Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Izbirno tekmovanje
28. marec 2003

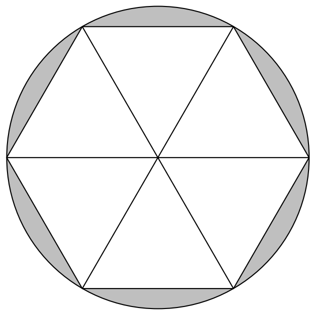
Naloge za 1. letnik

1. Poišči vsa naravna števila, za katera velja: če številu prištejemo vsoto njegovih števk, dobimo 313.

2. Naj bo M razpolovišče stranice BC in N razpolovišče stranice CD pravokotnika $ABCD$. Določi razmerje dolžin stranic pravokotnika $ABCD$, če je AMN pravokotni trikotnik s hipotenuzo AM.

3. Naj bo $a^2 + c^2 = 2b^2$ za pozitivna števila a, b in c. Dokaži, da velja
$$\frac{2}{a+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}.$$

4. Babica je razrezala okroglo pico na 6 enakostraničnih trikotnikov in 6 krožnih odsekov, kot prikazuje slika. Vsak izmed 6 vnukov je pojedel 1 trikotnik. Ker vnuki ne marajo robov, je krožne odseke pice pojedel pes Muri. Kdo je pojedel več pice, 1 vnuk ali Muri?
(Uporabiti smeš, da je $\frac{31}{10} < \pi < \frac{22}{7}$.)



5. Naj bosta a in b naravni števili, večji od 1, za kateri velja $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b$. Katera je najmanjša možna vrednost vsote $a + b$?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

Naloge za 2. letnik

1. Naj bo $a + b + c = 0$. Dokaži, da velja $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

2. V paralelogramu $ABCD$ označimo zaporedoma z A_1, B_1 in D_1 razpolovišča stranic BC, CD in AB. Daljici DD_1 in BB_1 sekata AA_1 v točkah M in N. Dokaži, da je $|MN| = \frac{2}{5}|AA_1|$.

3. Dan je trapez z osnovnicama AB in CD, ki merita zaporedoma 5 cm in 1 cm. Naj bosta M in N takšni točki na AD in BC, da je daljica MN vzporedna z osnovnico AB, ploščina štirikotnika $ABNM$ pa je dvakrat večja od ploščine štirikotnika $CDMN$. Koliko centimetrov meri daljica MN?

4. Barbara je na predzadnjem testu v šolskem letu dosegla 98 točk in tako zvišala povprečje do takrat doseženih točk za 1 točko. Na zadnjem testu je dosegla 70 točk in znižala novo povprečje za 2 točki. Koliko testov je pisala v celem šolskem letu?

5. Kolikšen ostanek dobimo, ko število 2002^{2001} delimo z 2003? Odgovor utemelji.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

Matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Izbirno tekmovanje
28. marec 2003

Naloge za 3. letnik

1. Za pozitivni realni števili x in y velja
$$2\log(x-2y)=\log x+\log y.$$
Koliko je $\dfrac{x}{y}$?

2. Naj bosta p in q taki praštevili, da sta tudi $p+q$ in $p-q$ praštevili. Dokaži, da je p^2-q praštevilo.

3. Naj bo D razpolovišče tistega loka $\widehat{AB}$ trikotniku ABC očrtane krožnice, na katerem ne leži točka C. Izrazi dolžino daljice AD z dolžinami $a=|BC|$, $b=|AC|$ in $c=|AB|$.

4. Na 1 polje tabele velikosti 5×5 smo postavili žeton, ostala polja pa smo brez prekrivanja pokrili z dominami velikosti 3×1.
Določi vse možne položaje žetona.

5. Poišči vsa realna števila x in y, ki zadoščajo enačbi
$$(x+y)^2=(x+3)(y-3).$$

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

Matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Izbirno tekmovanje
28. marec 2003

Naloge za 4. letnik

1. Dokaži, da je
$$\frac{1}{\log_2 2003}+\frac{1}{\log_3 2003}+\cdots+\frac{1}{\log_{100} 2003}=\frac{1}{\log_{100!} 2003},$$
kjer je $100! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots 99\cdot 100$.

