Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge
DMFA Slovenije

Matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Izbirno tekmovanje
30. marec 2005

Naloge za 1. letnik

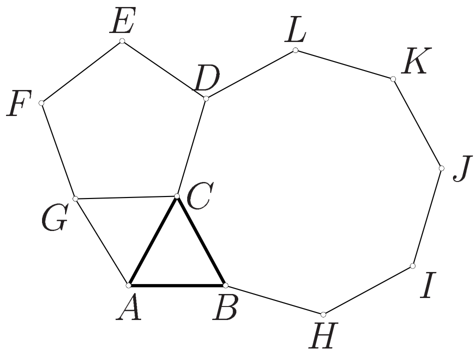
1. Poišči najmanjše naravno število n, da bo vsota $n + 2n + 3n + \cdots + 9n$ enaka številu, ki ima v desetiškem zapisu vse števke enake.

2. Za katere vrednosti parametra a ima sistem enačb $|x - 1| + |y - a| = 1$ in $y = -2|x - 1| - 1$ natanko 3 rešitve?

3. Za realni števili a in b velja $a^3 = 3ab^2 + 11$ in $b^3 = 3a^2b + 2$. Izračunaj vrednost izraza $a^2 + b^2$.

4. Dan je romb $ABCD$ z ostrim kotom $\sphericalangle BAC$. Nožišče višine iz točke D na stranico AB deli to stranico na dela dolžin x in y. Izrazi dolžini diagonal romba $ABCD$ z x in y.

5. V točki C se stikajo enakostranični trikotnik ACG, pravilni petkotnik $CDEFG$ in pravilni osemkotnik $BHIJKLDC$ (glej sliko). Določi kote trikotnika ABC.



Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

Matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Izbirno tekmovanje
30. marec 2005

Naloge za 2. letnik

1. Rok je iz 500 enako velikih kock sestavil kvader. Najmanj koliko mejnih ploskev kock je sestavljalo mejne ploskve kvadra?

2. Če petmestno število delimo s 100, dobimo količnik k in ostanek o. Pri koliko petmestnih številih je vsota $k + o$ deljiva z 11?

3. Naj bosta a in b pozitivni realni števili. Dokaži, da je vrednost izraza

$$\frac{\sqrt{\frac{ab}{2}} + \sqrt{8}}{\sqrt{\frac{ab+16}{8} + \sqrt{ab}}}$$

neodvisna od a in b.

4. Označimo z D in E razpolovišči stranic AC in BC enakostraničnega trikotnika ABC. Poltrak DE seka očrtano krožnico trikotnika ABC v točki F. V kakšnem razmerju deli točka E daljico DF?

5. Poišči vse rešitve enačbe $m^2 - 3m + 1 = n^2 + n - 1$, kjer sta m in n naravni števili.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

Matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Izbirno tekmovanje
30. marec 2005

Naloge za 3. letnik

1. Poišči vsa pozitivna realna števila x, ki zadoščajo enačbi $x^{x\sqrt[3]{x}} = (x\sqrt[3]{x})^x$.
2. Med naravnimi števili m, za katere ima neenakost $n^2 + 2005 \leq mn$ vsaj kakšno celoštevilsko rešitev n, poišči tista, kjer je teh rešitev najmanj.
3. Za koliko naravnih števil n je vrednost izraza $n^3 - 14n^2 + 64n - 93$ praštevilo?
4. Naj bosta x in y realni števili, za kateri velja $\sin x + \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ in $\cos x + \cos y = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Koliko je $\sin(x + y)$?
5. Na diagonali AC pravokotnika $ABCD$ izberemo točki E in F tako, da je $|AE| = |AB|$ in $|AF| = |AD|$. Označimo z G in H pravokotni projekciji točk E in F na stranico AB. Dokaži, da velja $|AG| + |FH| = |AC|$.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

Matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Izbirno tekmovanje
30. marec 2005

Naloge za 4. letnik

1. Prva dva člena zaporedja sta $a_1 = 1$ in $a_2 = 3$. Od drugega člena dalje velja: če od nekega člena odštejemo člen, ki je pred njim, dobimo člen, ki je za njim. Poišči vsoto prvih 2005 členov zaporedja.

