (glej sliko).



Potem je $a\cdot x=b\cdot 8=40\ \mathrm{cm}^2$ in $2a+2b=30$ cm. Sledi, da je $b=\frac{1}{8}\cdot 40=5$ cm, $a=\frac{1}{2}(30-2\cdot 5)=10$ cm in $x=\frac{1}{10}\cdot 40=4$ cm.

B1. Denimo, da taki naravni števili obstajata. Tedaj iz dane enakosti očitno sledi $a,b<2021$. Enakost preoblikujemo v $\sqrt{a}=\sqrt{2021}-\sqrt{b}$ in jo kvadriramo, da dobimo $a=2021-2\sqrt{2021b}+b$. Ker sta a in b naravni števili, je $2\sqrt{2021b}$ celo število in zato je $\sqrt{2021b}$ racionalno število. Spomnimo se, da je za naravno število n število $\sqrt{n}$ racionalno natanko takrat, ko je število n popoln kvadrat. Od tod sledi, da je $2021b$ popoln kvadrat. Ker pa je $2021=43\cdot 47$ in sta 43 in 47 praštevili, mora biti $b=43\cdot 47\cdot k^2=2021k^2$ za neko naravno število k. Sledi $b\geq 2021$, kar pa je protislovje. Taki naravni števili a in b torej ne obstajata.

2. način. Ker sta a in b naravni števili, iz dane enakosti sledi $a,b<2021$. Enakost kvadriramo, da dobimo $a+2\sqrt{ab}+b=2021$. Nato jo preoblikujemo v $2\sqrt{ab}=2021-a-b$ in ponovno kvadriramo, da dobimo $4ab=(2021-a-b)^2$. Leva stran enakosti je deljiva s 4, torej mora biti tudi desna stran deljiva s 4. To pomeni, da je $2021-a-b$ sodo število in zato je $\sqrt{ab}=\frac{2021-a-b}{2}$ naravno število. Začetno enakost sedaj pomnožimo s $\sqrt{b}$, da dobimo $\sqrt{ab}+b=\sqrt{2021b}$. Ker je po pravkar dokazanem leva stran enakosti naravno število, mora biti tudi $\sqrt{2021b}$ naravno število in zato je $2021b$ popoln kvadrat. Od tod na enak način kot v prvi rešitvi pridemo do protislovja.

3. način. Ker sta a in b naravni števili, je $a, b < 2021$. Prvotno enačbo kvadriramo in dobimo $a+2\sqrt{ab}+b = 2021$. To enačbo preoblikujemo v $2\sqrt{ab} = 2021-a-b$ in jo ponovno kvadriramo. Dobljeno enačbo preoblikujemo v $(a-b)^2 = 2021(2a+2b-2021) = 43 \cdot 47 \cdot (2a+2b-2021)$. Ker sta 43 in 47 praštevili sledi, da $43 \cdot 47 | a-b$.
Če je $a-b=0$, je $a=b$ in sledi $4a-2021=0$, kar pa ni mogoče, saj je $4a$ sodo število, 2021 pa liho.
Sledi $a-b \neq 0$. Ampak potem iz $2021|a-b$ sledi, da je $|a-b| \geq 2021$. Ker pa sta $a, b \in \mathbb{N}$ sledi, da je vsaj eno izmed števil a in b večje od 2021. To pa je v protislovju s sklepom, da sta $a, b < 2021$.
Torej ne obstajata naravni števili a in b, ki bi rešili prvotno enačbo.

Prva rešitev: Kvadriranje enačbe $\sqrt{a} = \sqrt{2021} - \sqrt{b}$ .... 1 točka
Sklep, da je $2\sqrt{2021b} \in \mathbb{Z}$ .... 1 točka
Sklep, da je $2021b$ popolni kvadrat .... 2 točki
Ugotovitev, da je $b = 43 \cdot 47 \cdot k^2$ .... 2 točki
Sklep, da je potem $b \geq 2021$, kar je v protislovju z ugotovitvijo, da je $b < 2021$ .... 1 točka

Opomba 1: če tekmovalec ne obrazloži, da je $\sqrt{2021b} \in \mathbb{N}$ se pri tretji alineji dodeli samo 1 točka.
Opomba 2: če tekmovalec zapiše faktorizacijo za b brez ugotovitve, da sta 43 in 47 praštevili, se mu pri četrti alineji dodeli samo 1 točka.

Druga rešitev: Kvadriranje enačbe $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2021}$ .... 1 točka
Kvadriranje enačbe $2\sqrt{ab} = 2021 - a - b$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je $2021 - a - b$ sodo število in zato $\sqrt{ab} \in \mathbb{N}$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je tudi $\sqrt{2021b} \in \mathbb{N}$, torej je $2021b$ popolni kvadrat .... 1 točka
Ugotovitev, da je $b = 43 \cdot 47 \cdot k^2$ .... 2 točki
Skelp, da je potem $b \geq 2021$, kar je v protislovju z ugotovitvijo, da je $b < 2021$ .... 1 točka

Opomba: če tekmovalec zapiše faktorizacijo za b brez ugotovitve, da sta 43 in 47 praštevili, se mu pri peti alineji dodeli samo 1 točka.

Tretja rešitev: Kvadriranje enačbe $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2021}$ .... 1 točka
Kvadriranje enačbe $2\sqrt{ab} = 2021 - a - b$ .... 1 točka
Preoblikovanje enačbe do $(a-b)^2 = 2021(2a+2b-2021)$ .... 1 točka
Ugotovitev, da $2021|(a-b)$ .... 2 točki
Obravnava primera $a = b$ .... 1 točka
Obravnava primera $a \neq b$ .... 1 točka

Opomba: če tekmovalec zapiše faktorizacijo za b brez ugotovitve, da sta 43 in 47 praštevili, se mu pri četrti alineji dodeli samo 1 točka.

