**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

# Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

# 50. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

## Izbirno tekmovanje, 29. marec 2006

## Naloge za 1. letnik

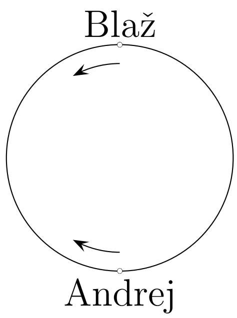
1. Poišči vsa realna števila $x$, ki zadoščajo enačbi
$$|2006 - |206 - x|| = 26.$$

2. Jana in Žana sta zapisali svoji starosti. Uporabili sta isti števki, le v nasprotnem vrstnem redu. Čez 5 let bo Jana dvakrat toliko stara, kot bo tedaj stara Žana. Koliko let je Jana starejša od Žane?

3. V pravokotnem trikotniku $ABC$ s pravim kotom pri $C$ velja $|AC| = 4$ in $|BC| = 8$. Na stranici $BC$ izberemo točko $D$, da je $|CD| = 5$. Koliko je točka $D$ oddaljena od stranice $AB$?

4. Včrtana krožnica trikotnika $ABC$ se dotika stranic $AB$ in $AC$ v točkah $D$ in $E$. Naj bo $F$ poljubna točka na stranici $AB$ med $A$ in $D$, $G$ pa poljubna točka na stranici $AC$ med $E$ in $C$. Na daljici $FG$ izberimo točko $T$, tako da je trikotnik $EGT$ enakokrak z vrhom $G$. Dokaži, da središče očrtane krožnice trikotnika $DET$ sovpada s središčem včrtane krožnice trikotnika $AFG$.

5. Andrej in Blaž sta na dvorišču zarisala krožnico in na njej označila diametralno nasprotni točki. Postavila sta se vsak na eno izmed teh točk in istočasno začela hoditi v nasprotnih smereh, vsak z enakomerno hitrostjo. Do tedaj, ko sta se prvič srečala, je Andrej prehodil 60 m. Od tedaj, ko sta se prvič srečala, do tedaj, ko sta se drugič srečala, je Blaž prehodil 90 m. Koliko meri obseg zarisane krožnice?




Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

# 50. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

## Izbirno tekmovanje, 29. marec 2006

## Naloge za 2. letnik

1. Poišči najmanjše naravno število $n$, za katero je število $10 \cdot n$ popoln kvadrat, število $12 \cdot n$ pa popoln kub.

2. Poišči vsa realna števila $a$ in $b$, za katera velja

$$a + b = ab = \frac{a}{b}\ .$$

3. Naj bo $AB$ premer krožnice $\mathcal{K}$ s središčem $O$ in naj bo $C$ poljubna točka na simetrali daljice $AB$. Dokaži, da premica $BC$ poteka skozi presečišče krožnice $\mathcal{K}$ in krožnice, očrtane trikotniku $AOC$.

4. Dan je kvadrat $ABCD$ s stranico dolžine 2 in središčem $O$. Označimo z $E$ razpolovišče stranice $AB$. Izračunaj polmer trikotniku $EOC$ očrtane krožnice.

5. Različne črke v računu predstavljajo različne števke. Katere števke so predstavljene s črkami $G$, $L$ in $O$?

$$\begin{array}{rccccc} & & G & G & G & G \\ + & & O & O & O & O \\ + & & L & L & L & L \\ \hline & G & O & O & O & L \end{array}$$

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

# 50. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

**Izbirno tekmovanje, 29. marec 2006**

## Naloge za 3. letnik

1. Mateja je eno za drugim zapisala sto naravnih števil. O njih je povedala: *“Na petdesetem mestu je število 50, na stotem mestu pa število 100. Če seštejem katerakoli tri števila, ki si sledijo eno za drugim, dobim vsoto 2006.”* Katero število je na prvem mestu? Katero pa na devetindevetdesetem?

2. Poišči vse pare naravnih števil $m$ in $n$, da je

$$3m - 9 + 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m = n^3.$$

3. Dokaži, da za kote $\alpha$, $\beta$ in $\gamma$ poljubnega trikotnika velja

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \cos\beta + \sin\gamma \cdot \cos\gamma = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

4. V trapezu $ABCD$ z osnovnicama $AB$ in $CD$ velja $|AB| > |CD|$ in $\angle ADC = 90°$. Naj bo $E$ pravokotna projekcija oglišča $A$ na premico $BC$. Dokaži, da se premici $AC$ in $DE$ sekata pravokotno natanko tedaj, ko je trikotnik $ABC$ enakokrak z vrhom $B$.

5. Ko smo polinom $p$ stopnje 2006 delili z $x - 1$, smo dobili ostanek 3, ko pa smo ga delili z $x - 3$, smo dobili ostanek 5. Kolikšen ostanek dobimo, ko polinom $p$ delimo z $(x - 1)(x - 3)$?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

# 50. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

## Izbirno tekmovanje, 29. marec 2006

## Naloge za 4. letnik

1. Koliko je vseh petmestnih števil, ki imajo prvo števko enako zadnji, števko na mestu tisočic enako števki na mestu desetic, zmnožek vseh števk pa enak kvadratu naravnega števila?