2. Dan je paralelogram $ABCD$, v katerem je stranica AB daljša od stranice AD. Na premici AB naj bo X takšna točka, ki ne leži med A in B, da je $|AD|=|BX|$. Simetrala kota $\sphericalangle BAD$ seka premici CD in BC v točkah E in F. Dokaži, da je $|EX|=|FX|$.

3. Poišči vsa taka naravna števila n, da dobimo pri deljenju števila 2003 z n ostanek 7.

4. Poišči vse možnosti, kako lahko število 2003 zapišemo kot vsoto vsaj 2 zaporednih naravnih števil.

5. Poišči vse rešitve sistema enačb
$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 25 \quad \text{in} \\ x+y+xy &= 19. \end{aligned}$$

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

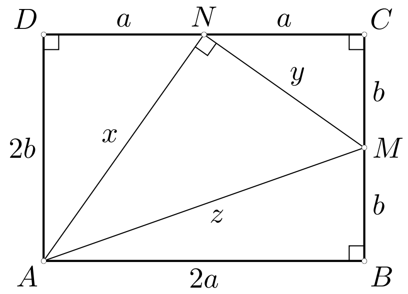
Rešitve nalog z izbirnega tekmovanja

Vsaka naloga je vredna 7 točk. Pri vrednotenju smiselno upoštevajte priloženi točkovnik. Tekmovalec naj ne prejme več kot 3 točke pri posamezni nalogi, če iz delne rešitve ni razvidna pot do končne rešitve naloge.

I/1. Iskana števila so trimestna. Pišimo: $n = 100a+10b+c$. Tedaj velja $100a+10b+c+a+b+c = 313$ oziroma $101a + 11b + 2c = 313$. Premisliti moramo o 2 možnih vrednostih števke a, in sicer 2 in 3.
Izberimo najprej $a = 2$. Tedaj je $11b + 2c = 111$, kar je možno le, če izberemo $b = 9$ in $c = 6$. Eno od iskanih števil je 296.
Poglejmo še možnost $a = 3$. Tedaj je $11b+2c = 10$, kar pomeni, da je $b = 0$ in $c = 5$. Drugo število s to lastnostjo je 305.

Števila so trimestna: 2 točki. Zapisana enačba $100a + 10b + c + a + b + c = 313$ (ali njej ekvivalentna $101a+11b+2c = 313$): 1 točka. Analiza primera $a = 2$: 1 točka. Iskano število je 296: 1 točka. Analiza primera $a = 3$: 1 točka. Iskano število je 305: 1 točka.
Če tekmovalec navede obe rešitvi in ne dokaže, da sta edini: 1+1 točka. Če tekmovalec sistematično preverja različne možnosti in preveri VSE možnosti: 7 točk. Če tekmovalec ne preveri vseh možnosti: po 1 točka za vsako pravilno rešitev.

I/2. 1. način Pišimo $|AB| = 2a$ in $|BC| = 2b$. Ker je kot $\sphericalangle ANM = \frac{\pi}{2}$ pravi, je $\sphericalangle DNA + \sphericalangle MNC = \frac{\pi}{2}$. Sledi $\sphericalangle CMN = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle NMC = \sphericalangle DNA$. Torej sta si pravokotna trikotnika AND in NMC podobna, od koder sledi $|AD| : |DN| = |NC| : |CM|$ oziroma $\frac{2b}{a} = \frac{a}{b}$. Sledi $a^2 = 2b^2$ in $a : b = \sqrt{2} : 1$.
2. način Označimo še $|AN| = x$, $|NM| = y$, $|AM| = z$. Po Pitagorovem izreku je



$$x^2 = a^2 + 4\,b^2,\ y^2 = a^2 + b^2,\ z^2 = 4\,a^2 + b^2 \ \text{ in } z^2 = x^2 + y^2.$$

Če izraza za x^2 in y^2 iz prve in druge enačbe upoštevamo v četrti, dobimo $z^2 = 2a^2 + 5b^2$. Nato izenačimo desni strani tretje in dobljene enačbe. Poenostavimo in dobimo $a^2 = 2b^2$, torej je $a : b = \sqrt{2} : 1$.