B2. V enačbah najprej odpravimo ulomke in dobimo

$$\begin{aligned} 3xy &= 2x - 2y, \\ 2yz &= 3y + 6z, \\ xz &= 3z - 12x. \end{aligned}$$

Prvo enačbo preoblikujemo v $(3y-2)x = -2y$. Če je $3y-2=0$ oziroma $y = \frac{2}{3}$, tedaj sledi $y = 0$, kar pa je protislovje. Torej enačbo lahko delimo z $3y-2$ in izrazimo $x = \frac{-2y}{3y-2}$. Drugo enačbo preoblikujemo v $(2y-6)z = 3y$ in s podobnim sklepom izrazimo $z = \frac{3y}{2y-6}$. Oboje sedaj vstavimo v zadnjo enačbo, da dobimo

$$\frac{-2y}{3y-2} \cdot \frac{3y}{2y-6} = \frac{9y}{2y-6} + \frac{24y}{3y-2}.$$

Enačbo pomnožimo z $(3y-2)(2y-6)$, da dobimo

$$-6y^2 = 9y(3y-2) + 24y(2y-6),$$

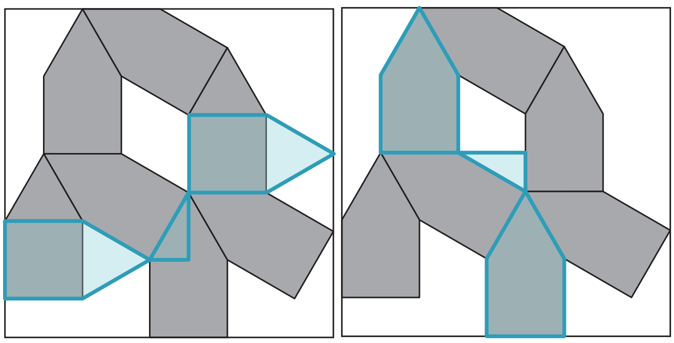
kar lahko poenostavimo do $81y^2 - 162y = 0$. Levo stran razstavimo in dobimo $81y(y-2) = 0$. Če je $y = 0$, iz zgornjih zvez sledi še $x = 0$ in $z = 0$. Toda to ni rešitev sistema enačb, saj ulomki v enačbah v tem primeru niso definirani. Zato mora biti $y = 2$ in posledično $x = \frac{-4}{4} = -1$ ter $z = \frac{6}{-2} = -3$. Edina rešitev sistema je torej $x = -1$, $y = 2$ in $z = -3$.

Izraz za dve spremenljivki kot funkciji tretje, kjer so posebej obravnavani primeri, kjer bi lahko prišlo do deljenja z nič (npr x, z kot funkciji y) .... 2 točki
Vstavljanje izrazov v preostalo enačbo .... 1 točka
Preoblikovanje enačbe do kvadratičnega polinoma v tretji spremenljivki (y) .... 1 točka
Obe rešitvi kvadratičnega polinoma .... 1 točka
Utemeljitev neveljavnosti rešitve z $x = y = z = 0$ .... 1 točka
Rezultat $x = -1$, $y = 2$, $z = -3$ .... 1 točka

Ugotovitev $xyz \neq 0$ .... 1 točka
Vstavljanje p, q, r ali ekvivalentih spremenljivk .... 1 točka
Preoblikovanje enačb in ugotovitev, da gre za sistem linearnih enačb .... 2 točki
Rešitev linearnega sistema enačb .... 2 točki
Rezultat $x = -1$, $y = 2$, $z = -3$ .... 1 točka

B3. Označimo z a dolžino stranice Natašinega petkotnika. Največji notranji kot petkotnika je enak $90° + 60° = 150°$. Luknja v Natašinem liku je torej romb z manjšim notranjim kotom enakim $360° - 2 \cdot 150° = 60°$. Ta romb je torej sestavljen iz dveh enakokrakih trikotnikov s stranico dolžine a.

a) Z leve slike razberemo, da je širina Natašinega lika enaka $a + \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2} + a + \frac{a\sqrt{3}}{2} = a(\frac{5}{2} + \sqrt{3})$, z desne slike pa razberemo, da je višina Natašinega lika prav tako enaka $a + \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2} + a + \frac{a\sqrt{3}}{2} = a(\frac{5}{2} + \sqrt{3})$. Torej Natašin lik lahko včrtamo v kvadrat.



b) Ploščina Natašinega petkotnika je $a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2(1 + \frac{\sqrt{3}}{4})$, ploščina njenega lika pa je $7a^2(1 + \frac{\sqrt{3}}{4})$. Po točki a) je ploščina velikega kvadrata enaka $a^2(\frac{5}{2} + \sqrt{3})^2 = a^2(\frac{37}{4} + 5\sqrt{3})$. Delež površine velikega kvadrata, ki ga pokrije Natašin lik je zato enak

$$\frac{7a^2(1 + \frac{\sqrt{3}}{4})}{a^2(\frac{37}{4} + 5\sqrt{3})} = \frac{7(4 + \sqrt{3})}{(37 + 20\sqrt{3})}.$$

Neenakost $\frac{7(4+\sqrt{3})}{(37+20\sqrt{3})} > \frac{2}{3}$ je ekvivalentna neenakosti $21(4+\sqrt{3}) > 2(37+20\sqrt{3})$, ki jo lahko preuredimo do $10 > 19\sqrt{3}$. Ker slednja neenakost očitno ni izpolnjena, Natašin lik ne prekrije več kot $\frac{2}{3}$ velikega kvadrata.

Ugotovitev, da je manjši kot v negativnem liku enak 60° .... 1 točka
Izračun, da je višina lika $a(\frac{5}{2}+\sqrt{3})$ .... 1 točka
Izračun, da je širina lika $a(\frac{5}{2}+\sqrt{3})$ .... 1 točka
Utemeljitev, da je očrtan lik kvadrat .... 1 točka
Izračun, da je ploščina lika enaka $7a^2(1+\frac{\sqrt{3}}{4})$ .... 1 točka
Izračun, da je ploščina očrtanega kvadrata enaka $a^2(\frac{5}{2}+\sqrt{3})^2$ .... 1 točka
Utemeljitev, da je ploščina lika manjša od $2/3$ ploščine kvadrata .... 1 točka

65. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Rešitve nalog za 2. letnik

A1	A2	A3
C	B	B

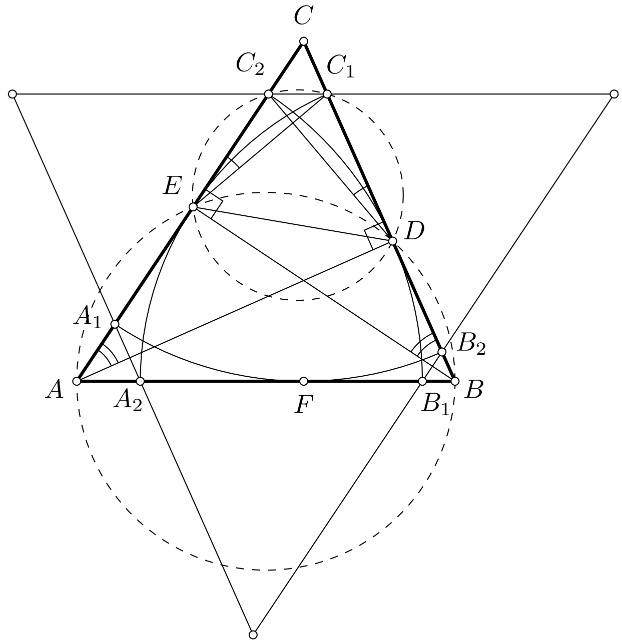
A1. Najmanjši skupni večkratnik števil $3, 4, 6$ in 8 je 24. Število tekmovalcev na tekmovanju mora biti torej deljivo s 24. Ker pa so vsi večkratniki števila 24, razen števila 24, večji od 30, je bilo na tekmovanju 24 tekmovalcev, od katerih so vse 4 naloge rešili $(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) \cdot 24 = \frac{3}{24} \cdot 24 = 3$ tekmovalci.

