Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Izbirno tekmovanje iz matematike
6. april 2002

NALOGE ZA 1. LETNIK

1. V pravokotnem trikotniku ABC s pravim kotom pri oglišču C označimo s S razpolovišče stranice AB, z V pa nožišče višine na stranico AB. Koliko merijo koti trikotnika ABC, če merita $|SV| = 1$ in $|SC| = 2$?

2. Poišči vse celoštevilske rešitve enačbe $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

3. Naj bo $a + b = 1$ in $ab \neq 0$. Dokaži, da velja $\dfrac{a}{b^3 - 1} - \dfrac{b}{a^3 - 1} = \dfrac{2(b - a)}{a^2 b^2 + 3}$.

4. Alenka in Barbara naročita pico. Z medsebojno pravokotnima rezoma, ki ne potekata skozi središče pice, jo razdelita na 4 dele. Alenka izbere 1 kos, nato Barbara vzame sosednjega v smeri urnega kazalca, potem vzame naslednji kos v smeri urnega kazalca spet Alenka, zadnji kos pa vzame Barbara. Kateri kos naj najprej izbere Alenka, da bo dobila več pice kot Barbara?

Izbirno tekmovanje iz matematike
6. april 2002

NALOGE ZA 2. LETNIK

1. Koliko celoštevilskih rešitev ima neenačba $|x| + |2y| < 7$?

2. Naj bosta D in E taki točki na katetah AB in BC pravokotnega trikotnika ABC, da je $|AE| = \sqrt{3}$, $|CD| = \sqrt{2}$, $\sphericalangle BAE = 30^\circ$ in $\sphericalangle BDC = 45^\circ$. Presečišče daljic AE in CD označimo s F. Koliko je točka F oddaljena od daljice AB?

3. Poišči 3 zaporedna liha števila a, b in c, za katera je $a^2 + b^2 + c^2$ štirimestno število s samimi med seboj enakimi števkami.

4. Babica je za 9 vnukov spekla torto v obliki kvadra višine 7 cm in z osnovno ploskvijo 36×36 cm. Ob straneh in po vrhu je torto obložila z marcipanom. Kako naj babica razreže torto na 9 delov tako, da bodo vsi vnuki dobili enako torte in enako marcipana?

Izbirno tekmovanje iz matematike
6. april 2002

NALOGE ZA 3. LETNIK

1. Poišči vse take pare naravnih števil m in n, da je $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1) \cdot m + 3 = n^2$.

2. Dana je kocka s celoštevilsko prostornino in kvadrat s celoštevilsko ploščino. Stranica kocke je za 1 daljša od stranice kvadrata. Dokaži, da sta dolžina stranice kocke in dolžina stranice kvadrata celi števili.

3. Naj bodo a, b in c stranice trikotnika Δ ($a \leq c$ in $b \leq c$), $2s$ njegov obseg, p pa ploščina. Dokaži, da je trikotnik Δ pravokoten natanko tedaj, ko velja
$$(s-a)(s-b) = p.$$

4. Alenka in Barbara naročita pico. Izbereta naključno, od središča različno točko P na pici in skoznjo potegneta 3 ravne reze, ki se paroma sekajo pod kotom $60°$ ter razdelijo pico na 6 kosov. Rezi ne potekajo skozi središče pice. Alenka izbere 1 kos, nato Barbara vzame sosednjega v smeri urnega kazalca, potem vzame naslednji kos v smeri urnega kazalca spet Alenka in tako dalje. Kateri kos naj najprej izbere Alenka, da bo dobila več pice kot Barbara?

Izbirno tekmovanje iz matematike
6. april 2002

NALOGE ZA 4. LETNIK

1. Dokaži, da velja

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 + \cdots + 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n \cdot n = 1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1) - 1.$$

2. Poišči vse injektivne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ zadoščajo pogoju

$$f(xy) = f(f(x)\, f(y)).$$

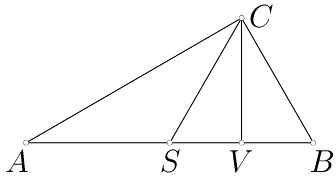
   Funkcija je *injektivna*, če je $f(x) \neq f(y)$ za vse $x \neq y$.