1. način Trikotnika AND in NMC sta podobna (račun s koti): 3 točke; brez dokaza s koti: 1 točka. Razmerje $|AD| : |DN| = |NC| : |CM|$ (ali podobno), ki sledi iz podobnosti: 2 točki. Sklep $a : b = \sqrt{2} : 1$ (ali ekvivalenten razultat v obliki razmerja $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, $\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$): 2 točki; zapis v obliki $a = b\sqrt{2}$: 1 točka (naloga namreč sprašuje po razmerju).
2. način Vsak pravilno zapisan Pitagorov izrek: 1 točka (skupaj 4 točke). Implicitna zveza med a in b: 2 točki. Izračunano razmerje $a : b = \sqrt{2} : 1$ (ali ekvivalenten odgovor v obliki RAZMERJA): 1 točka.

I/3. Iz $2b^2 = a^2 + c^2$ sledi $2b^2+2ab+2bc+2ac = a^2+c^2+2ab+2bc+2ac$, kar lahko razstavimo v $2(a+b)(b+c) = (a+c)^2 + 2b(a+c) = (a+c)(a+2b+c)$. Torej je $\frac{2}{a+c} = \frac{a+b+b+c}{(a+b)(b+c)} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}$, kot je bilo potrebno dokazati.

Če tekmovalec iz dane enakosti $2b^2 = a^2 + c^2$ izpelje želen rezultat: 7 točk. Če tekmovalec izhaja iz želene enakosti $\frac{2}{a+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}$ in s preoblikovanjem izpelje $2b^2 = a^2 + c^2$: 5 točk.

Če EKSPLICITNO ZAPIŠE, da so bile v dokazu zapisane same ekvivalence in lahko zato preberemo dokaz v drugo smer: 2 točki.

I/4. Denimo, da ima pica polmer r. Enakostranični trikotnik ima ploščino $r^2\frac{\sqrt{3}}{4}$, krožni odsek pa $\frac{1}{6}\pi r^2 - r^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Muri je pojedel vseh 6 krožnih odsekov, skupaj torej $r^2(\pi - 3\frac{\sqrt{3}}{2})$. Torej je treba primerjati $\frac{\sqrt{3}}{4}$ in $\pi - 3\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dokažimo, da je Muri pojedel več, ker je $\pi - 3\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{3}}{4}$, oziroma $\pi > \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\frac{\sqrt{3}}{2} = 7\frac{\sqrt{3}}{4}$. Res, če uporabimo spodnji približek $\frac{31}{10}$ za π, vidimo da velja $\pi^2 > \frac{961}{100} > \frac{49\cdot 3}{16}$, saj je $961 \cdot 16 = 15376 > 14700 = 100 \cdot 49 \cdot 3$, torej $\pi^2 > (\frac{7\sqrt{3}}{4})^2$.

Izračunana ploščina 1 kosa pice: 2 točki. Izračunana ploščina osenčenega dela: 2 točki (od tega 1 točka za ploščino krožnega odseka). Pravilno in BREZ RAČUNALA utemeljena ocena $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{3}}{4}$ (ali $\pi > \frac{7\sqrt{3}}{4}$): 3 točke.
Pri vrednotenju je treba paziti, da tekmovalec uporabi SPODNJI približek za π. Ocena $\pi > 3$ ni dovolj natančna in z njeno pomočjo naloge NE MOREMO pravilno rešiti. (Velja namreč $\frac{7\sqrt{3}}{4} > 3$, kar je ekvivalentno z $147 = 7^2 \cdot 3 > 3^2 \cdot 4^2 = 144$.)

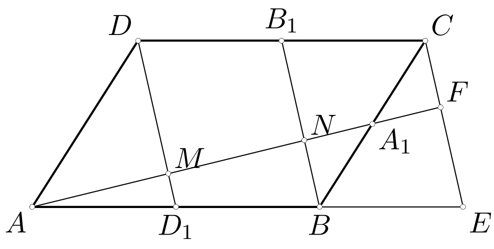
I/5. Iz $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b$ po vrsti dobimo $a\sqrt{a\sqrt{a}} = b^2$, $a^3\sqrt{a} = b^4$ in $a^7 = b^8$. To pomeni, da je število a 8. potenca, število b pa 7. potenca naravnega števila, večjega od 1. Ker iščemo najmanjšo možno vsoto števil a in b, vzamemo $a = 2^8$ in $b = 2^7$. Tedaj je $a + b = 256 + 128 = 384$.

