**Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

# Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

# 67. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

## Odbirno tekmovanje, 16. marec 2023

## Naloge za 1. letnik

*Čas reševanja: 45 minut.*

**B1.** Izračunaj vrednost izraza $2x^3 + y^3 - 3y^2x + 6x^2$, če sta $x$ in $y$ realni števili, za kateri velja $y - x = 2$.

**B2.** Poišči vsa cela števila $n$, za katera je tudi število $\frac{9n+8}{n+7}$ celo.

# 67. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

## Odbirno tekmovanje, 16. marec 2023

## Naloge za 2. letnik

*Čas reševanja: 45 minut.*

**B1.** Poišči vsa cela števila $n$, za katera je tudi število $\frac{7n+5}{2n+3}$ celo.

**B2.** Naj bo $\mathcal{K}$ ostrokotnemu trikotniku $ABC$ očrtana krožnica. Nosilke višin skozi $A$, $B$ in $C$ krožnico $\mathcal{K}$ zaporedoma sekajo še v točkah $A'$, $B'$ in $C'$. Naj bo $\sphericalangle B'A'C' = 20^\circ$, $\sphericalangle C'B'A' = 60^\circ$ in $\sphericalangle A'C'B' = 100^\circ$. Izračunaj notranje kote trikotnika $ABC$.

# 67. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

## Odbirno tekmovanje, 16. marec 2023

## Naloge za 3. letnik

*Čas reševanja: 45 minut.*

**B1.** Poišči vsa cela števila $n$, za katera je tudi število $\frac{11n+12}{3n-5}$ celo.

**B2.** Poišči vsa realna števila $x$, ki zadoščajo neenačbi $\log_{\frac{1}{2}}(4-x) > \log_2(x-1)$.

# 67. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

## Odbirno tekmovanje, 16. marec 2023

## Naloge za 4. letnik

*Čas reševanja: 45 minut.*

**B1.** Poišči vsa cela števila $n$, za katera je tudi število $\frac{12n^2-1}{n-12}$ celo.

**B2.** Poišči pogoj za realni števili $a$ in $b$, ki je hkrati potreben in zadosten, da ima sistem enačb

$$20x^2 + 20y^2 + ax + by + 18 = 0,$$
$$18x^2 + 18y^2 + ax + by + 20 = 0$$

vsaj eno realno rešitev.

# 67. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

## 17. marec 2022

# Naloge za 1. letnik (rešitve)

**1.** Iz pogoja $y-x=2$ izrazimo $y=x+2$ in vstavimo v izraz, da dobimo

$$A = 2x^3 + y^3 - 3y^2x + 6x^2 = 2x^3 + (x+2)^3 - 3(x+2)^2x + 6x^2.$$

Z upoštevanjem zvez $(x+2)^2 = x^2+4x+4$ in $(x+2)^3 = x^3+6x^2+12x+8$ izračunamo

$$A = 2x^3 + (x^3+6x^2+12x+8) - (3x^3+12x^2+12x) + 6x^2 = 8.$$

Vrednost izraza je $8$.

**2. način.** Izraz preoblikujemo

$$\begin{aligned} A &= 2x^3 + y^3 - 3y^2x + 6x^2 = (2x^3 - 2y^2x) + (y^3 - y^2x) + 6x^2 \\ &= 2x(x^2-y^2) + y^2(y-x) + 6x^2 = 2x(x+y)(x-y) + y^2(y-x) + 6x^2. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem pogoja $y-x=2$ dobimo

$$A = -4x(x+y) + 2y^2 + 6x^2 = 2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x^2-2xy+y^2) = 2(x-y)^2.$$

Še enkrat upoštevamo pogoj in dobimo $A = 2\cdot(-2)^2 = 8$.

Zapis izraza $A$ z eno neznanko (npr. upoštevano $y=x+2$) .......... 3 točke
Zapis ali upoštevanje zveze $(x+2)^2 = x^2+4x+4$ .......... 3 točke
Zapis ali upoštevanje zveze $(x+2)^3 = x^3+6x^2+12x+8$ .......... 4 točke
Zapis $A = 2x^3 + (x^3+6x^2+12x+8) - (3x^3+12x^2+12x) + 6x^2$ .......... 5 točk
Izračun $A=8$ .......... 5 točk.