2. Koliko je šestmestnih števil oblike $\overline{abcacb}$, ki so deljiva s 23?

3. Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki zadoščajo enačbi

$$yf(x) + xf(y) = (x + y)f(x + y).$$

4. Naj bo ABC enakokrak ostrokoten trikotnik z vrhom C. Nosilka višine iz A seka stranico BC v točki D, očrtano krožnico trikotnika ABC pa v točkah A in E. Premica BE seka krožnico s premerom BC v točkah B in F. Dokaži, da je $|AD| = |BF|$.

5. Za neprazno podmnožico X množice $\{1, 2, 3, \ldots, 42\}$ označimo z $v(X)$ vsoto elementov množice X. (Tako je denimo $v(\{1, 3, 8\}) = 12$.)

   Izračunaj vsoto vseh števil $v(X)$, ko X preteče vse neprazne podmnožice množice $\{1, 2, 3, \ldots, 42\}$.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

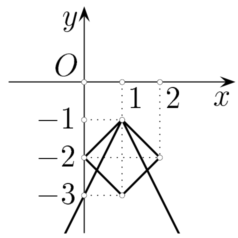
Rešitve nalog z izbirnega tekmovanja

Vsaka naloga je vredna 7 točk. Pri vrednotenju vsake naloge smiselno upoštevajte priloženi točkovnik. Tekmovalec naj ne prejme več kot 3 točke pri posamezni nalogi, če iz delne rešitve ni razvidna pot do končne rešitve naloge.

I/1. Označimo $s = n + 2n + 3n + \cdots + 9n = 45n$. Ker 5 deli število s in ker ima s v desetiškem zapisu vse števke enake, so vse njegove števke enake 5. Ker pa tudi 9 deli število s, je $s = 555555555$ in zato $n = 12345679$.

Ugotovitev, da je $s = 45n$ deljivo s 5 in z 9 .... 2 točki
Sklep $5|s \Rightarrow$ vse števke števila s so enake 5 .... 2 točki
Sklep $9|s \Rightarrow$ v desetiškem zapisu števila s je 9 petic .... 2 točki
Izračun $n = \frac{555555555}{45} = 12345679$ .... 1 točka

I/2. Narišemo krivulji, ki ju določata enačbi. Prva enačba določa obod kvadrata s središčem v točki $(1, a)$, druga pa 2 poltraka s skupnim izhodiščem v točki $(1, -1)$. Sistem ima natanko 3 rešitve, ko se skupno izhodišče poltrakov ujema z zgornjim ogliščem kvadrata. To je takrat, ko je $a = -2$.

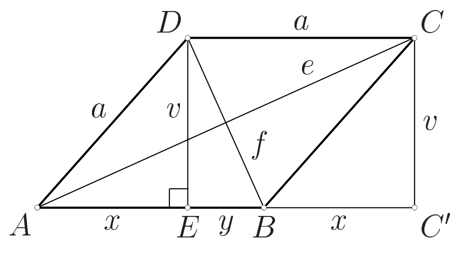


Ugotovitev, da prva enačba določa obod kvadrata .... 2 točki
Ugotovitev pomena parametra a .... 1 točka
Ugotovitev, da druga enačba določa poltraka s skupnim izhodiščem $(1, -1)$ .... 2 točki
Ugotovitev pogoja za natanko 3 rešitve .... 1 točka
Rešitev $a = -2$ .... 1 točka

I/3. Enačbi preoblikujemo v $a^3 - 3ab^2 = 11$, $b^3 - 3a^2b = 2$ in kvadriramo: $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 121$, $b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 4$. Ti dve enačbi seštejemo in dobimo $125 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = (a^2 + b^2)^3$, torej je $a^2 + b^2 = 5$.

Pravilno kvadriranje obeh enačb .... 2 točki
Vsota kvadriranih enačb .... 2 točki
Preureditev členov s črkovnimi oznakami v $(a^2 + b^2)^3$ .... 2 točki
Sklep $a^2 + b^2 = 5$ .... 1 točka

I/4. Dolžina stranice romba je $a = x + y$, zato je po Pitagorovem izreku v trikotniku AED višina v enaka $v = \sqrt{(x+y)^2 - x^2} = \sqrt{y(2x+y)}$. Potem je dolžina diagonale BD enaka $|BD| = \sqrt{v^2 + y^2} = \sqrt{2y(x+y)}$, dolžina diagonale AC pa je po Pitagorovem izreku v trikotniku $AC'C$ enaka



$$|AC| = \sqrt{(2x+y)^2 + v^2} = \sqrt{2(2x+y)(x+y)}.$$

Izraz za višino romba z x in y .... 2 točki
Izraz za dolžino diagonale BD z x in y .... 2 točki
Izraz za dolžino diagonale AC z x in y .... 3 točke