3. Višinsko točko H trikotnika ABC prezrcalimo preko stranic BC, CA in AB ter dobimo točke A', B', C'. Koti trikotnika $A'B'C'$ merijo $40°$, $60°$ in $80°$. Koliko merijo koti trikotnika ABC?

4. Babica je za 5 vnukov spekla torto v obliki prizme višine 7 cm in z osnovno ploskvijo, ki je pravilni šestkotnik s stranico 10 cm. Ob straneh in po vrhu je torto obložila z marcipanom. Kako naj babica razreže torto na 5 delov tako, da bodo vsi vnuki dobili enako torte in enako marcipana?

Rešitve nalog z izbirnega tekmovanja

Vsaka naloga je vredna 7 točk. Pri vrednotenju vsake naloge smiselno upoštevajte priloženi točkovnik. Tekmovalec naj ne prejme več kot 3 točke pri posamezni nalogi, če iz delne rešitve ni razvidna pot do končne rešitve naloge.



I/1. V pravokotnem trikotniku SVC je $|SC| = 2|SV|$, torej je $\sphericalangle VSC = 60°$. Točka S je središče trikotniku ABC očrtane krožnice, torej je trikotnik SBC enakokrak. Ker je $\sphericalangle SBC = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle VSC) = 60°$, je $\sphericalangle BAC = 180° - 60° - 90° = 30°$.

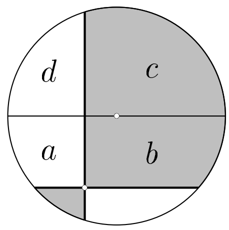
Ugotovitev $\sphericalangle VSC = 60°$: 2 točki. Točka S je središče trikotniku ABC očrtane krožnice: 2 točki. $\triangle SBC$ je enakokrak: 1 točka. $\sphericalangle SBC = 60°$ in $\sphericalangle BAC = 30°$: 1+1 točka.

I/2. Očitno sta x in y različna od 0, zato lahko enačbo preoblikujemo v $\frac{1}{y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-2}{2x}$, od koder sledi $y = \frac{2x}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2}$. Število $x-2$ deli 4 natanko tedaj, ko je $x - 2 \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$ oziroma $x \in \{-2, 0, 1, 3, 4, 6\}$. Rešitve so torej pari $(-2, 1)$, $(1, -2)$, $(3, 6)$, $(4, 4)$ in $(6, 3)$.

Eksplicitno je izražen x (ali y): 2 točki. Pogoj, da $x - 2$ deli 4: 2 točki. Vse rešitve: 3 točke. Če tekmovalec nekaj rešitev samo navede in ne dokaže, da ni drugih, priznajte 1 točko za 1 ali 2 rešitvi, 2 točki za 3, 4 ali 5 rešitev in 3 točke za vseh 6 rešitev.

I/3. Ker je $a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1)$, je $\frac{b}{a^3-1} = -\frac{1}{a^2+a+1}$ in podobno $\frac{a}{b^3-1} = -\frac{1}{b^2+b+1}$. Torej je $\frac{a}{b^3-1} - \frac{b}{a^3-1} = \frac{b^2+b-a^2-a}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)} = \frac{(b-a)(b+a+1)}{a^2b^2+a^2b+b^2a+a^2+b^2+ab+a+b+1}$, kar nam z upoštevanjem $a^2b^2+a^2b+b^2a+a^2+b^2+ab+a+b+1 = a^2b^2+ab(a+b)+((a+b)^2-2ab)+ab+a+b+1 = a^2b^2+3$ da želeni rezultat $\frac{a}{b^3-1} - \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$.

Enakost lahko dokažemo na mnogo različnih načinov. Če je tekmovalec samo odpravil ulomke, ni pa dokazal enakosti dobljenih izrazov, priznajte največ 2 točki oziroma največ 3 točke, če je pri tem uporabil zvezo $a + b = 1$.