**2. način.** Preoblikovanje izraza v $A = (2x^3-2y^2x) + (y^3-y^2x) + 6x^2$ .......... 3 točke
Zapis $A = 2x(x^2-y^2) + y^2(y-x) + 6x^2$ .......... 3 točke
Zapis $A = 2x(x^2-y^2) + y^2(y-x) + 6x^2$ .......... 2 točki
Zapis $A = 2x(x+y)(x-y) + y^2(y-x) + 6x^2$ .......... 3 točke
Upoštevanje $y-x=2$ in izračun $A = -4x(x+y) + 2y^2 + 6x^2$ .......... 3 točke
Zapis $A = 2(x-y)^2$ .......... 3 točke
Izračun $A=8$ .......... 3 točke.

**2.** Ker je $9n+8 = 9(n+7) - 55$, je $\frac{9n+8}{n+7} = 9 - \frac{55}{n+7}$. Slednje je celo število natanko tedaj, ko $n+7$ deli $55$. Ker je $55 = 5\cdot 11$, sledi $n+7 \in \{-55,-11,-5,-1,1,5,11,55\}$ oziroma $n \in \{-62,-18,-12,-8,-6,-2,4,48\}$.

**2. način.** Število $n+7$ mora deliti $9n+8$, zato mora deliti tudi $(9n+8) - 9(n+7) = -55$. Torej je $n+7 \in \{-55,-11,-5,-1,1,5,11,55\}$ oziroma $n \in \{-62,-18,-12,-8,-6,-2,4,48\}$. Preizkus pokaže, da vsa ta števila ustrezajo pogoju naloge.

Zapis $\frac{9n+8}{n+7} = 9 - \frac{55}{n+7}$ .......... 6 točk
Ugotovitev $n+7$ deli $55$ .......... 4 točke
Razcep $55 = 11\cdot 5$ .......... 1 točka
Sklep $n+7 \in \{-55,-11,-5,-1,1,5,11,55\}$ .......... 6 točk
Izračun $n \in \{-62,-18,-12,-8,-6,-2,4,48\}$ .......... 3 točke.
**2. način.** Zapis $9n+8$ kot $9(n+7)-55$ .......... 6 točk
Ugotovitev $n+7$ deli $(9n+8)-9(n+7) = -55$ .......... 4 točke
Razcep $55 = 11\cdot 5$ .......... 1 točka
Sklep $n+7 \in \{-55,-11,-5,-1,1,5,11,55\}$ .......... 6 točk
Izračun $n \in \{-62,-18,-12,-8,-6,-2,4,48\}$ .......... 3 točke.

# 67. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

**17. marec 2022**

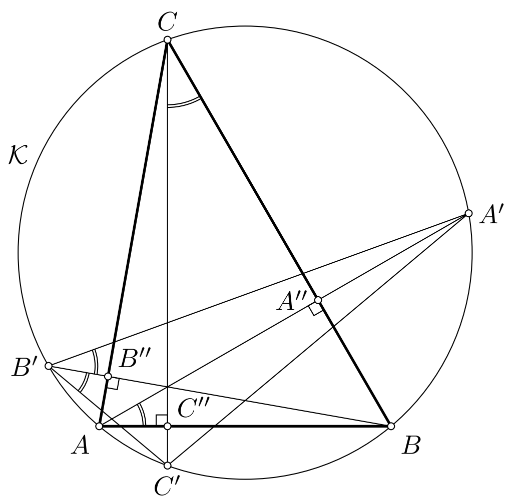
## Naloge za 2. letnik (rešitve)

**1.** Ker je $7n+5 = \frac{7}{2}(2n+3) - \frac{11}{2}$, lahko zapišemo $\frac{7n+5}{2n+3} = \frac{7}{2} - \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{2}(7 - \frac{11}{2n+3})$. Torej mora biti število $7 - \frac{11}{2n+3}$ celo in sodo, kar pa velja natanko tedaj, ko $2n+3$ deli $11$, saj je tedaj število $\frac{11}{2n+3}$ avtomatično liho. Sledi $2n+3 \in \{-11,-1,1,11\}$ oziroma $n \in \{-7,-2,-1,4\}$.

**2. način.** Število $2n+3$ mora deliti $7n+5$, zato mora deliti tudi $(7n+5) - 3(2n+3) = n-4$ in posledično tudi $2(n-4) - (2n+3) = -11$. Sledi $2n+3 \in \{-11,-1,1,11\}$ oziroma $n \in \{-7,-2,-1,4\}$. Preizkus pokaže, da vsa ta štiri števila res ustrezajo pogoju naloge.