I/5. Spomnimo se, da notranji kot pravilnega n-kotnika meri $\frac{n-2}{n}180°$. Notranji kot enakostraničnega trikotnika meri $60°$, v pravilnega petkotnika $\frac{3}{5}180° = 108°$, pravilega osemkotnika pa $\frac{6}{8}180° = 135°$. Trikotnik ABC je enakokrak s kotom $360° - (60° + 108° + 135°) = 57°$ pri vrhu C in kotoma $\frac{1}{2}(180° - 57°) = 61.5°$ ob osnovnici AB.

Ugotovitev, da je trikotnik ABC enakokrak z vrhom C .... 1 točka
Izračun velikosti notranjega kota petkotnika .... 2 točki
Izračun velikosti notranjega kota osemkotnika .... 2 točki
Izračun kota ob vrhu enakokrakega trikotnika ABC .... 1 točka
Izračun drugih dveh kotov trikotnika ABC .... 1 točka

II/1. Denimo, da so bile Rokove kocke enotske. Kvader je imel tedaj prostornino 500. Če je bil dolg a, širok b in visok c enot, je veljalo $abc = 500$. Njegova površina je bila $P = 2(ab+bc+ac)$, vrednost izraza P pa pove tudi, koliko mejnih ploskev kock je na površju kvadra. Poiskati moramo torej najmanjšo vrednost površine kvadra. Predpostavimo lahko, da je $a \geq b \geq c$. Ker je $500 = 2^2 \cdot 5^3$, so delitelji števila 500 števila 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250 in 500 (glej preglednico). Razberemo lahko, da je na površju kvadra najmanj 400 mejnih ploskev kock, iz katerih je sestavljen.

a	b	c	$2(ab+bc+ac)$
500	1	1	2002
250	2	1	1504
125	4	1	1258
125	2	2	1008
100	5	1	1210
50	10	1	1120
50	5	2	720
25	20	1	1090
25	10	2	640
25	5	4	490
20	5	5	450
10	10	5	400

Ugotovitev, da ima kvader z dolžinami robov a, b in c prostornino 500 (enot) .... 1 točka
Ideja o deliteljih števila 500 in njegovi delitelji .... 2 točki
Povezava števila mejnih ploskev (enotskih) kock s površino kvadra .... 1 točka
Iskanje najmanjše vrednosti površine pri različnih vrednostih dolžin robov .... 2 točki
Pravilna rešitev .... 1 točka

II/2. Vseh petmestnih števil je 90000 (od 10000 do 99999). Razdelimo jih lahko v 900 stolpcev po 100 števil, in sicer glede na vrednost k od 100 do 999:

$$\begin{array}{ccccc}
100\cdot 100+\ \ 0 & 100\cdot 101+\ \ 0 & 100\cdot 102+\ \ 0 & \cdots & 100\cdot 999+\ \ 0\\
100\cdot 100+\ \ 1 & 100\cdot 101+\ \ 1 & 100\cdot 102+\ \ 1 & \cdots & 100\cdot 999+\ \ 1\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
100\cdot 100+99 & 100\cdot 101+99 & 100\cdot 102+99 & \cdots & 100\cdot 999+99
\end{array}$$

V vsakem stolpcu, v katerem k ni deljiv z 11, najdemo takih 9 vrednosti ostanka o, da je vsota $k + o$ deljiva z 11. V stolpcih, v katerih je k deljiv z 11, pa je 10 vrednosti ostanka o takih, da je vsota $k + o$ deljiva z 11. Tedaj je ostanek o lahko enak $0, 11, 22, \ldots, 99$.
Nato ugotovimo, da je 81 stolpcev, v katerih je količnik k deljiv z 11. To so stolpci, v katerih ima k vrednosti $110 = 11 \cdot 10$, $121 = 11 \cdot 11$, $132 = 11 \cdot 12, \ldots, 990 = 11 \cdot 90$. Stolpcev, v katerih k ni deljiv z 11 je torej $900 - 81 = 819$. Vsota $k + o$ je deljiva z 11 pri $81 \cdot 10 + 819 \cdot 9 = 8181$ petmestnih številih.