A2. Naj bodo a, b in c števila, ki jih je izbrala Lucijana, pri čemer je $a > b > c$. Največje možno število, ki ga z njimi lahko zapiše, je tedaj $\overline{abc}$, najmanjše možno število pa $\overline{cba}$. Za njuno vsoto velja, da je $100a + 10b + c + 100c + 10b + a = 101(a + c) + 20b = 545$. Če primerjamo enice na obeh straneh enačbe, vidimo, da je $a + c = 5$ ali $a + c = 15$, če pa primerjamo še stotice na obeh straneh enačbe, vidimo, da je $a + c = 5$. Torej je $b = 2$, $a = 4$ in $c = 1$ ter $a + b + c = 7$.

A3. Ker imata trikotnika AED in ABE enaki višini iz točke A, velja $X : 36 = |DE| : |EB|$. Podobno imata trikotnika CDE in CEB enaki višini iz točke C, zato velja $25 : X = |DE| : |EB|$. Sledi $X : 36 = 25 : X$, od koder izračunamo $X = \sqrt{25 \cdot 36} = 30$.

B1. Vrednost potence a^b je enaka 1 le v primeru, ko je $a = 1$, $a = -1$ in b sodo celo število ali $b = 0$ in $a \neq 0$. Če je $x^2 - 7x + 11 = 1$, sledi $x^2 - 7x + 10 = 0$ oziroma $(x - 2)(x - 5) = 0$. Od tod dobimo rešitvi $x = 2$ in $x = 5$. Če je $x^2 - 7x + 11 = -1$ oziroma $x^2 - 7x + 12 = 0$, sledi $(x - 3)(x - 4) = 0$ in zato $x = 3$ ali $x = 4$. V obeh primerih je $x^2 - 13x + 42$ sodo število, zato sta tudi to rešitvi. Če pa je $x^2 - 13x + 42 = 0$ oziroma $(x - 6)(x - 7) = 0$, sledi $x = 6$ ali $x = 7$ in v obeh primerih je $x^2 - 7x + 11 \neq 0$. Rešitev so torej števila $2, 3, 4, 5, 6$ in 7.

Zapis enačbe $x^2 - 7x + 11 = 1$ .... 1 točka
Zapisani rešitvi $x_1 = 2, x_2 = 5$ .... 1 točka
Zapis enačbe $x^2 - 7x + 11 = -1$ in zapisani rešitvi $x_3 = 3, x_4 = 4$ .... 1 točka
Utemeljitev, da je eksponent pri rešitvah x_3 in x_4 sodo število .... 1 točka
Zapis enačbe $x^2 - 13x + 42 = 0$ .... 1 točka
Zapisani rešitvi $x_5 = 6, x_6 = 7$ .... 1 točka
Utemeljitev, da je osnova $x^2 - 7x + 11$ pri rešitvah x_5 in x_6 neničelna .... 1 točka
Če tekmovalec vseh šest rešitev samo zapiše (brez utemeljitev), dobi za odgovor 1 točko.
B2.



Dokažimo, da sta premici AB in C_1C_2 vzporedni. Naj bodo D, E in F zaporedoma nožišča višin iz A, B in C trikotnika ABC. Kot med tangento in tetivo je enak obodnemu kotu nad tetivo, ta pa je enak polovici središčenega kota nad tetivo. Ker je stranica AC tangenta na krožnico s središčem v B, zato velja $\angle C_1EC_2 = \frac{1}{2}\angle C_1BE = \frac{1}{2}\angle CBE$. Podobno zaradi tangentnosti velja tudi $\angle C_1DC_2 = \frac{1}{2}\angle DAC_2 = \frac{1}{2}\angle DAC$. Ker se trikotnika ADC in BEC ujemata v dveh kotih, sta podobna in se ujemata tudi v tretjem kotu. Zato je $\angle CBE = \angle DAC$ in iz zgoraj dokazanega sledi še $\angle C_1EC_2 = \angle C_1DC_2$. Od tod sklepamo, da so točke C_1, C_2, D in E konciklične. Ker velja $\angle AEB = 90° = \angle ADB$, so tudi točke A, B, D in E konciklične. Iz obeh konciklićnosti sledi

$$\angle BAC = \angle BAE = 180° - \angle EDB = \angle C_1DE = 180° - \angle EC_2C_1 = \angle C_1C_2C,$$

torej sta premici AB in C_1C_2 vzporedni. Na podoben način dokažemo vzporednost premic BC in A_1A_2 ter premic CA in B_1B_2. Ker imata trikotnik, ki ga določajo premice A_1A_2, B_1B_2 in C_1C_2 ter trikotnik ABC paroma vzporedne stranice, sta torej podobna.

2. način. Dokažimo vzporednost AB in C_1C_2 še na drugačen način. Iz navodil naloge razberemo, da velja $|AC_2| = |AD|$ ter $|BC_1| = |BE|$. Ker sta trikotnika ADC in BEC podobna, od tod sledi

$$\frac{|AC_2|}{|BC_1|} = \frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|BC|},$$

kar pomeni, da sta premici AB in C_1C_2 vzporedni. Na podoben način dokažemo še ostali dve vzporednosti in dokaz zaključimo kot v prvi rešitvi.