2. Poišči vsa realna števila $x$, za katera je
$$(x^2 - 7x + 11)^{x^2+5x-6} = 1.$$

3. Zaporedji $(x_n)$ in $(y_n)$ sta podani z začetnima členoma $x_1 = 1$ in $y_1 = 2$ ter predpisoma
$$x_n = y_{n-1} + x_{n-1} \ \text{ in } \ y_n = y_{n-1} - x_{n-1} \ \text{ za vsak } n \geq 2.$$
   (a) Dokaži, da je $y_n \neq 0$ za vsako naravno število $n$.
   (b) Označimo $a_n = \dfrac{x_n}{y_n}$. Izračunaj vsoto vseh različnih števil, ki so členi zaporedja $(a_n)$.

4. Naj bo $ABC$ ostrokotni trikotnik, $\mathcal{K}$ krožnica s premerom $AB$, $E$ in $F$ presečišči krožnice s stranicama $AC$ in $BC$, $P$ pa presečišče tangent na krožnico $\mathcal{K}$ v točkah $E$ in $F$. Izračunaj razmerje med polmeroma očrtanih krožnic trikotnikov $ABC$ in $EFP$.

5. Matija je v vrsto zapisal vsa naravna števila od 1 do 2006. Nato je v drugo vrsto pod vsako število zapisal vsoto njegovih števk. Koliko je vsota števil v drugi vrsti?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

# 50. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

## Izbirno tekmovanje, 29. marec 2006

## Rešitve nalog

*Vsaka naloga je vredna 7 točk. Vse matematično in logično korektne rešitve so enakovredne. Pri vrednotenju vsake naloge smiselno upoštevajte priloženi točkovnik. Tekmovalec naj ne prejme več kot 3 točke pri posamezni nalogi, če iz delne rešitve ni razvidna pot do končne rešitve naloge.*

---

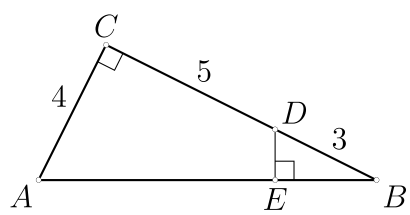
**I/1.** Ker je $|2006-|206-x||=26$, mora biti $2006-|206-x|=\pm 26$. Če je $2006-|206-x|=26$, je $|206-x|=1980$, kar nam da $x=206\pm 1980$. Če pa je $2006-|206-x|=-26$, je $|206-x|=2032$, kar nam da $x=206\pm 2032$. Torej so vse rešitve $-1774$, $2186$, $-1826$ in $2238$.

**Sklep** $2006-|206-x|=\pm 26$ .......... **1 točka**
**Zapisana možnost** $|206-x|=1980$ .......... **1 točka**
**Zapisana možnost** $|206-x|=2032$ .......... **1 točka**
**Vsaka izmed rešitev** $-1774$**,** $2186$**,** $-1826$**,** $2238$ .......... **po 1 točka**

**I/2.** Denimo, da je Jana stara $10a+b$ let, Žana pa $10b+a$ let. Čez 5 let bo Jana dvakrat toliko stara kot Žana, zato velja $10a+b+5=2\cdot(10b+a+5)$, od koder dobimo $8a=19b+5$. Ker je vrednost leve strani največ 72, je $b$ lahko 1, 2 ali 3. Toda v upoštev pride le $b=1$, ko dobimo $a=3$. Jana je stara 31 let, Žana pa 13. Jana je 18 let starejša od Žane.

**Zapis, da je Jana stara** $10a+b$ **let, Žana pa** $10b+a$ **let** .......... **1 točka**
**Sklep** $10a+b+5=2\cdot(10b+a+5)$ .......... **1 točka**
**Sklep** $8a=19b+5$ .......... **1 točka**
**Sklep** $b\leq 3$ .......... **2 točki**
**Analiza možnosti in sklep** $10a+b=31$**,** $10b+a=13$ .......... **1 točka**
**Sklep: Jana je** $18$ **let starejša od Žane** .......... **1 točka**

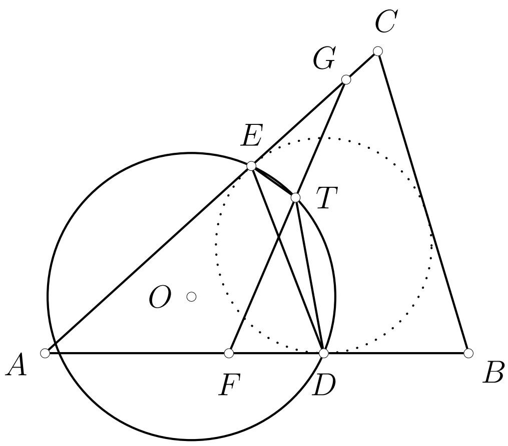
**I/3.** Po Pitagorovem izreku je $|AB|=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$. Iz podobnosti trikotnikov $ABC$ in $DBE$ sledi $\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|DB|}{|DE|}$. Torej je




$$|DE|=\frac{|DB|\cdot|AC|}{|AB|}=\frac{3\cdot 4}{4\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