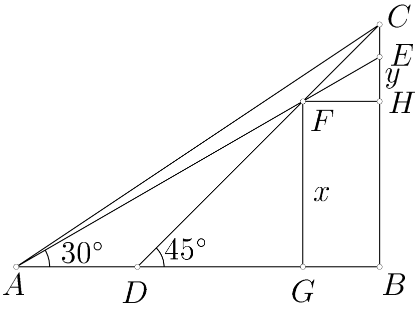
I/4. Potegnimo k enemu od rezov vzporednico, ki poteka skozi središče pice. Pica sedaj razpade na 6 kosov. Označimo ploščine 4 izmed njih z a, b, c in d, kot kaže slika. Vodoravni rez, ki poteka skozi središče pice, razdeli pico na 2 ploščinsko enaka kosa. Ploščina osenčenega dela meri $b+c+d-a$, ploščina neosenčenega dela pa $d+a+c-b$. Dokažimo, da je $b+c+d-a > d+a+c-b$ oziroma $b-a > a-b$. Slednje pa očitno drži, saj je $b > a$. Alenka naj torej najprej izbere kos, ki vsebuje središče pice.

Vpeljava novega reza: 3 točke. Račun s ploščinami: 4 točke. Če tekmovalec samo domneva, da Alenka dobi več, tega pa ne dokaže: 2 točki.

II/1. Če je $y = 0$, potem je x lahko $0, \pm 1, \ldots, \pm 6$. Skupaj je v tem primeru $1 + 2 \cdot 6 = 13$ rešitev. Če je $y = \pm 1$, potem je x lahko $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, skupaj je v tem primeru $2 \cdot (1 + 2 \cdot 4) = 18$ rešitev. Če je $y = \pm 2$, je x lahko $0, \pm 1, \pm 2$, skupaj je $2 \cdot (1 + 2 \cdot 2) = 10$ rešitev. Če pa je $y = \pm 3$, je $x = 0$, skupaj sta 2 rešitvi. Vseh možnih rešitev je torej $13 + 18 + 10 + 2 = 43$.

Vse navedene rešitve pri $y = 0, \pm 1, \pm 2$: 2+2+2 točki. Vse rešitve pri $y = \pm 3$: 1 točka. Za natančno narisano grafično rešitev priznajte vseh 7 točk.

II/2. Označimo z G pravokotno projekcijo točke F na stranico AB in s H pravokotno projekcijo točke F na stranico BC. Označimo še $x = |FG|$ in $y = |HE|$. Ker je $\sphericalangle HFE = 30°$, je $|FH| = |EH|\sqrt{3} = y\sqrt{3}$. Ker je $|AE| = \sqrt{3}$ in $\sphericalangle HFE = 30°$, je $|BE| = x + y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ker je $\sphericalangle BDC = 45°$ in $|DC| = \sqrt{2}$, je $|DB| = |DG| + |GB| = 1$. Torej je $x + y\sqrt{3} = 1$. Ko iz enačbe $x + y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ izrazimo y in ga vstavimo v $x + y\sqrt{3} = 1$, lahko izpeljemo $x = \frac{1}{2(\sqrt{3}-1)}$.

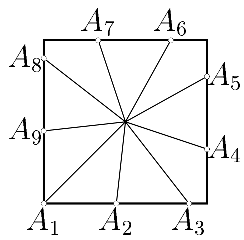


Vpeljava 2 odvisnih algebraičnih količin (denimo x in y): 1 točka. Zapisani neodvisni enačbi $x + y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ in $x + y\sqrt{3} = 1$ (ali ekvivalentni, pri katerih upoštevamo podatke $|AE| = \sqrt{3}$, $|CD| = \sqrt{2}$, $\sphericalangle BAE = 30°$ in $\sphericalangle BDC = 45°$): 2+2 točki. Sklep $x = \frac{1}{2(\sqrt{3}-1)}$: 2 točki.

II/3. Naj bo $a = 2n - 1$, $b = 2n + 1$ in $c = 2n + 3$. Vsota kvadratov teh števil je $(2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 = 12n^2 + 12n + 11 = 12n(n+1) + 11$ in je enaka štirimestnemu številu s samimi med seboj enakimi števkami, torej je lahko enaka 1111, 2222 ... 8888 ali 9999. Če od vsote odštejemo 11, dobimo število, ki je deljivo z 12. Zato izmed števil 1100, 2211, 3322, 4433, 5544, 6655, 7766, 8877 in 9988 izločimo vsa tista, ki niso deljiva s 3 ali s 4. Ostane le število 5544, ki ga zapišemo kot zmnožek $12 \cdot 462 = 12 \cdot 21 \cdot 22$. Tako je $5555 = (2 \cdot 21 - 1)^2 + (2 \cdot 21 + 1)^2 + (2 \cdot 21 + 3)^2 = 41^2 + 43^2 + 45^2$.