1. način. Uporaba izreka o kotu med tetivo in tangento za dokaz $2\angle C_1EC_2 = \angle C_1BE$ ali analogne enakosti .... 1 točka
Dokaz $\angle CBE = \angle DAC$ oziroma koncikličnosti $ABDE$ .... 1 točka
Sklep, da velja $\angle C_1EC_2 = \angle C_1DC_2$ .... 2 točki
Sklep, da sta $ABDE$ in EDC_1C_2 konciklična .... 1 točka
Dokaz vzporednosti $AB \parallel C_1C_2$ .... 1 točka
Sklep, da sta si trikotnika podobna .... 1 točka

2. način. Dokaz, da $|AC_2| = |AD|$ in $|BC_1| = |BE|$ .... 1 točka
Dokaz, da sta ADC in BEC podobna .... 1 točka
Dobljena enakost $\frac{|AC_2|}{|BC_1|} = \frac{|AC|}{|BC|}$ .... 3 točke

Sklep, da sta AB in C_1C_2 vzporedni . . . . 1 točka
Sklep, da sta si trikotnika podobna . . . . 1 točka

B3. Z vsakim rezom se število kosov papirja poveča za 1. Na koncu bo torej število kosov papirja za 1 večje od števila rezov, ki jih je Veronika izvedla. Da bo izvedla čim manj rezov, mora imeti na koncu čim manj kosov papirja. Denimo, da ima na koncu k kosov s 14 kvadratki in n kosov s 15 kvadratki, torej skupaj $n+k$ kosov papirja. Tedaj mora veljati $14k+15n=78^2$. Enakost zapišemo v obliki $15(n+k)=78^2+k$ in izrazimo $n+k=\frac{78^2+k}{15}$. Od tod sledi, da mora biti število 78^2+k deljivo s 15. Da bo $n+k$ čim manjše, mora biti k čim manjši. Ker ima število $78^2=6084$ pri deljenju s 15 ostanek 9, mora biti $k\geq 6$. Ko je $k=6$, je $n+k=406$, torej mora Veronika papir prerezati vsaj 405-krat.

Preverimo še, da lahko Veronika s 405 rezi papir res razreže na kose, ki imajo bodisi 14 bodisi 15 kvadratkov. Veronika najprej od lista s 5 rezi odreže 5 trakov velikosti 15×78, vsakega od teh trakov pa s 77 rezi razreže na kose velikosti 15×1. Ostane ji še kos velikosti 3×78. Z 10 rezi od tega kosa odreže 10 kosov velikosti 3×5, da ji ostane kos velikosti 3×28. Z 1 rezom ta kos prereže na 2 kosa velikosti 3×14, nazadnje pa vsakega od teh kosov z 2 rezoma razreže na kose velikosti 1×14. Tako imajo vsi dobljeni kosi 14 ali 15 kvadratov, za kar je bilo potrebnih $5+5\cdot 77+10+1+2\cdot 2=405$ rezov.

Zapisana enačba $14k+15n=78^2$ . . . . 1 točka
Ugotovitev, da 15 deli 78^2+k ali 14 deli 78^2-n . . . . 1 točka
Utemeljitev, da mora biti k čim manjši, ali pa n čim večji in ocena $n<406$ . . . . 1 točka
Ugotovitev, da je $k\geq 6$ ali $n\leq 400$, in sklep, da je $n+k\geq 406$ . . . . 1 točka
Razrezan pas velikosti $a\times 78$ na kose iz 15 kvadratkov . . . . 1 točka
Primer iskanega rezanja s 405 rezi . . . . 1 točka
Zaključek, da je 405 najmanjše možno število rezov . . . . 1 točka
Če tekmovalec najde pravilen način rezanja papirja s 405 rezi, pri čemer ne razreže posebej pasu velikosti $a\times 78$, dobi za to vseeno dve točki.

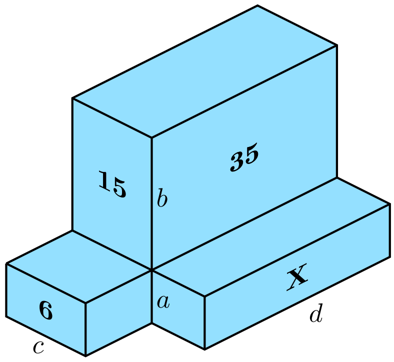
65. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Rešitve nalog za 3. letnik

A1	A2	A3
B	C	D

A1. Označimo nekatere od stranic kvadrov z a, b, c in d (glej sliko).



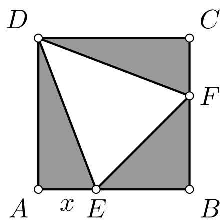
Potem je $ac = 6$, $bc = 15$, $bd = 35$ in $ad = X$. Sledi, da je $ac \cdot bd = 6 \cdot 35$ in hkrati $bc \cdot ad = 15X$, torej je $6 \cdot 35 = 15X$ in zato $X = 14$.

A2. Označimo z x razdaljo, ki jo je prevozila Ana do srečanja z Meto. Potem je Meta do srečanja z Ano prevozila $x+2\cdot 105$ km. Če čas, ki je pretekel do srečanja, zapišemo z Aninega in Metinega stališča v urah, dobimo

$$\frac{x}{30} = \frac{x + 2 \cdot 105}{70} + 1,$$

od koder sledi, da je $x = 210$ km. Razdalja med vasema Zabukovje in Zahrastje je $210 + 105 = 315$ km.

A3. Označimo z A, B, C in D oglišča kvadrata in dodatno z E in F oglišči belega trikotnika (glej sliko).



Označimo $x = |AE|$. Ker imata pravokotna trikotnika AED in FCD eno od stranic enako stranici kvadrata in imata enaki ploščini, je $|CF| = |AE| = x$. Če upoštevamo, da imata tudi trikotnika AED in EBF enaki ploščini, dobimo $\frac{2\cdot x}{2} = \frac{(2-x)\cdot(2-x)}{2}$. Enačbo preoblikujemo v $x^2 - 6x + 4 = 0$ in jo rešimo kot kvadratno enačbo, da dobimo $x = 3 \pm \sqrt{5}$. Ker mora biti $x < 2$, je prava rešitev $x = 3 - \sqrt{5}$. Ploščina belega trikotnika je zato enaka

$$p = 2^2 - 3 \cdot \frac{2 \cdot (3 - \sqrt{5})}{2} = 3\sqrt{5} - 5.$$

B1. Označimo $\log_2(a^2-4a-1)=n$, kjer je n celo število. Potem je $a^2-4a-1=2^n$ oziroma $a^2-4a-(1+2^n)=0$. To je kvadratna enačba za a, ki ima rešitvi $a_1=2+\sqrt{5+2^n}$ in $a_2=2-\sqrt{5+2^n}$. Enačba ima celoštevilsko rešitev le v primeru, ko je $\sqrt{5+2^n}$ celo število. Naj bo $\sqrt{5+2^n}=k$ oziroma $5+2^n=k^2$ in ločimo tri primere glede na predznak števila n. Če je $n<0$, enakost preuredimo v $2^n=k^2-5$ in opazimo, da je na desni strani celo število, na levi pa ne. Zato v tem primeru nimamo rešitev. Če je $n=0$, sledi $k^2=6$, kar pa ni mogoče, saj 6 ni kvadrat celega števila. Če je $n>0$, je število $5+2^n$ liho, zato mora biti tudi k liho število. Pišimo $k=2m-1$, kjer je m celo število. Enačbo $5+2^n=(2m-1)^2$ lahko preuredimo do $m(m-1)=2^{n-2}+1$. Opazimo, da je $m(m-1)$ sodo celo število, zato mora biti tako tudi število $2^{n-2}+1$. Pri $n=1$ število $2^{n-2}+1$ ni celo, pri $n>2$ pa ni sodo. Ostanem nam torej le možnost $n=2$. V tem primeru je $a_1=5$ in $a_2=-1$. Edini rešitvi naloge sta torej $a=-1$ in $a=5$. V obeh primerih je $\log_2(a^2-4a-1)=2$.