Ugotovitev: za k, ki ni deljiv z 11, je 9 takih vrednosti o, da je $k + o$ deljiv z 11 ...... 2 točki
Ugotovitev: za k, ki je deljiv z 11, je 10 takih vrednosti o, da je $k + o$ deljiv z 11 ..... 2 točki
V 81 primerih je k deljiv z 11 .... 1 točka
V 819 primerih k ni deljiv z 11 .... 1 točka
Vsota $k + o$ je deljiva z 11 pri 8181 petmestnih številih .... 1 točka

II/3. Ker sta števili a in b pozitivni, je izraz za vsaka a in b definiran, zato lahko zapišemo

$$\frac{\sqrt{\frac{ab}{2}}+\sqrt{8}}{\sqrt{\frac{ab+16}{8}+\sqrt{ab}}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{\frac{ab}{2}}+\sqrt{8})^2}}{\sqrt{\frac{ab+16+8\sqrt{ab}}{8}}}=\frac{\sqrt{\frac{ab}{2}+2\cdot\sqrt{\frac{8ab}{2}}+8}}{\frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{ab+16+8\sqrt{ab}}}=\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{\frac{ab+8\sqrt{ab}+16}{2}}}{\sqrt{ab+16+8\sqrt{ab}}}=$$

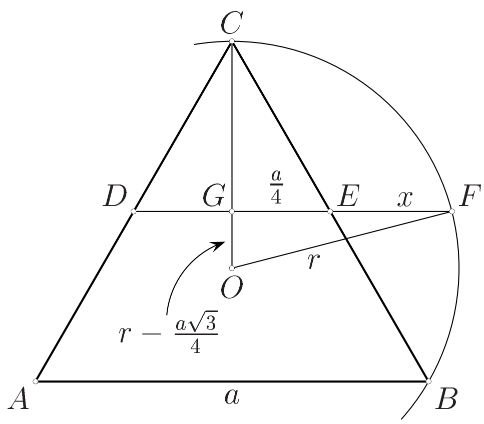
$$=\frac{\sqrt{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{ab+8\sqrt{ab}+16}}{\sqrt{ab+16+8\sqrt{ab}}}=\sqrt{4}=2$$

torej je izraz neodvisen od a in b.
Lahko rešujemo tudi drugače. Če ulomek kvadriramo, dobimo

$$\frac{\frac{ab}{2}+2\sqrt{\frac{ab}{2}\cdot 8}+8}{\frac{ab+16}{8}+\sqrt{ab}}=\frac{4ab+32\sqrt{ab}+64}{ab+16+8\sqrt{ab}}=4\cdot\frac{ab+8\sqrt{ab}+16}{ab+8\sqrt{ab}+16}=4\,.$$

To pomeni, da je vrednost ulomka enaka $\sqrt{4}=2$ in je neodvisna od a in b.
Smiselno vrednotiti pravilne korake pri poenostavljanju izraza .... 0 do 7 točk

II/4. Označimo $a = |AB|$ in $x = |EF|$. Razpolovišče daljice DE označimo z G. Ker je DEC enakostranični trikotnik z dolžino stranice $\frac{a}{2}$, je $|GE| = \frac{a}{4}$ in $|GC| = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Očrtana krožnica trikotnika ABC naj ima polmer r in središče v O. Potem je $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $|OG| = r - |GC| = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$ in $|GF| = \frac{a}{4} + x$. Trikotnik OFG je pravokoten s hipotenuzo OF, zato velja $|OF|^2 = |OG|^2 + |GF|^2$. Torej je $|GF|^2 = |OF|^2 - |OG|^2 = \frac{5a^2}{16}$ in $x = -\frac{a}{4}+\frac{a\sqrt{5}}{4} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{4}$. Iskano razmerje je torej enako $|DE| : |EF| = \frac{a}{2} : \frac{a(\sqrt{5}-1)}{4} = 2 : (\sqrt{5}-1)$. (Zapišemo lahko tudi $2 : (\sqrt{5}-1) = (\sqrt{5}+1) : 2$.)