Preoblikovanje v $a^7 = b^8$: 2 točki. Sklep, da je a 8. potenca, število b pa 7. potenca naravnega števila: 2 točki. Sklep, da je $a = 2^8$ in $b = 2^7$ zaradi minimalnosti: 2 točki. Odgovor $a + b = 384$: 1 točka.

II/1. <u>1. način</u> Ker je $c = -a - b$, velja $a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a+b)^3 = -3a^2b - 3ab^2 = -3ab(a+b) = 3abc$.
<u>2. način</u> Najprej se spomnimo, da velja $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$. Torej je $0 = (a+b+c)^3 = (a+b)^3 + c^3 + 3(a+b)c(a+b+c) = (a+b)^3 + c^3$, saj je $a+b+c = 0$. Če upoštevamo še $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = a^3 + b^3 + 3ab(-c)$, dobimo želeno enakost $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

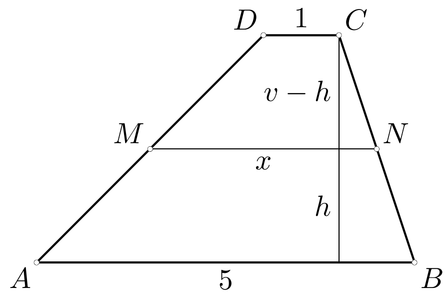
<u>1. način</u> Če tekmovalec izraz $a^3 + b^3 + c^3$ z upoštevanjem $a + b + c = 0$ preoblikuje v $3abc$ (ali nasprotna smer): 7 točk.
Če tekmovalec izhaja iz želene enakosti $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ in z upoštevanjem $a + b + c = 0$ izpelje neko identiteto: 4 točke. OPOZORILO: Naloga s tem sploh ni rešena. Tekmovalec se mora na tem mestu zavedati, da je uporabil še nedokazano trditev in je iz nje izpeljal veljavno trditev. Dodatne 3 točke priznajte, če tekmovalec prepričljivo utemelji, da lahko uporabljen dokaz prebere v drugo smer.
<u>2. način</u> Če tekmovalec iz znane enakosti $0 = a + b + c$ izpelje želen rezultat: 7 točk.

II/2. Ker sta daljici DD_1 in BB_1 vzporedni in je $|AD_1| = |D_1B|$, je $|AM| = |MN|$. Narišimo še vzporednico k B_1B skozi C in označimo njeno presečišče s premico AB z E. Naj bo F presečišče premice AA_1 s premico CE. Potem je $|BE| = |D_1B| = |AD_1|$, zato je $|NF| = |MN| = |AM|$. Trikotnika BA_1N in CA_1F sta skladna, zato je $|A_1N| = |A_1F|$. Torej je $|A_1N| = \frac{1}{2}|MN|$ in $|AA_1| = \frac{5}{2}|MN|$, od koder dobimo $|MN| = \frac{2}{5}|AA_1|$.



Utemeljitev $|AM| = |MN|$: 2 točki. Vpeljava $CE \parallel BB_1$: 2 točki. Sklep $|NF| = |AM|$ (ali $|NF| = |MN|$): 1 točka. Točka A_1 je razpolovišče NF: 1 točka. Izpopolnitev dokaza in sklep $|MN| = \frac{2}{5}|AA_1|$: 1 točka.