2. način. Označimo $\log_2(a^2-4a-1)=n$, kjer je n celo število. Potem je $a^2-4a-1=2^n$. Ker je leva stran enakosti celo število, mora biti tudi na desna stran celo število, torej je $n\geq 0$. Če je $n=0$, sledi $a^2-4a-2=0$. Ta enačba nima celoštevilskih rešitev, saj njena diskriminanta $D=16+8=24$ ni popoln kvadrat. Torej je $n\geq 1$, kar pomeni, da je 2^n sodo število. Iz enakost $a^2-4a-1=2^n$ zato sledi, da mora biti a liho število. Pišimo $a=2k+1$, kjer je k celo število. Če to vstavimo v zadnjo enakost in enakost poenostavimo, dobimo $k^2-k-1=2^{n-2}$. Ker je $k^2-k=k(k-1)$ sodo število, je leva stran enakosti liho število, zato mora biti tudi desna stran liho število. To pomeni, da je $n=2$ in zato $k^2-k-2=0$. Slednja enačba ima rešitvi $k=2$ in $k=-1$. V prvem primeru je $a=5$, v drugem pa $a=-1$.

1. način

Zapis $a^2-4a-1=2^n$ .... 1 točka
Zapis oblike a_1 in a_2 ter ugotovitev, da je $\sqrt{5+2^n}$ celo število .... 1 točka
Obravnava primerov za $n\leq 0$ .... 1 točka
Utemeljena ugotovitev, da je $5+2^n=k$ liho in uporaba tega kot $k=2m-1$ .... 1 točka
Preureditev enačbe $5+2^n=(2m-1)^2$ .... 1 točka
Opazka, da mora biti $2^{n-2}+1$ sodo .... 1 točka
Zaključek z rešitvama $a_1=5$ in $a_2=-1$ .... 1 točka

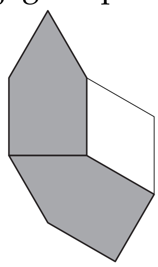
1. način (varianta)

Zapis $a^2-4a-1=2^n$ .... 1 točka
Zapis oblike a_1 in a_2 ter ugotovitev, da je $\sqrt{5+2^n}$ celo število .... 1 točka
Faktorizacija do $4+2^n=(k-1)(k+1)$ .... 1 točka
Obravnava primerov za $n\leq 0$ .... 1 točka
Preverba za $n\in\{1,2\}$ .... 1 točka
Utemeljen razmislek za $n\geq 3$ .... 1 točka
Zaključek z rešitvama $a_1=5$ in $a_2=-1$ .... 1 točka

2. način

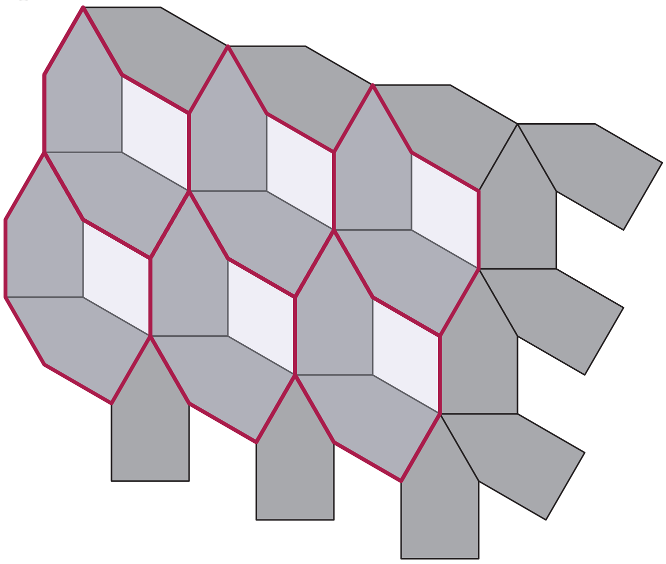
Zapis $a^2-4a-1=2^n$ .... 1 točka
Utemeljena ugotovitev, da ni rešitev za $n\leq 0$ .... 1 točka
Utemeljena ugotovitev, da mora biti a liho število .... 1 točka
Uporaba lihosti, da dobimo $k^2-k-1=2^{n-2}$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je leva stran liha in zato tudi desna .... 1 točka
Ugotovitev, da to velja samo za $n=2$ .... 1 točka
Zaključek z rešitvama $a_1=5$ in $a_2=-1$ .... 1 točka

B2. Označimo z a dolžino stranice Natašinega petkotnika. Potem je njegova ploščina enaka

$a^2(1+\frac{\sqrt{3}}{4})$. Največji notranji kot petkotnika je enak $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Luknja v Natašinem vzorcu je torej romb z manjšim notranjim kotom enakim $360^\circ - 2 \cdot 150^\circ = 60^\circ$. Ta romb je torej sestavljen iz dveh enakokrakih trikotnikov s stranico dolžine a, zato je njegova ploščina enaka $2 \cdot a^2\frac{\sqrt{3}}{4} = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$. Opazimo, da lahko ravnino prekrijemo z osemkotnikom , kot prikazuje spodnja slika. Ploščina tega osemkotnika je enaka $2 \cdot a^2(1+\frac{\sqrt{3}}{4}) + a^2\frac{\sqrt{3}}{2} = a^2(2+\sqrt{3})$. Delež ravnine, ki ga pokriva Natašin vzorec je zato enak deležu osemkotnika, ki ga prekrivata petkotnika, tj.