Zaporedna liha števila so izražena z enim parametrom (denimo n): 2 točki. Vsota kvadratov je izražena z istim parametrom (denimo $\sum = 12n(n+1)+11$): 2 točki. Analiza primerov, ki privede do rešitve: 3 točke. Če so števila $41, 43, 45$ le navedena: 2 točki.

II/4. Naj bodo $A_1, \ldots, A_9$ točke na obodu osnovne ploskve, ki razdelijo obod na 9 enako dolgih odsekov. Ker rezi potekajo iz sredine torte, imajo vsi dobljeni liki enako ploščino (in zato imajo ustrezni kosi torte enako prostornino). Vsak odsek je torej dolg $\frac{4 \cdot 36}{9} = 16$ cm. Babica naj zareže devetkrat iz središča osnovne ploskve do točk $A_1, \ldots, A_9$. Dobljeni kosi imajo enako prostornino, enaka pa je tudi površina, obložena z marcipanom.



Naloga ima mnogo rešitev. Za katerokoli pravilno rešitev priznajte 7 točk. Če tekmovalec naloge ni rešil v celoti, priznajte 4 točke za natančno opisane reze, 1 točko za utemeljitev, da so prostornine kosov enake, in 2 točki za utemeljitev, da so površine, obložene z marcipanom, enake.

III/1. Če je $m \geq 4$, da število $1 \cdot 2 \cdots m + 3$ ostanek 3 pri deljenju s 4, kvadrat naravnega števila pa ima lahko ostanek le 0 ali 1. Torej mora biti $m \leq 3$, kar nam da edini rešitvi $m = 1$ in $n = 2$ ter $m = 3$ in $n = 3$.

Vsaka rešitev: 1+1 točka. Utemeljitev, da za $m > 3$ nimamo rešitev: 5 točk.

III/2. Naj bo a dolžina stranice kocke in b dolžina stranice kvadrata. Naloga pravi, da je $a = b + 1$ ter $a^3 \in \mathbb{Z}$ in $b^2 \in \mathbb{Z}$. Ker sta $(b+1)^3 = b^3 + 3b^2 + 3b + 1$ in b^2 celi števili, mora biti $b^3 + 3b = b(b^2+3) = m$ celo število. Ker je tudi število $b^2 + 3$ celo, je zato $b = \frac{m}{b^2+3}$ racionalno število. Ker je kvadrat tega racionalnega števila enak $b^2 \in \mathbb{Z}$, mora biti tudi b celo število. Torej je tudi $a = b + 1$ celo število.

Zapis podatkov naloge z odvisnima količinama a in b, enačba $a = b+1$, pogoja $a^3, b^2 \in \mathbb{Z}$: 1 točka. Prevedba pogojev na en parameter (denimo $b^3 + 3b^2 + 3b + 1, b^2 \in \mathbb{Z}$): 2 točki. Ugotovitev $b \in \mathbb{Q}$: 2 točki. Sklep, da iz $b \in \mathbb{Q}$ in $b^2 \in \mathbb{Z}$ sledi $b \in \mathbb{Z}$: 2 točki.

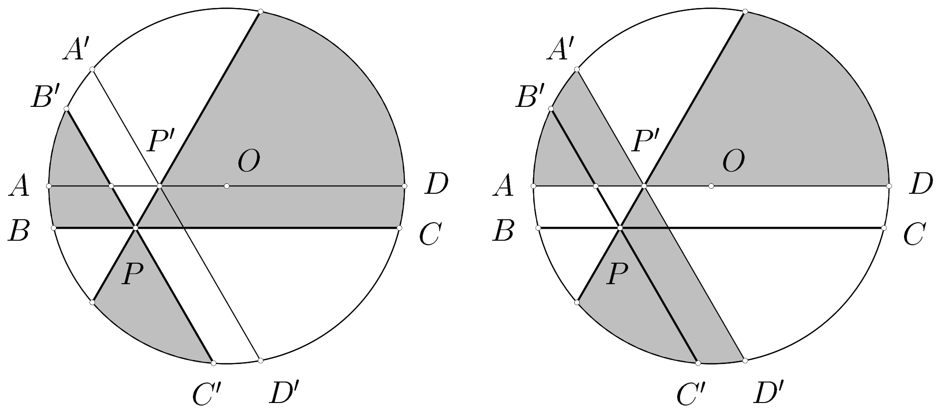
III/3. Računajmo: $(s-a)(s-b) = \frac{1}{4}(b+c-a)(a+c-b) = \frac{1}{4}(c^2-(a-b)^2) = \frac{1}{4}(c^2-a^2-b^2+2ab) = \frac{1}{2}(ab-ab\cos\gamma)$, kjer smo po kosinusnem izreku upoštevali, da je $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$. Po drugi strani pa je $p = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, zato velja $(s-a)(s-b) = p$ natanko tedaj, ko je $1-\cos\gamma = \sin\gamma$.