II/3. Označimo dolžino MN z x, višino trapeza $ABCD$ z v in višino trapeza $ABNM$ s h. Potem je $S_{ABNM} = \frac{(x+5)}{2} \cdot h$ in $S_{CDMN} = \frac{x+1}{2} \cdot (v-h)$. Ker velja $S_{ABNM} = 2S_{CDMN}$ in $S_{ABNM} + S_{CDMN} = S_{ABCD}$, dobimo enačbi



$$\begin{aligned}\frac{(x+5)}{2} \cdot h &= 2\frac{x+1}{2} \cdot (v-h),\\ \frac{(x+5)}{2} \cdot h + \frac{x+1}{2} \cdot (v-h) &= \frac{1+5}{2} v.\end{aligned}$$

Iz prve izrazimo $h = \frac{x+1}{3x+7} \cdot 2v$ in vstavimo v drugo. Dobljeno enačbo lahko delimo z v in krajši račun pokaže, da je $x^2 = 9$ oziroma $x = 3$. Torej daljica MN meri 3 cm.

Če tekmovalec izrazi S_{ABNM} in S_{CDMN} z x, v in h (ali drugimi odvisnimi količinami): 1+1 točka. Če tekmovalec izrazi pogoja $S_{ABNM} = 2S_{CDMN}$ in $S_{ABNM} + S_{CDMN} = S_{ABCD}$ z x, v in h: 1+1 točka. Rešitev $x = 3$: 3 točke.

II/4. Denimo, da je Barbara pred zadnjima 2 testoma pisala n testov in je imela povprečje m točk. Tedaj velja

$$\frac{n \cdot m + 98}{n+1} = m + 1 \tag{1}$$

in

$$\frac{n \cdot m + 98 + 70}{n+2} = m + 1 - 2 = m - 1. \tag{2}$$

Iz prve enačbe dobimo $n \cdot m + 98 = n \cdot m + n + m + 1$ oziroma $m + n = 97$, iz druge pa $n \cdot m + 168 = n \cdot m - n + 2m - 2$ oziroma $2m - n = 170$. Tako pridemo do $3m = 267$ oziroma $m = 89$ ter $n = 8$. To pomeni, da je Barbara v celem šolskem letu pisala 10 testov.

Zapisani enačbi (1) in (2) (ali ekvivalentni) glede na besedilo naloge: 2+2 točki. Rešitev sistema: 3 točke.

II/5. <u>1. način</u> Če dá število a ostanek 2002 pri deljenju z 2003, potem je $a = 2003 \cdot a' + 2002$ za neko celo število a'. Zmnožek $2002 \cdot a$ dá ostanek 1 pri deljenju z 2003, ker je

$$2002 \cdot a = 2003 \cdot 2002 \cdot a' + 2002^2 = 2003 \cdot (2002 \cdot a' + 2001) + 1.$$

Če dá število b ostanek 1 pri deljenju z 2003, potem je $b = 2003 \cdot b' + 1$ za neko celo število b'. Zmnožek $2002 \cdot b$ dá ostanek 2002 pri deljenju z 2003, ker je

$$2002 \cdot b = 2003 \cdot 2002 \cdot b' + 2002.$$

Od tod sklepamo, da potence števila 2002 izmenično dajo ostanka 2002 in 1 pri deljenju z 2003. Potenca 2002^{2001} ima lih eksponent, zato dá ostanek 2002 pri deljenju z 2003.
<u>2. način</u> Pišimo $a = 2003$. Ko razstavimo $(a-1)^{2001}$, so deljivi z a vsi členi razen $(-1)^{2001} = -1$. Ta člen ima ostanek 2002 pri deljenju z 2003. Torej je ostanek 2002.
<u>3. način</u> Gornji sklep lahko zapišemo s kongruencami: iz $2002 \equiv -1 \pmod{2003}$, sledi $2002^{2001} \equiv (-1)^{2001} \equiv -1 \equiv 2002 \pmod{2003}$.

<u>1. način</u> Ugotovitev, da so ostanki pri deljenju potenc števila 2002 z 2003 izmenoma enaki 1 in 2002: 3 točke. Utemeljitev te ugotovitve (tj. zakaj se vzorec ponavlja): 3 točke. Sklep, da je ostanek enak 2002: 1 točka.
<u>2. način</u> Zapis $2002 = 2003 - 1$: 2 točki. Uporaba formule $(2003-1)^{2001} = 2003^{2001} - \ldots - 1$: 3 točke. Sklep, da je ostanek enak 2002: 2 točki.
<u>3. način</u> Ugotovitev $2002 \equiv -1 \pmod{2003}$: 2 točki. Račun s kongruencami: 4 točke. Sklep: 1 točka.