**Izračun** $|AB|=4\sqrt{5}$ .......... **2 točki**
**Omenjena podobnost trikotnikov** $ABC$ **in** $DBE$ .......... **1 točka**
**Sklep** $\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|DB|}{|DE|}$ **(ali enakovreden)** .......... **2 točki**
**Izračun** $|DE|=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **(ali v obliki** $\frac{3}{\sqrt{5}}$**)** .......... **2 točki**

**I/4.** Naj bo $O$ središče očrtane krožnice trikotnika $DET$. Označimo središče včrtane krožnice trikotnika $AGF$ z $I$. Ker sta $D$ in $E$ dotikališči trikotniku $ABC$ včrtane krožnice, velja $|AD| = |AE|$ in je zato trikotnik $ADE$ enakokrak z vrhom $A$. Simetrala daljice $DE$ je simetrala kota $\angle BAC = \angle FAG$, torej $I$ leži na premici $AO$. Ker je trikotnik $EGT$ enakokrak, je simetrala kota $\angle AGF = \angle EGT$ tudi simetrala daljice $TE$, zato $I$ leži na premici $GO$. Tako smo pokazali, da točka $I$ leži hkrati na premicah $AO$ in $GO$. Točka $I$ je torej presečišče premic $AO$ in $GO$ ter sovpada s točko $O$, oziroma $O = I$.




**Sklep** $|AD| = |AE|$ **.................. 2 točki**
**Sklep, da je trikotnik** $ADE$ **enakokrak z vhrhom** $A$ **.................. 1 točka**
**Sklep, da** $I$ **leži na premici** $AO$ **.................. 1 točka**
**Sklep, da** $I$ **leži na premici** $GO$ **.................. 2 točki**
**Sklep** $I = O$ **.................. 1 točka**

**I/5.** Do trenutka, ko sta se prvič srečala, sta Andrej in Blaž skupaj prehodila polovico krožne poti, saj sta začela hoditi v diametralno nasprotnih točkah. Od tedaj, ko sta se prvič srečala, do tedaj, ko sta se drugič srečala, sta prehodila celotno krožno pot. Ker sta hodila z enakomernima hitrostima, je Andrej v tem času prehodil 120 m, to je dvakrat toliko kot do prvega srečanja. Krožna pot je bila dolga $120 + 90 = 210$ m.

**Sklep, da sta do prvega srečanja skupaj prehodila pol krožne poti .................. 2 točki**
**Sklep, da sta do drugega srečanja skupaj prehodila celo krožno pot .................. 2 točki**
**Sklep, da je Andrej do drugega srečanja prehodil 120 m .................. 2 točki**
**Odgovor 210 m .................. 1 točka**

**II/1.** Iz besedila naloge razberemo, da obstajata taki naravni števili $a$ in $b$, da je $10n = a^2$ in $12n = b^3$. Torej je $\frac{10}{12} = \frac{a^2}{b^3}$ oziroma

$$6a^2 = 5b^3.$$

Torej $6 \mid b^3$, zato $6 \mid b$, $6^3 \mid b^3$ in od tod $6^2 \mid a^2$ oziroma $6 \mid a$. Podobno sklepamo, da $5 \mid a^2$, torej $5 \mid a$, $5^2 \mid a^2$ in od tod $5 \mid b^3$ ter $5 \mid b$. Tako je število $5b^3$ deljivo s $5^4$ in zato $5^2 \mid a$.

Število $a$ mora biti deljivo vsaj s $25 \cdot 6$, število $b$ pa s $5 \cdot 6$. Torej je $a \geq 150$ in $b \geq 30$. Preverimo lahko, da $a = 150$ in $b = 30$ ustrezata pogojem naloge, kar nam da $n = \frac{a^2}{10} = 2250$.

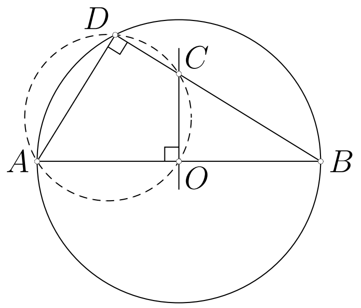
**Vpeljava** $10n = a^2$ **in** $12n = b^3$ **.................. 1 točka**
**Enakost** $6a^2 = 5b^3$ **.................. 1 točka**
**Sklepa** $6 \mid b$ **in** $6 \mid a$ **.................. po 1 točka**
**Sklepa** $5 \mid b$ **in** $5^2 \mid a$ **.................. po 1 točka**
**Minimalna rešitev** $n = 2250$ **.................. 1 točka**

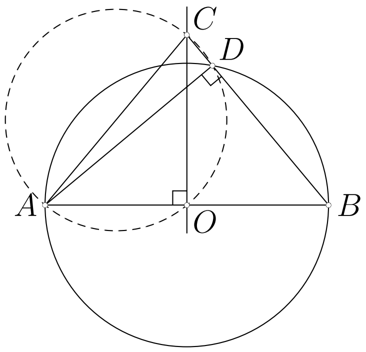
**II/2.** Oglejmo si najprej enačbo $a \cdot b = \frac{a}{b}$. Število $b$ ne sme biti enako 0, zato lahko enačbo pomnožimo z $b$ in dobimo $ab^2 = a$ oziroma $ab^2 - a = 0$, kar lahko zapišemo v obliki $a(b^2 - 1) = 0$ ali $a(b-1)(b+1) = 0$. Rešitve te enačbe so $a = 0$, $b = 1$ in $b = -1$.