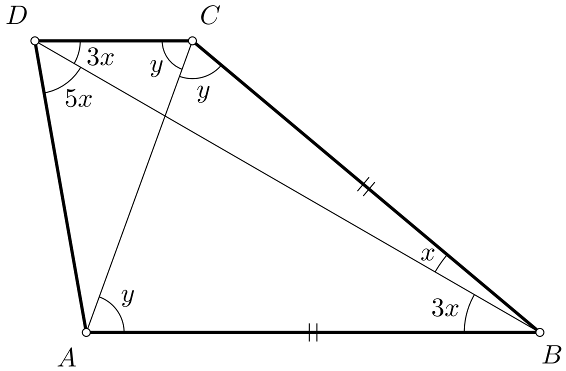
$$\frac{2a^2(1+\frac{\sqrt{3}}{4})}{a^2(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2+\sqrt{3}} = \frac{4+\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}.$$

Neenakost $\frac{4+\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} > \frac{3}{4}$ je ekvivalentna neenakosti $4(4+\sqrt{3}) > 3(4+2\sqrt{3})$, ki jo lahko preuredimo v $4 > 2\sqrt{3}$. Slednja neenakos je izpolnjena, saj je $\sqrt{3} < 2$. Natašin vzorec torej pokrije več kot 75% površine ravnine.



Identifikacije osnovne celice . . . . 2 točki
Ploščina petkotnika . . . . 1 točka
Ploščina romba . . . . 1 točki
Pravilen zapis relativne osenčene ploščine . . . . 1 točka
Pravilno preoblikovanje neenakosti (ali konsistentne ocene vrednosti $\sqrt{3}$) . . . . 1 točka
Utemeljena ugotovitev, da vzorec pokrije več kot 3/4 ravnine . . . . 1 točka
Zaključek brez utemeljitve . . . . 0 točk

B3. Označimo $\angle CBD = x$. Tedaj je $\angle DBA = 3x$ in $\angle ADB = 5x$. Ker je $ABCD$ trapez, sta premici AB in CD vzporedni, zato je $\angle BDC = \angle DBA = 3x$. Ker je $|BC| = |AB|$, je trikotnik ABC enakokrak z vrhom pri B. Označimo $\angle BAC = \angle ACB = y$. Zaradi vzporednosti premic AB in CD je tudi $\angle DCA = y$.



Po sinusnem izreku za trikotnik ACD velja $\frac{\sin 8x}{\sin y} = \frac{|AC|}{|AD|}$, po sinusnem izreku za trikotnik ABC pa $\frac{\sin y}{\sin 4x} = \frac{|BC|}{|AC|}$. Obe enakosti zmnožimo, da dobimo $\frac{\sin 8x}{\sin 4x} = \frac{|BC|}{|AD|}$. Sedaj uporabimo sinusni izrek še za trikotnik ABD in dobimo $\frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AD|}$. Iz obeh izpeljanih enakosti sledi $\frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \frac{\sin 8x}{\sin 4x}$. Po obrazcu za dvojne kote sledi $\frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \frac{2\sin 4x \cos 4x}{\sin 4x} = 2\cos 4x$ in zato je $2\sin 3x \cos 4x = \sin 5x$. Levo stran defaktoriziramo $\sin 7x + \sin(-x) = \sin 5x$, in z upoštevanjem lihosti funkcije $\sin$ enakost preoblikujemo v $\sin 7x + \sin(-5x) = \sin x$. Sedaj levo stran ponovno faktoriziramo, da dobimo $2\sin x \cos 6x = \sin x$. Ker $\sin x \neq 0$, lahko enakost pokrajšamo s $\sin x$ in dobimo $\cos 6x = \frac{1}{2}$. Ker je $0° < 6x < 8x < 180°$, od tod sledi $6x = 60°$ oziroma $x = 10°$. Velikosti notranjih kotov trapeza so torej $\beta = 4x = 40°$, $\gamma = 180° - \beta = 140°$, $\delta = 8x = 80°$ in $\alpha = 180° - \delta = 100°$.

2. način. Po sinusnem izreku za trikotnik ABD dobimo $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{\sin 5x}{\sin(180°-8x)} = \frac{\sin 5x}{\sin 8x}$, po sinusnem izreku za trikotnik BCD pa $\frac{|BC|}{|BD|} = \frac{\sin 3x}{\sin(180°-4x)} = \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$. Ker je $|AB| = |BC|$, sta oba izraza enaka, torej je $\frac{\sin 5x}{\sin 8x} = \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$. Od tod kot v prvi rešitvi izpeljemo $2\sin 3x \cos 4x = \sin 5x$. Enakost sedaj množimo s $\cos 3x$ in na levi strani uporabimo formulo za dvojne kote, da dobimo $\sin 6x \cos 4x = \sin 5x \cos 3x$. Obe strani defaktoriziramo $\sin 10x + \sin 2x = \sin 8x + \sin 2x$ in enakost poenostavimo do $\sin 10x = \sin 8x$. Ker je $0° < 8x < 180°$, sta kota $8x$ in $10x$ različna in manjša od $360°$, zato sledi $10x = 180° - 8x$ oziroma $x = 10°$. Od tod kot v prvi rešitvi poračunamo notranje kote trapeza $\beta = 40°$, $\gamma = 140°$, $\delta = 80°$ in $\alpha = 100°$.

Uporaba sinusnega izreka za trikotnik ABC .... 1 točka

Uporaba sinusnega izreka za trikotnik BCD .... 1 točka

Dobljena enačba $\frac{\sin(5x)}{\sin(8x)} = \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$ .... 1 točka

Dobljena enačba $\sin(5x) = 2\sin(3x)\cos(4x)$ .... 1 točka

Pravilna defaktorizacija in poznavanje lihosti funkcije sinus .... 1 točka

Dobljena enačba $2\sin(x)\cos(6x) = \sin(x)$ .... 1 točka

Utemeljeno, zakaj $x = 10°$ in dobljeni iskani koti štirikotnika .... 1 točka

65. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

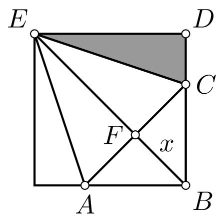
Rešitve nalog za 4. letnik

A1	A2	A3
B	E	A

A1. Če enačimo skupno maso na slikah (A) in (D) ter na slikah (C) in (E), obakrat dobimo, da je masa 1 valja enaka masi 2 kock in 1 piramide. Torej je skupna masa teles na slikah (A), (D), (C) in (E) enaka. Če primerjamo še maso teles na slikah (A) in (C) vidimo, da masa kocke ni enaka masi piramide, torej se skupna masa teles na sliki (B) razlikuje od skupne mase teles na preostalih slikah.