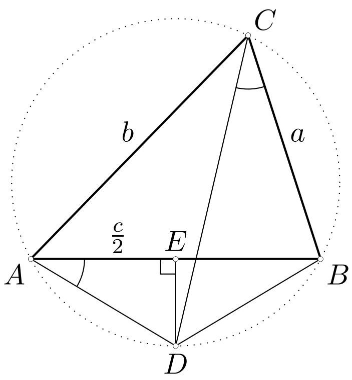
III/1. Da bi bil $\log(x-2y)$ definiran, mora veljati $x > 2y$. Enačbo lahko zapišemo kot $\log(x-2y)^2 = \log(xy)$, od koder sledi $(x-2y)^2 = xy$ oziroma $(x-4y)(x-y) = 0$. Zaradi pogoja, ki mu morata zadoščati x in y, rešitev $x = y$ ni možna, zato je $x = 4y$ oziroma $\frac{x}{y} = 4$.

Pogoj $x > 2y$: 1 točka. Preoblikovanje v $\log(x-2y)^2 = \log(xy)$: 2 točki. Sklep $(x-2y)^2 = xy$: 2 točki. Enačba $(x-4y)(x-y) = 0$ (ali navedeni rešitvi $x = y$, $x = 4y$): 1 točka. Sklep $x = 4y$ in zapisan odgovor $\frac{x}{y} = 4$: 1 točka.

III/2. Če sta p in q lihi števili, je $p + q > 2$ sodo. Torej mora biti vsaj 1 od števil p in q sodo. Ker je $p > q$, je tako $q = 2$. Med praštevili p, $p-2$ in $p+2$ je natanko 1 deljivo s 3, zato je enako 3. Torej je lahko le $p = 5$ in je $p^2 - q = 23$ res praštevilo.

Ugotovitev, da je vsaj 1 izmed števil p in q sodo: 2 točki. Ugotovitev $q = 2$: 1 točka. Ugotovitev, da je med števili p, $p-2$ in $p+2$ vsaj 1 deljivo s 3: 2 točki. Ugotovitev $p = 5$: 1 točka. Sklep, da je $p^2 - q = 23$ praštevilo: 1 točka.

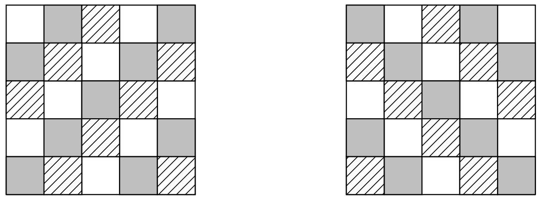
III/3. Kota $\sphericalangle ACD$ in $\sphericalangle DCB$ sta kota nad enako dolgima tetivama, zato sta skladna in je CD simetrala kota $\sphericalangle ACB = \gamma$. Torej je $\sphericalangle DCB = \frac{\gamma}{2}$ in zato $\sphericalangle DAB = \frac{\gamma}{2}$. Označimo z E razpolovišče stranice AB. Tedaj je $|AE| = \frac{c}{2}$ in zato



$$|AD| = \frac{c}{2\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{c}{2\sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}}} = \frac{c}{\sqrt{2(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab})}} = c\sqrt{\frac{ab}{(a+b+c)(a+b-c)}}.$$

Sklep $|AD| = \frac{c}{2\cos\frac{\gamma}{2}}$ (ali ekvivalenten izraz, v katerem nastopa poleg a, b, c še EN kot trikotnika ABC): 4 točke. Poenostavitev gornjega izraza in zapis $|AD|$ (v kateri koli obliki) samo s količinami a, b, c: 3 točke.
Če tekmovalec izrazi $|AD|$ z a, b, c in 2 kotoma ali kakšno drugo odvisno količino, vendar izraza ne poenostavi: največ 2 točki.

III/4. Obarvajmo polja tabele s 3 barvami na 2 načina. Ker vsaka izmed domin velikosti 3×1 prekrije po 1 polje vsake barve, morajo biti števila pokritih polj vsake barve enaka. Ker imamo na vsaki sliki 9 sivih polj ▢ in po 8 polj drugih 2 barv, mora biti žeton v obeh tabelah na 1 izmed sivih polj. Edino polje, ki je pri obeh barvanjih sivo, je središčno polje tabele.