Če rešitev $a = 0$ upoštevamo v $a + b = ab$, dobimo $b = 0$, kar ni mogoče. Podobno nas rešitev $b = 1$ privede do $a + 1 = a$, ki je protislovna enačba. Rešitev $b = -1$ prinese $a - 1 = -a$ oziroma $a = \frac{1}{2}$. Iskani števili sta $\frac{1}{2}$ in $-1$.

**Množenje z $b$ in eksplicitno zapisan pogoj $b \neq 0$ ........................ 2 točki**
**Enačba $a(b-1)(b+1) = 0$ ali podobna, iz katere lahko razberemo rešitve ... 1 točka**
**Analiza primera $a = 0$ ............................................ 1 točka**
**Analiza primera $b = 1$ ............................................ 1 točka**
**Analiza primera $b = -1$: enačba $a - 1 = -1$ in rešitev $a = \frac{1}{2}$ ................ 2 točki**

**II/3.** Naj bo $D$ presečišče krožnice $\mathcal{K}$ in krožnice, očrtane trikotniku $AOC$. Ker je $AB$ premer krožnice $\mathcal{K}$, je po Talesovem izreku $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$. Ker je $\angle COA$ v tetivnem štirikotniku $AOCD$ enak $\frac{\pi}{2}$, je $AC$ premer tetivnemu štirikotniku očrtane krožnice in je tudi $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$. Torej so točke $B$, $C$ in $D$ kolinearne, $D$ res leži na premici $BC$.

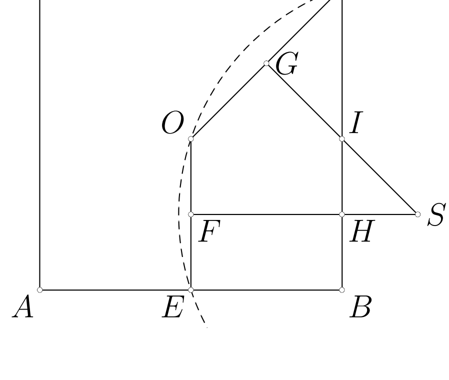



Če točka $C$ ne leži znoter krožnice $\mathcal{K}$, je sklep podoben. Ker je $AB$ premer krožnice $\mathcal{K}$, je po Talesovem izreku $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$. Obodna kota $\angle COA$ in $\angle CDA$ sta nad istim lokom. Ker je $\angle COA = \frac{\pi}{2}$, je tudi $\angle CDA = \frac{\pi}{2}$. Torej so točke $B$, $C$ in $D$ kolinearne, $D$ leži na premici $BC$.

**Eksplicitna vpeljava točke $D$ kot presečišča dveh krožnic. (Zgolj oznaka na sliki ne zadošča, če poteka skozi točko $D$ tudi katera druga premica.) ............ 1 točka**
**Uporaba Talesovega izreka in sklep $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$ ........................ 1 točka**
**Tetivnost štirikotnika $AOCD$ ($C$ znoter krožnice $\mathcal{K}$) in sklep $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$ ..... 2 točki**
**Sklep $\angle CDA = \frac{\pi}{2}$ ($C$ ni znoter krožnice $\mathcal{K}$) ............................ 2 točki**
**Sklep, da $B$, $C$ in $D$ ležijo na isti premici ................................ 1 točka**
**(Opomba: če je naloga pravilno rešena le za en primer ($C$ znoter krožnice ali ne), se ovrednoti s 5 točkami.)**

**II/4.** Označimo z $F$ razpolovišče $OE$ in z $G$ razpolovišče $OC$. Središče $S$ trikotniku $EOC$ očrtane krožnice je presečišče simetral daljic $EO$ in $OC$. Naj bo $H$ presečišče $FS$ in $BC$ ter $I$ presečišče $GS$ in $BC$. Očitno je $I$ razpolovišče $BC$ Trikotnik $IHS$ je enakokrak pravokotni trikotnik, zato je $|HS| = |HI| = \frac{1}{2}|BI| = \frac{1}{4}|BC| = \frac{1}{2}$. Tako je $|OS|^2 = |FS|^2 + |FO|^2 = (\frac{3}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{10}{4}$, torej je $|OS| = \frac{\sqrt{10}}{2}$.