Dolžine stranic in višine trikotnika DEC glede na dolžino stranice trikotnika ABC ... 1 točka
Dolžina $|OG|$ (z analognimi oznakami) .... 2 točki
Dolžina $|GF|$ oziroma $|EF|$ (z analognimi oznakami) .... 2 točki
Izračun razmerja .... 2 točki

II/5. Dano enačbo preuredimo v $m^2 - 3m - (n^2 + n - 2) = 0$. Dobljeno kvadratno enačbo rešimo: $m_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9+4n^2+4n-8}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{(2n+1)^2}}{2} = \frac{3\pm(2n+1)}{2}$. Torej je $m_1 = n + 2$ in $m_2 = -n + 1$. Ker m_2 ni naravno število pri nobeni naravni vrednosti parametra n, ta možnost odpade. Dano enačbo reši par $(m, m-2)$, kjer je m poljubno naravno število.

Preureditev enačbe v kvadratno enačbo .... 1 točka
Reševanje kvadratne enačbe in poenostavitev (odprava korena, ulomka) .... 2 točki
Utemeljitev, da ena izmed rešitev ne ustreza zahtevam naloge .... 2 točki
Zapis (neskončno mnogo) rešitev, npr. kot par $(m, m-2)$, $m \in \mathbb{N}$ ali $(n+2, n)$, $n \in \mathbb{N}$ 2 točki

III/1. Obe strani enačbe logaritmiramo in dobimo $x\sqrt[3]{x}\log x = x\log x^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}x\log x$, kar preoblikujemo v $x\log x(\sqrt[3]{x} - \frac{4}{3}) = 0$. Ker je $x > 0$, dobimo eno rešitev enačbe iz $\log x = 0$, to je $x = 1$, drugo pa iz $\sqrt[3]{x} = \frac{4}{3}$, to je $x = \frac{64}{27}$.

Logaritmiranje in preoblikovanje enačbe v obliko zmnožka .... 3 točke
Rešitev $x = 1$ (enačbo ne smemo deliti z $\log x$) .... 2 točki
Rešitev $x = \frac{64}{27}$ .... 2 točki

III/2. Dano neenačbo preoblikujemo v $n^2 - mn + 2005 \leq 0$. Oglejmo si kvadratno enačbo $n^2 - mn + 2005 = 0$. Njeni rešitvi sta $n_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2-8020}}{2}$. Diskriminanta ne sme biti negativna, saj želimo, da bi imela pripadajoča neenačba vsaj kakšno celo rešitev. To pomeni, da mora biti $m \geq 90$ ($m \in \mathbb{N}$). Če je $m = 90$, dobimo $n_1 = \frac{90-\sqrt{80}}{2} = 45 - 2\sqrt{5}$ in $n_2 = 45 + 2\sqrt{5}$. Cele rešitve neenačbe ležijo med n_1 in n_2. Za $m = 90$ ima neenačba najmanj celih rešitev; tedaj jih je 9. Če bi izbrali večje število m, se iz $n_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2-8020}}{2}$ vidi, da bi se n_1 in n_2 oddaljila drug od drugega in bi imela neenačba več celih rešitev.

Preoblikovanje dane neenačbe in zapis rešitev ustrezne kvadratne enačbe .... 2 točki
Premislek z diskriminanto in določitev $m \geq 90$ .... 2 točki
Utemeljitev, da je pri $m = 90$ najmanj celih rešitev neenačbe .... 3 točke

III/3. Poskusimo izraz razstaviti. Ker je $93 = 3 \cdot 31$, so cele ničle polinoma $p(x) = x^3 - 14x^2 + 64x - 93$ lahko le ± 1, ± 3, ± 31 in ± 93. Na pamet preverimo, da niti 1 niti -1 nista ničli. S Hornerjevim algoritmom ugotovimo, da je 3 ničla:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -14 & 64 & -93 \\ & & 3 & -33 & 93 \\ \hline 3 & 1 & -11 & 31 & \end{array}$$