Zapis $\frac{7n+5}{2n+3} = \frac{1}{2}(7 - \frac{11}{2n+3})$ .......... 6 točk
Ugotovitev $7 - \frac{11}{2n+3}$ celo in sodo .......... 2 točki
Ugotovitev $2n+3$ deli $11$ .......... 4 točke
Sklep $2n+3 \in \{-11,-1,1,11\}$ .......... 5 točk
Izračun $n \in \{-7,-2,-1,4\}$ .......... 3 točke.

**2. način.** Zapis $7n+5$ kot $3(2n+3)+n-4$ .......... 6 točk
Ugotovitev $2n+3$ deli $n-4$ .......... 3 točke
Ugotovitev $2n+3$ deli $11$ .......... 3 točke
Sklep $2n+3 \in \{-11,-1,1,11\}$ .......... 5 točk
Izračun $n \in \{-7,-2,-1,4\}$ .......... 3 točke.




**2.**

Označimo $\angle BAA' = \alpha_1$, $\angle A'AC = \alpha_2$, $\angle CBB' = \beta_1$, $\angle B'BA = \beta_2$, $\angle ACC' = \gamma_1$ in $\angle C'CB = \gamma_2$. Nožišča višin skozi $A$, $B$ in $C$ označimo zaporedoma z $A''$, $B''$ in $C''$. Trikotnika $A''AB$ in $C''CB$ sta podobna, saj se ujemata v pravem kotu in kotu pri $B$, zato je $\alpha_1 = \gamma_2$. Po izreku o obodnem kotu je $\alpha_1 = \angle BB'A'$ in $\gamma_2 = \angle C'B'B$. Sledi $\angle BB'A' = \alpha_1 = \gamma_2 = \angle C'B'B$, torej je premica $BB'$ simetrala kota $\angle C'B'A'$ in zato je $\alpha_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}\angle C'B'A' = 30^\circ$. Podobno pokažemo, da je $\beta_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}\angle A'C'B' = 50^\circ$ in $\gamma_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}\angle B'A'C' = 10^\circ$. Sledi $\angle BAC = \alpha_1 + \alpha_2 = 80^\circ$, $\angle CBA = \beta_1 + \beta_2 = 60^\circ$ in $\angle ACB = \gamma_1 + \gamma_2 = 40^\circ$.

**2. način.** Uporabimo enake oznake kot v prvi rešitvi. Po izreku o obodnem kotu je $\alpha_1 + \gamma_2 = \angle BB'A' + \angle C'B'B = \angle C'B'A' = 60^\circ$, torej

$$\alpha_1 + \gamma_2 = 60^\circ. \tag{1}$$

Podobno izpeljemo še

$$\beta_1 + \alpha_2 = 100^\circ, \tag{2}$$
$$\gamma_1 + \beta_2 = 20^\circ. \tag{3}$$

Z upoštevanje, da so premice $AA''$, $BB''$ in $CC''$ pravokotne na stranice trikotnika $ABC$, dobimo

$$\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 = 90^\circ, \tag{4}$$
$$\alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 90^\circ, \tag{5}$$
$$\beta_1 + \gamma_1 + \gamma_2 = 90^\circ, \tag{6}$$
$$\beta_2 + \alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ, \tag{7}$$
$$\gamma_1 + \alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ, \tag{8}$$
$$\gamma_2 + \beta_1 + \beta_2 = 90^\circ. \tag{9}$$
$$\tag{10}$$

Če seštejemo enačbi (1) in (4) ter odštejemo enačbo (9), dobimo $2\alpha_1 = 60^\circ$ oziroma $\alpha_1 = 30^\circ$. Podobno iz (2)+(5)-(6) dobimo $\alpha_2 = 50^\circ$, iz (2)+(6)-(5) dobimo $\beta_1 = 50^\circ$, iz (3)+(7)-(8) dobimo $\beta_2 = 10^\circ$, iz (3)+(8)-(7) dobimo $\gamma_1 = 10^\circ$, in iz (1)+(9)-(4) dobimo $\gamma_2 = 30^\circ$. Sledi $\angle BAC = \alpha_1 + \alpha_2 = 80^\circ$, $\angle CBA = \beta_1 + \beta_2 = 60^\circ$ in $\angle ACB = \gamma_1 + \gamma_2 = 40^\circ$.