Tekmovalec se bo sam prepričal, da je ostala polja tabele velikosti 5×5, res možno prekriti z dominami velikosti 3×1.

Barvanje tabele s 3 barvami na način, ki bistveno zmanjša možne položaje žetona (npr. po 1 barvanju vidimo, da je žeton lahko le na 9 osenčenih poljih): 3 točke. Zasuk barvanja in sklep, da je žeton lahko le na središčnem polju: 3 točke. Dokaz, da lahko tabelo 5×5 z žetonom na središčnem polju prekrijemo z dominami 3×1: 1 točka.
Če tekmovalec pokaže, da je žeton lahko na središčnem polju, tako da ostanek tabele prekrije z dominami na predpisan način, VENDAR NE DOKAŽE, da je to edina možna lega žetona: 2 točki.
Če tekmovalec enoličnosti ne dokaže, vendar skuša pri tem uporabiti tako barvanje, ki ne privede do rešitve: dodatna 1 točka za uporabo barvanja.

III/5. Ko enačbo poenostavimo, dobimo $x^2 + x(y+3) + (y^2 - 3y + 9) = 0$. Da bi ta kvadratna enačba imela kakšno realno rešitev, mora biti njena diskriminanta $D = (y+3)^2 - 4(y^2 - 3y + 9) = -3(y-3)^2$ nenegativna. Torej je lahko le $y = 3$, kar nam da $x = -3$. Prvotni enačbi zadoščata le realni števili $x = -3$ in $y = 3$.

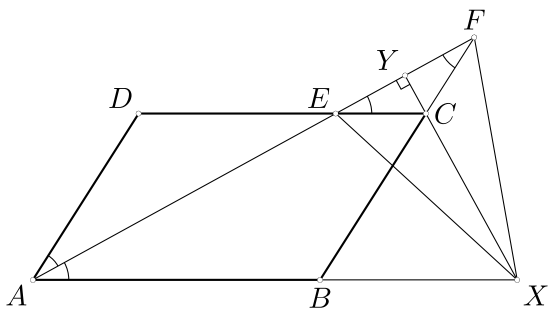
Preoblikovanje enačbe v kvadratno enačbo po x (ali y): 2 točki. Zapisan pogoj nenegativnosti diskriminante $-3(y-3) \geq 0$ (ali ekvivalentno v x): 3 točke. Izpisani rešitvi $x = -3$, $y = 3$: 1+1 točka.
Če tekmovalec samo navede rešitvi $x = -3$, $y = 3$ in NE dokaže, da sta edini: 2 točki.

IV/1. Spomnimo se, da velja $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Izračunamo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log_2 2003} + \cdots + \frac{1}{\log_{100} 2003} &= \frac{\ln 2}{\ln 2003} + \cdots + \frac{\ln 100}{\ln 2003} = \\ &= \frac{\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln 100}{\ln 2003} = \\ &= \frac{\ln(100!)}{\ln 2003} = \frac{1}{\log_{100!} 2003}.\end{aligned}$$

Uporaba $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ (ali podobne formule): 3 točke. Uporaba $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ (ali podobne formule): 2 točki. Izpopolnitev dokaza: 2 točki.

IV/2. Označimo kot $\sphericalangle BAD$ z 2α. Potem je kot $\sphericalangle BAE = \alpha$ in tudi kot $\sphericalangle CEF = \alpha$. V trikotniku ABF je kot $\sphericalangle ABF = \pi - 2\alpha$, zato je $\sphericalangle BFA = \alpha$ in je ABF enakokrak. Potem je tudi ECF enakokrak. Narišimo premico skozi C in X in označimo presečišče s simetralo z Y. Ker je trikotnik XBC enakokrak in je kot $\sphericalangle XBC$ enak 2α, je kot $\sphericalangle BCX = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Potem je tudi $\sphericalangle FCY = \frac{\pi}{2} - \alpha$ in zato je $\sphericalangle CYF = \frac{\pi}{2}$. Videli smo že, da je trikotnik ECF enakokrak, zato je $|EY| = |YF|$ in tudi $|EX| = |FX|$.