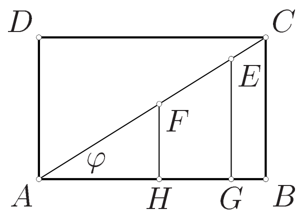
Pišemo $n^3 - 14n^2 + 64n - 93 = (n-3)(n^2 - 11n + 31)$. Vrednost izraza je praštevilo, če je eden izmed faktorjev enak 1, drugi pa praštevilo. Najprej predpostavimo, da je $n - 3 = 1$. Tedaj je $n = 4$, prvi faktor je enak 1, drugi pa $4^2 - 11 \cdot 4 + 31 = 3$, torej je praštevilo.
Predpostavimo še, da je $n^2 - 11n + 31 = 1$. Tedaj je $n^2 - 11n + 30 = 0 = (n-5)(n-6)$. Faktor $n^2 - 11n + 31$ je enak 1 pri $n = 5$ in pri $n = 6$. Pri obeh vrednostih števila n je faktor $n - 3$ praštevilo, in sicer 2 oziroma 3.
Vrednost izraza $n^3 - 14n^2 + 64n - 93$ je praštevilo za tri vrednosti naravnega števila n, in sicer za 4, 5 in 6.

Zapis izraza v obliki zmnožka .... 3 točke
Rešitev $n = 4$ (linearni faktor enak 1) .... 2 točki
Rešitvi $n = 5$ in $n = 6$ (kvadratni faktor enak 1) .... 2 točki

III/4. Če enačbi kvadriramo in seštejemo, dobimo $\sin^2 x + 2\sin x \sin y + \sin^2 y + \cos^2 x + 2\cos x \cos y + \cos^2 y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$ oziroma $2(\sin x \sin y + \cos x \cos y) = 0$ in od tod $\cos(x - y) = 0$. Če pa enačbi med seboj množimo, dobimo $\sin x \cos x + \sin x \cos y + \sin y \cos x + \sin y \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, kar preoblikujemo v $(\sin x \cos y + \sin y \cos x) + (\sin x \cos x + \sin y \cos y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ in še v $\sin(x +$

$y) + \sin(x+y)\cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Če upoštevamo, da je $\cos(x-y) = 0$, imamo $\sin(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, kar smo želeli izračunati.

Ugotovitev $\cos(x-y) = 0$ .... 3 točke
Ugotovitev $(\sin x \cos y + \sin y \cos x) + (\sin x \cos x + \sin y \cos y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .... 2 točki
Ugotovitev $\sin x \cos x + \sin y \cos y = \sin(x+y)\cos(x-y)$ .... 1 točka
Rešitev $\sin(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .... 1 točka



III/5. Naj bo $\sphericalangle BAC = \varphi$. Tedaj je $|AE| = |AB| = |AC|\cos\varphi$ in $|AF| = |AD| = |AC|\sin\varphi$. Podobno je $|AG| = |AE|\cos\varphi$ in $|FH| = |AF|\sin\varphi$, od koder sledi

$$|AG| + |FH| = ((\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2)|AC| = |AC|.$$

Zapis $|AE|$ in $|AF|$ z $|AC|$ in kotom BAC .... 3 točke
Zapis $|AG|$ z $|AE|$ in kotom BAC ter $|FH|$ z $|AF|$ in kotom BAC .... 3 točke
Sklepna ugotovitev $|AG| + |FH| = |AC|$ .... 1 točka

IV/1. Za $i \geq 2$ velja $a_{i+1} = a_i - a_{i-1}$. Tako je $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2005} = a_1 + a_2 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{2003} - a_{2002}) + (a_{2004} - a_{2003}) = a_2 + a_{2004}$. Če zapišemo prvih nekaj členov zaporedja, ugotovimo, da je zaporedje periodično s periodo 6: 1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3 ... Ker je $2004 = 6 \cdot 334 + 0$, je $a_{2004} = a_6 = -2$. Vsota prvih 2005 členov zaporedja je $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2005} = a_2 + a_{2004} = 3 - 2 = 1$.

Ugotovitev $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2005} = a_2 + a_{2004}$ .... 3 točke
Ugotovitev periodičnosti zaporedja .... 2 točki
Ugotovitev $a_{2004} = a_6 = -2$ in izračun vsote .... 2 točki

IV/2. Šestmestno število $\overline{abcacb}$ lahko zapišemo kot

$$x = 100100a + 10001b + 1010c = 23 \cdot (4352a + 434b + 43c) + 4a + 19b + 21c =$$

$$= 23 \cdot (4352a + 435b + 44c) + 2(2a - 2b - c).$$

To število je deljivo s 23 natanko tedaj, ko je vrednost izraza $2a - 2b - c$ deljiva s 23. Ker pa so a, b in c števke in je $a \neq 0$, velja $-25 \leq 2a - 2b - c \leq 18$. Vrednost izraza $2a - 2b - c$ je deljiva s 23 le, če je enaka 0 ali -23.