**Sklep: simetrali daljic $EO$ in $OC$ se sekata v središču trikotniku $EOC$ očrtane krožnice 1 točka**
**Ugotovitev, da je trikotnik $IHS$ enakokrak pravokoten ...................... 2 točki**
**Ugotoitev, da je $|IH| = \frac{1}{2}$ in sklep, da je $|HS| = |IH|$ ...................... 2 točki**
**Uporaba Pitagorovega izreka v trikotniku $OFS$ in izračun $|OS| = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ........ 2 točki**

**II/5.** Ker je vsota treh štirimestnih števil petmestno število, je $G$ enak 1 ali 2. Ko seštevamo enice $G$, $O$ in $L$, je njihova vsota za $L$ večja od 10, saj je na mestu enic v vsoti števka $L$. To pomeni, da je $G + O = 10$, $O$ pa je lahko 9 ali 8.
Ko seštevamo desetice, moramo upoštevati, da je bila vsota enic večja od 10, zato imamo $1 + G + O + L = 1 + 10 + L = 11 + L$. Ker je na mestih desetic, stotic in tisočic števila $GOOOL$ ista števka, je $11 + L < 20$, kar pomeni, da je na mestu desettisočic tega števila števka 1. Imamo torej $G = 1$ in zato $O = 9$. Potem pa je $11 + L = 19$ in $L = 8$.
Račun je $1111 + 9999 + 8888 = 19998$.

**Ugotovitev, da je $G$ enak $1$ ali $2$ ........................................ 1 točka**
**Ugotovitev, da je $G + O = 10$, in sklep, da je $O$ lahko $9$ ali $8$ ................ 2 točki**
**Ugotovitev, da je $11 + L < 20$, in sklep, da je $G = 1$ ........................ 2 točki**
**Končni sklep, da je $O = 9$ in da je $L = 8$ ................................ 2 točki**

**III/1.** Označimo z $x$ število, ki je na 51. mestu. Tedaj je na 52. mestu število $1956 - x$, saj mora biti vsota $50 + x + (1956 - x)$ enaka 2006. Na 53. mestu je spet število 50, na 54. mestu je $x$, na 55. mestu je $1956 - x$ ..., na 99. mestu je število $x$, na 100. mestu pa $1956 - x$. Tako je $1956 - x = 100$, od koder izračunamo $x = 1856$. Mateja je zapisala po vrsti števila 100, 50, 1856, 100, 50, 1856 ..., 50, 1856, 100. Na prvem mestu je zapisala število 100, na 99. mestu pa število 1856.

**Ugotovitev, da gre le za tri števila, ki se ciklično ponavljajo ................ 2 točki**
**Zapis števil na 51. in 52. mestu, na primer $x$ in $1956 - x$ .................... 2 točki**
**Sklep, da je na 100. mestu število $1956 - x$ in izračun $x = 1856$ ............. 2 točki**
**Odgovor: na prvem mestu je število $100$, na 99. mestu pa število $1856$ ...... 1 točka**

**III/2.** Označimo $m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$. Naj $a$ pomeni vrednost izraza $m! + 3m - 9$. Če je $m = 1$ ali $m = 2$, je $a$ negativen in zato $n$ ni naravno število. Pri $m = 3$ in $m = 5$ je $a$ enako 6 oziroma 126 in ni popolni kub. Pri $m = 4$ dobimo $n = 3$, pri $m = 6$ pa $n = 9$. Če je $m = 7$ ali $m = 8$, je $a$ deljiv s 3, a ne z 9, zato ne more biti popoln kub.

Dokažimo sedaj, da za noben $m \geq 9$ enačba $m! + 3(m - 3) = n^3$ ni rešljiva. Pri $m \geq 9$ je število $m!$ deljivo (vsaj) s $3^4$, zato $3 \mid n^3$, $3 \mid n$ in $3^3 \mid n^3$. Torej je število $m - 3$ deljivo z 9. Pišimo $m - 3 = 9k$. Naj bo $3^\alpha$ najvišja potenca števila 3, ki deli $k$. Potem je število $m! = (9k + 3)!$ deljivo z vsaj $3^{\max\{9\alpha+1,4\}}$, število $3(m - 3)$ pa z natančno $3^{\alpha+3}$. Torej je tudi $n^3$ deljivo s $3^{\alpha+3}$. Število $n^3$ ni deljivo s $3^{\alpha+4}$, saj $3^{\alpha+4} \mid m!$, število $3(m - 3)$ pa ni deljivo s $3^{\alpha+4}$. Dokazali smo torej, da sta najvišji potenci števila 3, ki delita števili $3(m - 3)$ in $n^3$, enaki.

Recimo, da je število $k$ deljivo še s kakšnim praštevilom $p$, $p \neq 3$. Naj bo $p^\beta$, $\beta > 0$, najvišja potenca tega praštevila, ki deli $k$. Potem je število $m! = (9k + 3)!$ deljivo z vsaj $p^{9\beta}$. Sledi $p^\beta \mid n^3$. Seveda pa število $p^{\beta+1}$ ne deli $n^3$, saj bi potem zaradi $p^{\beta+1} \mid m!$ imeli tudi $p^{\beta+1} \mid k$.

Skratka, dokazali smo, da imata števili $n^3$ in $3(m-3)$ povsem enake delitelje in sta zato enaki. Slednje pa zaradi zveze $m! + 3(m-3) = n^3$ seveda ni možno.

Edina para $(m, n)$ naravnih števil, ki ustrezata enačbi, sta tako $(4, 3)$ in $(6, 9)$.