A2. Za obe narisani premici velja, da imata smerni koeficient večji od nič in začetno vrednost večjo od nič. Torej je $a > 0$ in $b > 0$, enačba druge premice pa ne more biti niti $y = ax - b$ niti $y = -bx + a$. Ker sta začetni vrednosti za narisani premici različni, enačba druge premice ne more biti enaka $y = \frac{b}{a}x + b$. Torej preostaneta samo še enačbi $y = bx + a$ in $y = \frac{a}{b}x + a$. Če je $b > a$, potem je začetna vrednost druge premice manjša od začetne vrednosti prve premice, torej mora biti tudi smerni koeficient druge premice manjši od smernega koeficienta prve premice, ki je a. V tem primeru je torej možna enačba druge premice samo $y = \frac{a}{b}x + a$. Če pa je $b < a$, je začetna vrednost druge premice večja od začetne vrednosti prve premice in mora biti tudi smerni koeficient druge premice večji od smernega koeficienta prve premice, ki je a. Torej je tudi v tem primeru možna enačba druge premice samo $y = \frac{a}{b}x + a$.

A3. Narišemo diagonalo kvadrata in označimo z A, B, C, D, E in F nekatere točke na kvadratu (glej sliko).



Označimo z $x = |BF|$. Ker je ploščina trikotnika ACE dvakrat tolikšna kot ploščina trikotnika ABC, je $|EF| = 2|BF| = 2x$. Trikotnik BFC je pravokoten in enakokrak, zato je $|BF| = |FC| = |FA| = x$. Torej je ploščina trikotnika ABC enaka $\frac{2x \cdot x}{2} = x^2$, ploščina trikotnika ACE pa je enaka $\frac{2x \cdot 2x}{2} = 2x^2$. Ker je $3x = |BE| = 2\sqrt{2}$, je $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, ploščina osenčenega trikotnika pa je enaka

$$p = \frac{1}{2}(2^2 - x^2 - 2x^2) = \frac{1}{2}(4 - \frac{8}{9} - \frac{16}{9}) = \frac{2}{3}.$$

B1. Za vsak $n \geq 1$ iz rekurzivne zveze izrazimo $a_{n+1} = 3 - \frac{18}{6+a_n} = \frac{3a_n}{6+a_n}$. Od tod sledi

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 6}{3a_n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{a_n}.$$

To zvezo uporabimo večkrat zapored, da izpeljemo

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{1}{3} + \frac{2}{a_n} = \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{a_{n-1}}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 4\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{a_{n-2}}\right) = \ldots \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} + \ldots + 2^{n-1}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{a_1}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{3} + \frac{2^n}{a_1}.\end{aligned}$$

Z upoštevanjem vrednosti $a_1 = 3$ ter formule za vsoto členov geometrijskega zaporedja dobimo

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{3}(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n) = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1),$$

od koder sledi $\frac{1}{a_k} = \frac{1}{3}(2^k - 1)$ za vse $k \geq 2$, ta formula pa očitno velja tudi za $k = 1$. Torej je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}(2^k - 1) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} 2^k - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} - \frac{1}{3} \cdot n = \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{n+2}{3},$$

pri čemer smo ponovno uporabili formulo za vsoto členov geometrijskega zaporedja.

2. način. Trditev bomo pokazali z matematično indukcijo. Če je $n = 1$, je leva stran enakosti enaka $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{3}$, desna stran pa $\frac{4}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Ker sta obe vrednoti enaki, je baza indukcije izpolnjena. Denimo sedaj, da dana enakost velja za neko naravno n. Iz rekurzivne zveze zaporedja izrazimo $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{a_n}$. S pomočjo te zveze izpeljemo in vrednosti $a_1 = 3$ izpeljemo

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{a_1}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{a_2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{a_n}\right) =$$

$$= (n+1) \cdot \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{n+1}{3} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}.$$

Po indukcijski predpostavki je torej

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} = \frac{n+1}{3} + 2\left(\frac{2^{n+1}}{3} - \frac{n+2}{3}\right) = \frac{2^{n+2}}{3} - \frac{n+3}{3}.$$

Torej dana enakost velja tudi za število $n+1$. S tem smo dokazali indukcijksi korak. Po principu matematične indukcije, je enakost izpolnjena za vsa naravna števila n.

3. način. Iz rekurzivne zveze izrazimo $a_{n+1} = \frac{3a_n}{6+a_n}$ za vse $n \geq 1$. Izračunajmo prvih nekaj členov zaporedja:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3, \\
a_2 &= \frac{3 \cdot 3}{3+6} = 1, \\
a_3 &= \frac{3 \cdot 1}{1+6} = \frac{3}{7} = \frac{3}{8-1}, \\
a_4 &= \frac{3 \cdot \frac{3}{7}}{\frac{3}{7} + 6} = \frac{9}{45} = \frac{3}{15} = \frac{3}{16-1}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Uganemo, da je $a_n = \frac{3}{2^n - 1}$ in to dokažemo z indukcijo. Za $n = 1$ je $a_1 = 3$ in $\frac{3}{2^1-1} = 3$, torej zveza velja. Predpostavimo, da je $a_n = \frac{3}{2^n-1}$ in izračunajmo

$$a_{n+1} = \frac{3a_n}{6 + a_n} = \frac{3\frac{3}{2^n-1}}{6 + \frac{3}{2^n-1}} = \frac{\frac{3}{2^n-1}}{\frac{2(2^n-1)+1}{2^n-1}} = \frac{3}{2^{n+1} - 1}.$$

Vidimo, da zveza velja tudi za $n+1$, če velja za n, in s tem je indukcija zaključena. Če $a_k = \frac{3}{2^k-1}$ vstavimo v iskano vsoto, dobimo

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}(2^k - 1) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} 2^k - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} - \frac{1}{3} \cdot n = \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{n+2}{3},$$

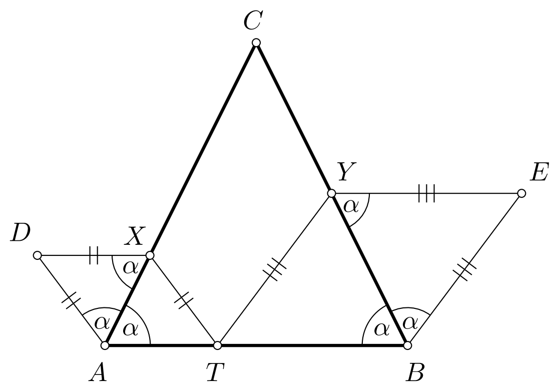
pri čemer smo uporabili formulo za vsoto členov geometrijskega zaporedja.