Če je trikotnik pravokoten, je $\gamma = \frac{\pi}{2}$, saj je c njegova najdaljša stranica. V tem primeru enakost $1-\cos\gamma = \sin\gamma$ drži.

Za dokaz v drugo smer pa rešimo enačbo $1-\cos\gamma = \sin\gamma$. Ker je $\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma}$, imamo $1-\cos\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma}$ oziroma $1-2\cos\gamma+\cos^2\gamma = 1-\cos^2\gamma$. Ker je $\gamma \in (0,\pi)$, je $\gamma = \pi/2$ edina rešitev te enačbe.

Prevedba pogoja $(s-a)(s-b) = p$ na ekvivalentni pogoj $1-\cos\gamma = \sin\gamma$: 3 točke. Ugotovitev, da v pravokotnem trikotniku pri pogoju $a,b < c$ velja $\gamma = \pi/2$: 1 točka. Za $\gamma = \pi/2$ enačba $1-\cos\gamma = \sin\gamma$ drži: 1 točka. Dokaz v drugo smer: 2 točki. Če tekmovalec dokaže le, da za pravokotni trikotnik s kotom $\gamma = \pi/2$ velja $(s-a)(s-b) = p$: 3 točke.

III/4. Alenka naj najprej izbere kos, ki vsebuje središče pice. Pokazati moramo, da je ploščina osenčenega dela večja od ploščine neosenčenega dela. Pico postavimo v koordinatni sistem tako, da je njeno središče točka $O(0,0)$. Brez škode za splošnost smemo privzeti, da je 1 rez vzporeden osi x. Naj bo P' presečišče osi x z rezom pod kotom $60°$.



Pasova $ABCD$ in $A'B'C'D'$ imata enaki širini. Ker je $|AD| > |A'D'|$, je ploščina pasu $ABCD$ večja od ploščine pasu $A'B'C'D'$. Če od ploščine osenčenega dela odštejemo ploščino pasu $ABCD$, prištejemo pa ploščino pasu $A'B'C'D'$, je novi osenečeni del ploščinsko ravno enak polovici ploščine pice. Ker se je pri tem ploščina osenčenega dela lahko le zmanjšala, je bila pred tem večja od ploščine neosenčenega dela.

Vpeljava novih rezov: 3 točke. Račun s ploščinami: 4 točke. Če tekmovalec samo domneva, da Alenka dobi več, tega pa ne dokaže: 2 točki.

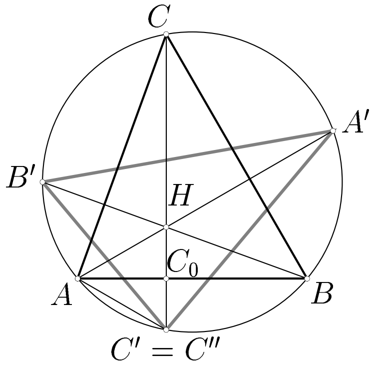
IV/1. Enakost dokažemo z indukcijo. Za $n = 1$ enakost velja. Denimo, da velja za neko naravno število n. Potem je po indukcijski predpostavki $\Big(1\cdot 1+1\cdot 2\cdot 2+\cdots+1\cdot 2\cdots n\cdot n\Big)+1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1)\cdot(n+1) = 1\cdot 2\cdots(n+1)-1+1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1)\cdot(n+1) = 1\cdot 2\cdots(n+1)(n+2)-1$, torej enakost velja tudi za $n+1$. Po indukciji sledi, da enakost velja za vsako naravno število.

Dokaz z indukcijo: baza indukcije: 1 točka, indukcijski korak: 6 točk. Če tekmovalec ne zapiše eksplicitno, da gre za dokaz z indukcijo, priznajte največ 4 točke.