V prvem primeru je $c = 2(a - b)$, torej je $4 \geq a - b \geq 0$ oziroma $4 + b \geq a \geq b$. Pri $b = 0$ imamo za a štiri možnosti, pri $5 \geq b \geq 1$ lahko a izberemo na 5 načinov, pri $b = 6$ so 4 možnosti, pri $b = 7$ so 3, pri $b = 8$ sta 2 in pri $b = 9$ je ena sama možnost. Skupaj imamo torej $4 + 5 \cdot 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 39$ števil.

V drugem primeru je $2a - 2b - c = -23$. Če je $7 \geq b$, je $23 = 2 \cdot 7 + 9 \geq 2b + c = 23 + 2a$, torej $a = 0$, kar ni mogoče. Pri $b = 8$ dobimo $c = 7 + 2a$ in edina rešitev je $a = 1$ in $c = 9$. Pri $b = 9$ pa imamo $c = 5 + 2a$, od koder dobimo dve možnosti, in sicer $a = 1$, $c = 7$ ter $a = 2$, $c = 9$. V drugem primeru imamo torej 3 možnosti.

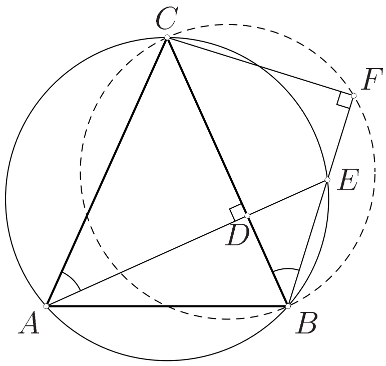
Vseh šestmestnih števil z danimi lastnostmi je $39 + 3 = 42$.

Pogoja, ki jima zadoščajo števke a, b in c ($2a - 2b - c = 0$ ali -23 oz. analogen pogoj) 2 točki
Izpis vseh možnosti v primeru $2a - 2b - c = 0$ .... 3 točke
Izpis vseh možnosti v primeru $2a - 2b - c = -23$ .... 2 točki

IV/3. Pri $x = 0$ dobimo $yf(0) = yf(y)$, zato je $f(y) = f(0)$ za vsak $y \in \mathbb{R}$. Torej je $f(y) = c$ za vsak y, kjer je c poljubna konstanta. Očitno vse konstantne funkcije ustrezajo prvotni enačbi.

Ugotovitev: $yf(0) = yf(y)$, zato je $f(y) = f(0)$ za vsak $y \in \mathbb{R}$ .... 4 točke
Sklep, da je funkcija f konstantna .... 1 točka
Preizkus, da vse konstantne funkcije ustrezajo dani enačbi .... 2 točki

IV/4. Po Talesovem izreku je BFC pravokotni trikotnik s hipotenuzo BC. Ker je $AD \perp BC$, je ADC pravokotni trikotnik s hipotenuzo AC. Ker sta $\sphericalangle EAC$ in $\sphericalangle EBC$ obodna kota nad istim lokom $\widehat{EC}$, sta enaka. Ker je ABC enakokraki trikotnik z vrhom C, je $|BC| = |AC|$. Torej sta ADC in BFC skladna pravokotna trikotnika, zato je $|AD| = |BF|$.



Ugotovitev, da sta trikotnika BFC in ADC pravokotna .... 2 točki
Skladnost kotov $\sphericalangle EAC$ in $\sphericalangle EBC$ .... 1 točka
Skladnost trikotnikov ADC in BFC .... 3 točke
Sklep $|AD| = |BF|$ .... 1 točka

IV/5. Označimo iskano vsoto z V. Vsako izmed števil od 1 do 42 se v vsoti V pojavi tolikokrat, kolikor je podmnožic množice $\{1, 2, 3, \ldots, 42\}$, ki vsebujejo to število. Takih podmnožic je 2^{41}, torej je

$$S = (1 + 2 + 3 + \ldots + 42)2^{41} = 21 \cdot 43 \cdot 2^{42}.$$

Ugotovitev, da se vsako število od 1 do 42 pojavi v vsoti 2^{41}-krat .... 5 točk
Izračun $(1 + 2 + 3 + \ldots + 42)2^{41} = 21 \cdot 43 \cdot 2^{42}$ .... 2 točki