**Izločitev možnosti $m = 1$ in $m = 2$ z utemeljitvijo ........................ 1 točka**
**Izločitev možnosti $m = 3$ in $m = 5$ z utemeljitvijo ........................ 1 točka**
**Sklepa: pri $m = 4$ je $n = 3$, pri $m = 6$ pa $n = 9$ ........................ 2 točki**
**Izločitev možnosti $m = 7$ in $m = 8$ z utemeljitvijo ........................ 1 točka**
**Ugotovitev, da za $m \geq 9$ ni rešitev ........................ 2 točki**
**(Opomba: če tekmovalec poda rešitvi enačbe in izločene možnosti za druga majhna števila $m$, ni pa utemeljeno, da za noben $m \geq 9$ enačba ni rešljiva, dobi 5 točk.)**

**III/3.** Za vsaka $x$ in $y$ veljata enačbi

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right), \tag{1}$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right). \tag{2}$$

Z upoštevanjem enačbe (1) dobimo

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma &= 2 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)) \\ &= \sin\alpha\cos(\beta-\gamma) - \sin\alpha\cos(\beta+\gamma) \end{aligned}$$

in zaradi (2) je to naprej enako

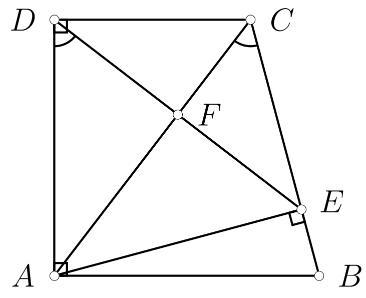
$$\frac{1}{2} \cdot (\sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\alpha-\beta+\gamma)) - \frac{1}{2} \cdot (\sin(\alpha+\beta+\gamma) - \sin(\alpha-\beta-\gamma)).$$

Z upoštevanjem $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, $\sin(\pi - x) = \sin x$ in zveze za dvojne kote, dobimo nato

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \sin(\pi-2\gamma) + \frac{1}{2} \cdot \sin(\pi-2\beta) - \frac{1}{2} \cdot \sin\pi - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha-\pi) \\ = \; & \frac{1}{2} \cdot \sin(2\gamma) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2\beta) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha) \\ = \; & \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \cos\beta + \sin\gamma \cdot \cos\gamma. \end{aligned}$$

**Zapis obrazcev (1) in (2) ........................ 1 točka**
**Smiselna uporaba obrazcev (1) in (2) ........................ 3 točke**
**Upoštevanje, da gre za kote trikotnika ........................ 1 točka**
**Uporaba obrazcev za kotne funkcije suplementarnih kotov ........................ 1 točka**
**Uporaba obrazcev za kotne funkcije dvojnih kotov ........................ 1 točka**

**III/4.** Označimo kote v trikotniku $ABC$ z $\alpha$, $\beta$ in $\gamma$, presečišče $AC$ in $DE$ pa z $F$. Tedaj je $\angle CAD = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Ker je $\angle CEA = \frac{\pi}{2} = \angle ADC$, je štirikotnik $AECD$ tetiven, zato je $\gamma = \angle ACE = \angle ADE$. Potem pa je $AC$ pravokotna na $ED$ natanko tedaj, ko je $\angle DFA = \frac{\pi}{2}$ in to je natanko tedaj, ko je $\frac{\pi}{2} - \alpha = \angle FAD = \pi - \angle ADF - \angle AFD = \pi - \gamma - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \gamma$, torej natanko tedaj, ko je $\alpha = \gamma$.



**Ugotovitev, da je štirikotnik $AECD$ tetiven ........ 1 točka**
**Uporaba enakosti obodnih kotov $\gamma = \angle ACE = \angle ADE$ ........ 1 točka**
**Sklep: $AC$ je pravokotna na $ED \Leftrightarrow \angle DFA = \frac{\pi}{2}$ ........ 2 točki**
**Sklep: to je natanko tedaj, ko je $\frac{\pi}{2} - \alpha = \angle FAD = \pi - \angle ADF - \angle AFD$ ...... 2 točki**
**Zaključek zadnjega sklepa: to je natanko tedaj, ko je $\alpha = \gamma$ ........ 1 točka**
**(Če tekmovalec dokaže trditev le v eno smer, lahko prejme skupaj največ 4 točke.)**

**III/5.** Denimo, da imamo polinom $p(x)$. Če ga delimo z $(x-1)(x-3)$, imamo $p(x) = (x-1)(x-3) \cdot q(x) + r(x)$, kjer je ostanek $r(x)$ stopnje 1 ali manj. Pišimo $r(x) = ax + b$. Ker je ostanek pri deljenju polinoma $p(x)$ z $x - \alpha$ enak $p(\alpha)$, velja:

$$\begin{aligned} 3 &= p(1) = (1-1)(1-3) \cdot q(1) + a + b = a + b \quad \text{in} \\ 5 &= p(3) = (3-1)(3-3) \cdot q(3) + 3a + b = 3a + b. \end{aligned}$$