Pregledno narisana skica z označenim trikotnikom $ABC$ in točkami $A'$, $B'$ in $C'$ ....... 3 točke
Utemeljena ugotovitev $\alpha_1 = \gamma_2$ ........ 4 točke
Ugotovitev $\alpha_1 = \angle BB'A'$ in $\gamma_2 = \angle C'B'B$ ........ 2 točki
Sklep $\frac{1}{2}\angle C'B'A' = 30^\circ$ ........ 3 točki
Ugotovitev $\beta_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}\angle A'C'B' = 50^\circ$ in $\gamma_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}\angle B'A'C' = 10^\circ$ ........ 5 točk
Izračun $\angle BAC = 80^\circ$, $\angle CBA = 60^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ$ ........ 3 točke.

**2. način.** Pregledno narisana skica z označenim trikotnikom $ABC$ in oglišči $A'$,$B'$ in $C'$ 3 točke
Ugotovitev $\alpha_1 + \gamma_2 = \angle BB'A' + \angle C'B'B$ ........ 2 točki
Izračun $\alpha_1 + \gamma_2 = 60^\circ$ ........ 1 točka
Ugotovitev in izračun $\beta_1 + \alpha_2 = 100^\circ$ ........ 3 točke
Ugotovitev in izračun $\gamma_1 + \beta_2 = 20^\circ$ ........ 2 točki
Zapis enačb $\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 = 90^\circ$ itd. ........ 3 točke
Reševanje sistema enačb ........ 3 točke
Izračun $\angle BAC = 80^\circ$, $\angle CBA = 60^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ$ ........ 3 točke.

# 67. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

## 17. marec 2022

# Naloge za 3. letnik (rešitve)

**1.** Ker je $11n+12 = \frac{11}{3}(3n-5)+\frac{91}{3}$, lahko zapišemo $\frac{11n+12}{3n-5} = \frac{11}{3}+\frac{91}{3}\cdot\frac{1}{3n-5} = \frac{1}{3}(11+\frac{91}{3n-5})$. Torej mora $3n-5$ deliti $91 = 7\cdot 13$ in hkrati mora biti število $11+\frac{91}{3n-5}$ deljivo s 3. Iz prvega pogoja sledi $3n-5 \in \{-91,-13,-7,-1,1,7,13,91\}$. Prve štiri možnosti nam ne dajo celega števila $n$, iz zadnjih štirih možnosti pa dobimo $n \in \{2,4,6,32\}$. Pri vseh teh štirih vrednostih je število $11+\frac{91}{3n-5} \in \{12,18,24,102\}$ deljivo s 3. Rešitve so torej $n \in 2,4,6,32$.

**2. način.** Število $3n-5$ mora deliti $11n+12$, zato mora deliti tudi $(11n+12)-3(3n-5) = 2n+27$ in posledično tudi $3(2n+27)-2(3n-5) = 91 = 7\cdot 13$. Od tod sledi $3n-5 \in \{-91,-13,-7,-1,1,7,13,91\}$, toda le zadnje štiri možnosti nam dajo celo število $n \in \{2,4,6,32\}$. Preizkus pokaže, da vsa ta števila zadoščajo pogoju naloge.

Zapis $\frac{11n+12}{3n-5} = \frac{1}{3}(11+\frac{91}{3n-5})$ .......... 6 točk
Ugotovitev, da $3n-5$ deli 91 in 3 deli $11+\frac{91}{3n-5}$ .......... 4 točke
Sklep $3n-5 \in \{-91,-13,-7,-1,1,7,13,91\}$ .......... 6 točk
Ugotovitev, da za $3n-5 \in \{-91,-13,-7,-1\}$ ne dobimo celega števila .......... 2 točki
Izračun $n \in 2,4,6,32$ .......... 2 točki.
**2. način.** Zapis $11n+12$ kot $3(3n-5)+2n+27$ .......... 6 točk
Ugotovitev $3n-5$ deli $2n+27$ .......... 2 točki
Ugotovitev $3n-5$ deli 91 .......... 2 točki
Sklep $3n-5 \in \{-91,-13,-7,-1,1,7,13,91\}$ .......... 6 točk
Ugotovitev, da za $3n-5 \in \{-91,-13,-7,-1\}$ ne dobimo celega števila .......... 2 točki
Izračun $n \in \{2,4,6,32\}$ .......... 2 točki.