Izpeljava zveze $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{a_n}$ .... 1 točka
Uporaba zveze za začetek razvoja $\frac{1}{a_{n+1}}$ v vsoto geometrijskega zaporedja .... 1 točka
Razvoj $\frac{1}{a_{n+1}}$ v vsoto geometrijskega zaporedja do člena $\frac{2^n}{a_1}$ .... 1 točka
Seštetje členov geometrijskega zaporedja v $\frac{1}{a_k} = \frac{1}{3}(2^k - 1)$ .... 1 točka
Opažanje, da zgornja formula velja tudi za $k = 1$ .... 1 točka
Razbitje $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k}$ na vsoto geometrijskega in konstantnega zaporedja .... 1 točka
Izračun iskane vsote .... 1 točka

Izpeljava zveze $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{a_n}$ .... 1 točka
Uporaba te zveze v vseh členih $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k}$ .... 1 točka
Izpeljava rekurzivne zveze med $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k}$ in $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ .... 2 točki
Odločitev za indukcijo in baza $n = 1$ .... 1 točka
Indukcijski korak .... 2 točki

Izpeljava zveze $a_{n+1} = \frac{3a_n}{6+a_n}$ za $n \geq 1$ .... 1 točka
Zapis formule $a_n = \frac{3}{2^n - 1}$ brez dokaza .... 1 točka
Odločitev za indukcijo in baza $n = 1$ .... 1 točka
Indukcijski korak .... 2 točki
Razbitje $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k}$ na vsoto geometrijskega in konstantnega zaporedja .... 1 točka
Izračun iskane vsote .... 1 točka

B2.



Označimo $\angle BAC = \angle CBA = \alpha$. Ker je premica AC simetrala kota $\angle BAD$, je $\angle XAD = \alpha$. Zaradi vzporednosti premic XD in AB pa je tudi $\angle DXA = \alpha$. Trikotnik AXD je torej enakokrak z vrhom pri D, zato velja $|XD| = |AD| = |TX|$. Ker sta premici AB in DX vzporedni, od tod sledi, da je štirikotnik $ATXD$ bodisi romb bodisi enakokrak trapez. Podobno sklepamo, da je tudi štirikotnik $TBEY$ bodisi romb bodisi enakokrak trapez. Pokažimo, da sta ta dva štirikotnika oba romba.

Po predpostavki je kot $\angle ACB = 180° - 2\alpha < 90°$, zato je $\alpha > 45°$. Če je štirikotnik $ATXD$ romb, je $\angle XTA = 180° - \angle TAD = 180° - 2\alpha$, če pa je enakokrak trapez, je $\angle XTA = \angle TAD = 2\alpha$. Podobno je tudi $\angle BTY = 180° - 2\alpha$, če je $TBEY$ romb, in $\angle BTY = 2\alpha$, če je $TBEY$ enakokrak trapez. Ker sta točki X in Y različni od C in ležita na ustreznih stranicah trikotnika, je $\angle BTY + \angle XTA < 180°$. Ker pa kombinacije $2\alpha + 2\alpha = 4\alpha > 4 \cdot 45° = 180°$, $(180° - 2\alpha) + 2\alpha = 180°$ in $2\alpha + (180° - 2\alpha) = 180°$ ne ustrezajo temu pogoju, je po zgornjem možna le kombinacija $\angle BTY = \angle XTA = 180° - 2\alpha$, torej sta štirikotnika $ATXD$ in $TBEY$ romba.

Od tod sledi, da sta trikotnika ATX in YTB enakokraka z vrhom pri T in zato podobna trikotniku BCA, saj je z njim ujemata v kotu ob osnovnici. Torej je

$$\frac{|AX|}{|AB|} = \frac{|AT|}{|BC|} \quad \text{in} \quad \frac{|BY|}{|AB|} = \frac{|BT|}{|AC|} = \frac{|BT|}{|BC|}.$$

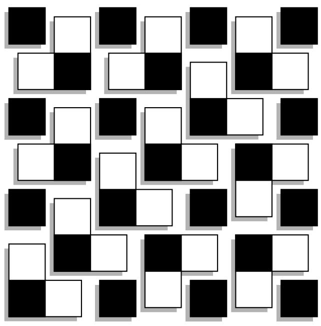
S pomočjo teh enakosti izrazimo

$$|AX| + |BY| = \frac{|AB| \cdot |AT|}{|BC|} + \frac{|AB| \cdot |BT|}{|BC|} = \frac{|AB| \cdot (|AT| + |BT|)}{|BC|} = \frac{|AB|^2}{|BC|}.$$

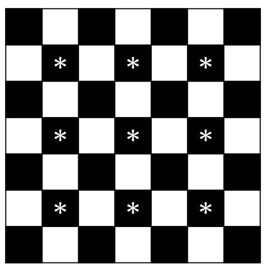
Ugotovitev enakosti kotov $\angle XAD = \alpha$ in $\angle DXA = \alpha$ .... 1 točka
Ugotovitev enakosti $|AD| = |TX|$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je $ATXD$ oziroma $TBEY$ romb ali enakokrak trapez .... 1 točka
Utemeljitev, da morata biti $ATXD$ in $TBEY$ oba romba .... 2 točki
Podobnost trikotnikov AXT, BYT in ABC .... 1 točka
Končni izračun, da je $|AX| + |BY| = \frac{|AB|^2}{|AC|}$ .... 1 točka

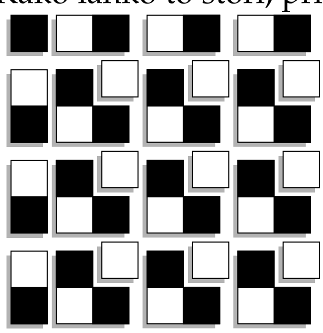
B3.

(a) Ker ima Selenin list papirja 24 belih kvadratkov, vsak koščček pa ima 2 bela kvadratka, lahko Selena izreže največ $24 : 2 = 12$ takih koščkov. Kako lahko to stori, prikazuje slika.



(b) Oglejmo si 9 črnih kvadratkov Seleninega papirja, ki so na levi sliki označeni z $*$. Vsak koščček predpisane oblike, ki ga Selena lahko izreže, mora zagotovo vsebovati enega od teh 9 kvadratkov. Torej lahko Selena izreže največ 9 takih koščkov. Kako lahko to stori, prika-zuje desna slika.





(a)
Utemeljitev, da ni mogoče izrezati več kot 12 koščkov .... 1 točka
Razdelitev na 12 koščkov .... 1 točka
(b)
Razdelitev na 9 koščkov .... 2 točki
Označba(*) črnih kvadratkov .... 2 točki
Utemeljitev, da mora imeti vsak koščček natanko 1 označen kvadratek .... 1 točka