Iz prve enakosti dobimo $a = 3 - b$. To vstavimo v drugo: $5 = 9 - 2b$, od koder izrazimo $b = 2$. Končno dobimo še $a = 1$. Iskani ostanek je $r(x) = x + 2$.
**Zapis polinoma $p(x) = (x-1)(x-3) \cdot q(x) + r(x)$ ........ 1 točka**
**Ugotovitev: stopnja ostanka $r(x)$ je enaka 1 ali manj, $r(x) = ax + b$ ......... 2 točki**
**Uporaba dejstva, da je $p(\alpha)$ ostanek pri deljenju polinoma $p(x)$ z $x - \alpha$ ..... 1 točka**
**Nastavitev sistema dveh enačb z dvema neznankama in rešitev le-tega ..... 3 točke**

**IV/1.** Zmnožek števk petmestnega števila oblike $\overline{abcba}$ je $a^2 \cdot b^2 \cdot c$. Števka $c$ mora zato biti popolni kvadrat, torej je lahko 1, 4 ali 9. Ostali števki sta poljubni neničelni, zato imamo 9 možnosti za $a$ in 9 možnosti za $b$. Skupaj je tako $9 \cdot 9 \cdot 3 = 243$ takih števil.
**Zapis petmestnega števila v obliki $\overline{abcba}$ ........ 1 točka**
**Sklep, da mora biti števka $c$ popolni kvadrat in zapisane možnosti za $c$ ...... 2 točki**
**Ugotovitev, da je $a$ lahko katerakoli od $0$ različna števka ........ 1 točka**
**Ugotovitev, da je $b$ lahko katerakoli od $0$ različna števka ........ 2 točki**
**Pravilen odgovor: takih števil je 243 ........ 1 točka**

**IV/2.** Spomnimo se, da je $a^b = 1$, če je $a = 1$ ali $a = -1$ in $b$ sodo število ali pa $b = 0$ in $a \neq 0$.

Najprej predpostavimo, da je osnova $x^2 - 7x + 11$ enaka 1. Enačbo $x^2 - 7x + 11 = 1$ zapišemo v obliki $x^2 - 7x + 10 = 0$ ter poiščemo rešitvi $x_1 = 2$ in $x_2 = 5$.
Poiščemo tisti vrednosti $x$, pri katerih je osnova $x^2 - 7x + 11$ enaka $-1$: enačbo $x^2 - 7x + 11 = -1$ preoblikujemo v $x^2 - 7x + 12 = 0$, ki ima rešitvi $x_3 = 3$ in $x_4 = 4$. Eksponent $x^2 + 5x - 6$ je pri obeh teh vrednostih sod: pri $x_3$ je enak $9 + 15 - 6 = 18$, pri $x_4$ pa $16 + 20 - 6 = 30$. To pomeni, da za $x = 3$ in $x = 4$ velja $(x^2 - 7x + 11)^{x^2+5x-6} = 1$.
Končno poiščemo še vrednosti, pri katerih je eksponent $x^2 + 5x - 6$ enak 0. Enačba $x^2 + 5x - 6 = 0$ ima rešitvi $x_5 = 1$ in $x_6 = -6$. Obe rešitvi ustrezata, saj tedaj osnova ni enaka 0. Izraz $(x^2 - 7x + 11)^{x^2+5x-6}$ ima vrednost 1, če je $x$ enak 1, 2, 3, 4, 5 ali $-6$.
**Rešitvi $x_1 = 2$ in $x_2 = 5$, ko je osnova $x^2 - 7x + 11$ enaka $1$ ........ 2 točki**
**Rešitvi $x_3 = 3$ in $x_4 = 4$, ko je osnova enaka $-1$ in eksponent sodo število ... 2 točki**
**Rešitvi $x_5 = 1$ in $x_6 = -6$, ko je eksponent enak $0$ ........ 3 točke**
**(Če tekmovalec pravilno določi $x_5$ in $x_6$, a ne preveri, da je osnova neničelna, odbijte 1 točko.)**

**IV/3.** Ker velja

$$x_n = y_{n-1} + x_{n-1} = y_{n-2} - x_{n-2} + y_{n-2} + x_{n-2} = 2y_{n-2} \text{ in}$$

$$y_n = y_{n-1} - x_{n-1} = y_{n-2} - x_{n-2} - y_{n-2} - x_{n-2} = -2x_{n-2}\,,$$

sledi $y_n = -2x_{n-2} = -2(2y_{n-4}) = -4y_{n-2}$ za $n \geq 5$. Po vrsti izračunamo $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = -2$ in $y_4 = -6$, zato je $y_n \neq 0$ za vsako naravno število $n$. Podobno izračunamo, da je $x_n = 2y_{n-2} = 2(-2y_{n-4}) = -4x_{n-4}$.
Ker velja

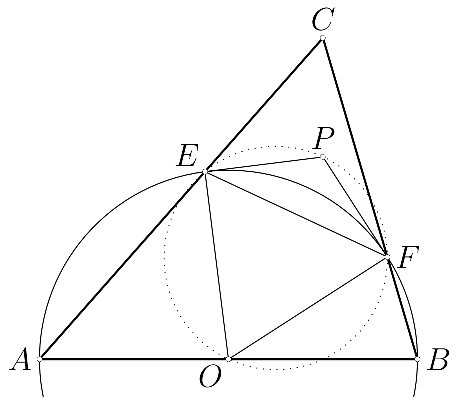
$$a_{n+4} = \frac{x_{n+4}}{y_{n+4}} = \frac{2y_{n+2}}{-2x_{n+2}} = \frac{-4x_n}{-4y_n} = a_n\,,$$

so v zaporedju le 4 različni členi. Ti členi so $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 3$, $a_3 = -2$ in $a_4 = -\frac{1}{3}$, njihova vsota pa je