**2.** Da bosta logaritma dobro definirana, mora veljati $4-x>0$ in $x-1>0$, torej $1<x<4$. Ker je $\log_{\frac{1}{2}}(4-x) = \frac{\log_2(4-x)}{\log_2\frac{1}{2}} = -\log_2(4-x)$, je dana neenačba ekvivalentna neenačbi

$$\log_2(x-1)+\log_2(4-x)<0.$$

Z upoštevanjem pravila za vsoto logaritmov dobimo

$$\log_2\big((x-1)(4-x)\big)<0,$$

torej mora biti $(x-1)(4-x)<1$. Levo stran zmnožimo in neenačbo preuredimo do $x^2-5x+5>0$. Ničli kvadratne funkcije na levi strani sta $x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{25-20}}{2} = \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$. Ker je vodilni koeficient pozitiven, so rešitve kvadratne neenačbe $x \in (-\infty,\frac{5-\sqrt{5}}{2})\cup(\frac{5+\sqrt{5}}{2},\infty)$. Z upoštevanjem pogoja $1<x<4$ dobimo končno rešitev $x \in (1,\frac{5-\sqrt{5}}{2})\cup(\frac{5+\sqrt{5}}{2},4)$.

Prehod na novo osnovo .......... 3 točke
Zapis neenakosti $\log_2(x-1)+\log_2(4-x)<0$. .......... 1 točka
Preoblikovanje v $\log_2\big((x-1)(4-x)\big)<0$ .......... 2 točki
Zapis pogoja $(x-1)(4-x)<1$ .......... 4 točke
Preureditev kvadratne neenačbe $x^2-5x+5>0$ .......... 2 točki
Izračun ničel $x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ .......... 2 točki
Zapis rešitve kvadratne neenačbe $x \in (-\infty,\frac{5-\sqrt{5}}{2})\cup(\frac{5+\sqrt{5}}{2},\infty)$ .......... 2 točki
Zapis rešitve neenačbe (upoštevanje nenegativnosti logaritmanda) $x \in (1,\frac{5-\sqrt{5}}{2})\cup(\frac{5+\sqrt{5}}{2},4)$ . 4 točke.

# 67. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

## 17. marec 2022

# Naloge za 4. letnik (rešitve)

**1.** Če polinom $12n^2-1$ delimo s polinomom $n-12$, dobimo rezultat $12n+144$ in ostanek $1727$. Torej je $12n^2-1=(12n+144)(n-12)+1727$ in zato $\frac{12n^2-1}{n-12}=12n+144+\frac{1727}{n-12}$. Slednje bo celo število natanko tedaj, ko $n-12$ deli $1727$. Praštevilski razcep števila $1727$ je enak $1727=11\cdot 157$, torej mora biti $n-12\in\{-1727,-157,-11,-1,1,11,157,1727\}$ oziroma $n\in\{-1715,-145,1,11,13,23,169,1739\}$.
**2. način.** Število $n-12$ mora deliti $12n^2-1$, zato mora deliti tudi $(12n^2-1)-12n(n-12)=144n-1$ in posledično tudi $(144n-1)-144(n-12)=1727=11\cdot 157$. Sledi $n-12\in\{-1727,-157,-11,-1,1,11,157,1727\}$ oziroma $n\in\{-1715,-145,1,11,13,23,169,1739\}$. Preizkus pokaže, da vsa ta števila usterezajo pogoju naloge.

Zapis $\frac{12n^2-1}{n-12}=\frac{12n^2-1}{n-12}=12n+144+\frac{1727}{n-12}$ .......... 8 točk
Ugotovitev $n-12$ deli $1727$ .......... 2 točki
Razcep $1727=11\cdot 157$ .......... 1 točka
Ugotovitev $n-12\in\{-1727,-157,-11,-1,1,11,157,1727\}$ .......... 6 točk
Izračun $n\in\{-1715,-145,1,11,13,23,169,1739\}$ .......... 3 točke.
**2. način.** Ugotovitev $n-12$ mora deliti $12n^2-1$ .......... 1 točka
Sklep $n-12$ mora deliti tudi $(12n^2-1)-12n(n-12)=144n-1$ .......... 5 točk
Sklep $n-12$ mora deliti tudi $(144n-1)-144(n-12)=1727$ .......... 4 točke
Razcep $1727=11\cdot 157$ .......... 1 točka
Ugotovitev $n-12\in\{-1727,-157,-11,-1,1,11,157,1727\}$ .......... 6 točk
Izračun $n\in\{-1715,-145,1,11,13,23,169,1739\}$ .......... 3 točke.