IV/2. Vstavimo $y = 1$ in dobimo $f(x) = f(f(1)\cdot f(x))$. Iz injektivnosti sledi $x = f(1)\cdot f(x)$. Ker to velja za vsak $x \in \mathbb{R}$, vidimo, da mora biti $f(1) \neq 0$, od koder sledi $f(x) = x/f(1)$. Če zdaj vstavimo še $x = 1$, dobimo za $f(1)$ enačbo $f(1)^2 - 1 = 0$, torej je $f(1) = 1$ ali $f(1) = -1$. Edini možni rešitvi sta funkciji $f_1(x) = x$ in $f_2(x) = -x$. Zlahka preverimo, da obe zadoščata dani enačbi.

Enakost $xy = f(x)f(y)$ ali posebni primer $x = f(1)\cdot f(x)$ z uporabo injektivnosti: 2 točki. Ugotovitev $f(1) \neq 0$: 1 točka. Izpeljava rešitev $f_1(x) = x$ in $f_2(x) = -x$: 2 točki. Preverjanje ustreznosti rešitev: 1+1 točka. Če tekmovalec funkciji le ugane in ne dokaže, da sta edini: 1 točka za vsako pravilno funkcijo.

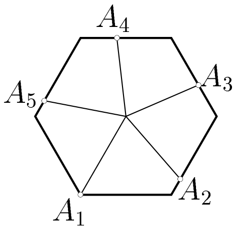
IV/3. Dokažimo najprej, da ležijo točke A', B' in C' na očrtani krožnici trikotnika ABC. Označimo s C_0 in C'' presečišče premice CH s premico AB in tistim krožnim lokom $\widehat{AB}$ trikotniku ABC očrtane krožnice, na katerem ni točke C. Tedaj je $\sphericalangle C''AB = \sphericalangle C''CB = \sphericalangle BAH$, saj je $AH \perp BC$ in $CH \perp AB$. Torej sta pravokotna trikotnika $C''AC_0$ in HAC_0 skladna in je po konstrukciji $C'' = C'$.



Naj bo $\sphericalangle BAC = \alpha$. Tedaj je $\sphericalangle B'A'A = \sphericalangle B'BA = 90^\circ - \alpha$ in $\sphericalangle AA'C' = \sphericalangle ACC' = 90^\circ - \alpha$. Torej je $\sphericalangle B'A'C' = 180^\circ - 2\alpha = 40^\circ$, kar nam da $\alpha = 70^\circ$. Podobno iz $\sphericalangle C'B'A' = 180^\circ - 2\beta = 60^\circ$ izrazimo $\beta = 60^\circ$, iz $\sphericalangle A'C'B' = 180^\circ - 2\gamma = 80^\circ$ pa izrazimo $\gamma = 50^\circ$.

Eksplicitna formulacija trditve, da točke A', B' in C' ležijo na očrtani krožnici: 3 točke. (Dokaza ni potrebno navesti, ker je to za mnoge tekmovalce znan izrek.) Sklep, da iz $\sphericalangle BAC = \alpha$ sledi $\sphericalangle AA'C' = 90^\circ - \alpha$: 1 točka. Izračunane rešitve $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 50^\circ$: 1+1+1 točka.
Opozorilo! Če tekmovalec le nariše skico, na kateri ležijo točke A', B' in C' na očrtani krožnici, in ne uvidi, da je potrebno to dokazati (ali pa eksplicitno ne zapiše, da je to znano dejstvo), priznajte največ 3 točke.

IV/4. Naj bodo $A_1, \ldots, A_5$ točke na obodu osnovne ploskve, ki razdelijo obod na 5 enako dolgih odsekov. Vsak odsek je torej dolg $\frac{6\cdot 10}{5} = 12$ cm. Babica naj zareže petkrat iz središča osnovne ploskve do točk $A_1, \ldots, A_5$. Dobljeni kosi imajo enako prostornino, enaka pa je tudi površina, obložena z marcipanom.



Naloga ima mnogo rešitev. Za katerokoli pravilno rešitev priznajte 7 točk. Če tekmovalec naloge ni rešil v celoti, priznajte 4 točke za natančno opisane reze, 1 točko za utemeljitev, da so prostornine kosov enake, in 2 točki za utemeljitev, da so površine, obložene z marcipanom, enake.