Trikotnik ABF je enakokrak: 1 točka. Trikotnik ECF je enakokrak: 1 točka. Izračun $\sphericalangle BCX = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (ali ekvivalentna izpeljava $\sphericalangle BAD$): 1 točka. Vpeljava točke Y in dokaz, da je trikotnik CYF enakokrak: 1+1 točka. Izpopolnitev dokaza: 2 točki.
Če tekmovalec ne vidi poti do rešitve: po 1 točka za vsako netrivialno geometrijsko ugotovitev, vendar skupaj največ 3 točke.

IV/3. Ker mora dati število 2003 pri deljenju z n ostanek 7, je $n > 7$, število $2003 - 7 = 1996$ pa mora biti deljivo z n. Iz praštevilskega razcepa $1996 = 2^2 \cdot 499$ vidimo, da je lahko $n = 499$, $n = 2 \cdot 499 = 998$ ali $n = 2^2 \cdot 499 = 1996$.

Pogoj $n > 7$: 1 točka. Ugotovitev, da je $2003 - 7 = 1996$ deljivo z n: 2 točki. Praštevilski razcep $1996 = 2^2 \cdot 499$: 1 točka. Vse rešitve: 1+1+1 točka.

IV/4. $2003 = n + (n+1) + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{m^2+m-n^2+n}{2} = \frac{(m-n)(m+n)+m+n}{2} = \frac{(m-n+1)(m+n)}{2}$. Torej je $4006 = (m-n+1)(m+n)$. Ker je $1 < m-n+1 < m+n$ (prva neenakost velja, ker je v vsoti več kot 1 število) in ker je 2003 praštevilo, je edina možnost $m - n + 1 = 2$ in $m+n = 2003$, zato je $n = 1001$ in $m = 1002$. Število 2003 lahko zapišemo le kot vsoto 2 zaporednih naravnih števil, tj. $2003 = 1001 + 1002$.

Zapis $2003 = n+(n+1)+\cdots+m$ (ali $2003 = n+(n+1)+\cdots+(n+k)$): 1 točka. Izračunana vsota $\frac{(m-n+1)(m+n)}{2}$ (ali ekvivalentno z n in k): 2 točki. Sklep, da iz $4006 = (m-n+1)(m+n)$ sledi $m - n + 1 = 2$ in $m + n = 2003$ (ali ekvivalentno z n in k), KER JE 2003 PRAŠTEVILO: 2 točki. Izpopolnitev rešitve $n = 1001$ in $m = 1002$ (ali ekvivalentno z n in k): 2 točki.
Če tekmovalec samo navede zapis $2003 = 1001 + 1002$ in ne dokaže, da je to edina možnost: 2 točki.

IV/5. Drugo enačbo pomnožimo z 2 in prištejemo prvi

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2xy = 25 + 2 \cdot 19,$$

preoblikujemo v $(x+y)^2 + 2(x+y) = 63$ in razstavimo $(x+y-7)(x+y+9) = 0$. Če je $x + y = 7$, iz druge enačbe sledi $xy = 12$. Iz teh enačb dobimo kvadratno enačbo za x, ki se lepo razstavi na $(x-3)(x-4) = 0$. Dobimo rešitvi $x = 3$, $y = 4$ in $x = 4$, $y = 3$. Pri $x + y = -9$ sledi $xy = 28$, in kvadratna enačba za x, ki jo izpeljemo, tj. $x^2 + 9x + 28$, ima negativno diskriminanto, zato drugih rešitev ni.

Preoblikovanje v $(x+y-7)(x+y+9) = 0$ (ali ekvivalentno, ki nam da linearni zvezi med x in y): 3 točke. Prva kvadratna enačba $(x-3)(x-4) = 0$ in obe rešitvi: 1+1 točka. Druga kvadratna enačba $x^2 + 9x + 28$ in dokaz, da ni realnih rešitev: 1+1 točka.
Če tekmovalec naloge ne reši, vendar iz druge enačbe izrazi y (ali x) in zapiše pravilen polinom 4. stopnje po x (ali y): 3 točke.