**2.** Od prve enačbe odštejemo drugo in dobimo $2x^2+2y^2-2=0$ oziroma $x^2+y^2=1$, kar predstavlja enotsko krožnico. Če slednje upoštevamo v prvi enačbi $20(x^2+y^2)+ax+by+18=0$, dobimo $ax+by+38=0$, kar predstavlja premico. Sistem bo imel realno rešitev natanko tedaj, ko bo premica $ax+by+38=0$ sekala krožnico $x^2+y^2=1$, torej ko bo ta premica od izhodišča oddaljena $1$ enoto ali manj. Ker je razdalja med izhodiščem in premico enaka $d=\frac{|a\cdot 0+b\cdot 0+38|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{38}{\sqrt{a^2+b^2}}$, je iskani pogoj $\frac{38}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq 1$ oziroma $\sqrt{a^2+b^2}\geq 38$ oziroma $a^2+b^2\geq 38^2$.
**2. način.** Prvo enačbo pomnožimo z $18$ in drugo z $20$, nato pa enačbi odštejemo, da dobimo $-2ax-2bx+18^2-20^2=0$ oziroma $ax+by+38=0$. Od tod izrazimo $ax=-by-38$. Če prvo enačbo pomnožimo z $a^2$ in upoštevamo izpeljano zvezo za $ax$, dobimo

$$20(-by-38)^2+20a^2y^2+a^2(-by-38)+a^2by+18a^2=0.$$

Odpravimo oklepaje

$$20(b^2y^2+2\cdot 38by+38^2)+20a^2y^2-a^2by-38a^2+a^2by+18a^2=0$$

in enačbo poenostavimo do

$$(a^2+b^2)y^2+2\cdot 38by+(38^2-a^2)=0.$$

Obravnavajmo dva primera. Če je $a\neq 0$, potem ima sistem enačb realno rešitev natanko tedaj, ko ima zgornja kvadratna enačba realno rešitev $y$, saj je tedaj tudi $x=\frac{-by-38}{a}$ realno število. Kvadratna enačba ima realno rešitev, če je njena determinanta $D=4\cdot 38^2b^2-4(a^2+b^2)(38^2-a^2)=4a^2(a^2+b^2-38^2)$ pozitivna. Ker je $a\neq 0$, se to zgodi takrat, ko je $a^2+b^2\geq 38^2$. Če pa je $a=0$, iz enačbe $ax + by + 38 = 0$ sledi $by = -38$. Obe enakosti sistema se v tem primeru poenostavita do $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Hkrati je $y = -\frac{38}{b}$ in zato $x^2 = 1 - \frac{38^2}{b^2}$. V tem primeru ima sistem realno rešitev natanko tedaj, ko je $1 - \frac{38^2}{b^2} \geq 0$ oziroma $b^2 \geq 38^2$. Ker pa je $a = 0$, je slednji pogoj prav tako ekvivalenten pogoju $a^2 + b^2 \geq 38^2$.

Iskani pogoj za $a$ in $b$ je torej $a^2 + b^2 \geq 38^2$ oziroma $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 38$.

Odšteti enačbi in zapis enakosti $2x^2 + 2y^2 - 2 = 0$ oz. $x^2 + y^2 = 1$ .................... 3 točke
Upoštevanje $x^2 + y^2 = 1$ in zapis enakost $ax + by + 38 = 0$ .......................... 4 točke
Ugotovitev, da mora premica sekati enotsko krožnico .............................. 3 točke
Sklep, da mora biti razdalja med premico in izhodiščem ena ali manj ................ 1 točka
Izračun $d = \frac{38}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .................................................... 4 točke
Zapis neenakosti $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 38$ .................................................. 3 točke
Izračun $a^2 + b^2 \geq 38^2$ .............................................................. 2 točki.
**2. način.** Zapis enakosti $ax + by + 38 = 0$ ........................................... 4 točke
Zapis enakosti $20(-by - 38)^2 + 20a^2y^2 + a^2(-by - 38) + a^2by + 18a^2 = 0$ ............... 2 točki
Poenostavitev v $(a^2 + b^2)y^2 + 2 \cdot 38by + (38^2 - a^2) = 0$ ................................ 4 točke
Obravnava primera $a \neq 0$: ugotovitev, da je $x$ realno število .......................... 1 točka
Izračun diskriminante ........................................................... 3 točke
Zapis rešitve $a^2 + b^2 \geq 38^2$ .......................................................... 2 točki
Obravnava primera $a = 0$: izračun $by = -38$ ............................................ 1 točka
Izračun $x^2 = 1 - \frac{38^2}{b^2}$ ............................................................. 2 točki
Zapis rešitve $a^2 + b^2 \geq 38^2$ .......................................................... 1 točka.