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2} + 3 - 2 - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}\,.$$

**Zapis nekaj začetnih členov obeh danih zaporedij** .......................... **1 točka**
**Zvezi** $x_n = 2y_{n-2}$ **in** $y_n = -2x_{n-2}$ **ter sklep** $y_n \neq 0$ .......................... **3 točke**
**Zveza** $a_{n+4} = a_n$ .......................................... **2 točki**
**Vsota** $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{7}{6}$ .......................................... **1 točka**

**IV/4.** Označimo dolžine stranic in velikosti kotov trikotnika kot običajno. Polmer krožnice, očrtane trikotniku $ABC$, je $\frac{c}{2\sin\gamma}$, polmer druge krožnice pa $\frac{|EF|}{2\sin\angle EPF}$.




Trikotnik $AOE$ je enakokrak z vrhom $O$, zato je $\angle AEO = \alpha$, zunanji kot $\angle BOE$ pa je enak $2\alpha$. Trikotnik $OBF$ je enakokrak z vrhom $O$, zato je $\angle OFB = \beta$, zunanji kot $\angle FOA$ pa je enak $2\beta$. Tako pridemo do $\angle FOE = 2\alpha + 2\beta - \pi$ in $\angle EPF = \pi - (2\alpha + 2\beta - \pi) = 2(\pi - \alpha - \beta) = 2\gamma$.
Trikotnik $OEF$ je enakokrak, $|OF| = |OE| = \frac{c}{2}$ in kot ob vrhu $2\alpha + 2\beta - \pi$. Tako je $\frac{|EF|}{2} = \frac{c}{2}\sin(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2})$, od tod pa dobimo $|EF| = c\sin(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}) = -c\cos(\alpha + \beta) = c\cos\gamma$.
Končno lahko izračunamo polmer trikotniku $EPF$ očrtane krožnice: $\frac{|EF|}{2\sin\angle EPF} = \frac{c\cos\gamma}{2\sin(2\gamma)} = \frac{c\cos\gamma}{4\sin\gamma\cos\gamma} = \frac{c}{4\sin\gamma}$. Iskano razmerje je torej 2.

**Zapis polmerov** $\frac{c}{2\sin\gamma}$ **in** $\frac{|EF|}{2\sin\angle EPF}$ .......................................... **1 točka**
**Kota** $\angle FOE = 2\alpha + 2\beta - \pi$ **in** $\angle EPF = 2\gamma$ .......................................... **2 točki**
**Zapis** $|EF| = c\cos\gamma$ .......................................... **2 točki**
**Polmer trikotniku** $EPF$ **očrtane krožnice in izračunano razmerje** ............ **2 točki**

**IV/5.** Oglejmo si, kolikokrat se v prvi vrsti pojavi posamezna števka. Preštejmo najprej, koliko je devetic v številih od 1 do 999. To najlažje storimo tako, da preštejemo, koliko je števil z natanko eno devetico, z natanko dvema in z natanko tremi.
Če imamo natanko eno devetico, jo lahko postavimo na prvo, drugo ali tretje mesto. Na

preostali dve mesti lahko postavimo poljubno števko od 0 do 8, kar nam da za vsako števko 9 možnosti. Tako imamo 3 možne izbire mest za devetico, ko pa jo postavimo na določeno mesto, imamo še $9 \cdot 9$ možnosti za ostale števke. Skupaj je tako $3 \cdot 9 \cdot 9 = 243$ devetic.
Dve devetici lahko na tri mesta razporedimo na 3 načine, na preostali prostor pa lahko postavimo katerokoli števko od 0 do 8, zato je v takih številih $2 \cdot 3 \cdot 9 = 54$ devetic. Ostane še število 999, ki ima tri devetice.
Tako je v številih od 1 do 999 natanko $243 + 54 + 3 = 300$ devetic in prav tolikokrat nastopa vsaka druga števka. V številih od 1000 do 1999 je prav tako 300 dvojk, trojk, ..., enic pa je 1000 več. Vsota števk, ki nastopajo v številih od 1 do 1999, je tako

$$1000 + 2 \cdot 300 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 28000,$$

vsota števk od števila 2000 do 2006 pa je $2+3+4+5+6+7+8 = 35$. Vsota števil v drugi vrsti je 28035.

**Druga rešitev.** Naj $S(n)$ označuje vsoto števk števila $n$. Opazimo: če je $m+n = 1999$, potem je $S(m)+S(n) = 1+9+9+9 = 28$. Pokažimo, da je to res. Privzamemo lahko, da je $m$ trimestno in $n$ štirimestno. Zapišimo $m$ kot $m = \overline{m_1 m_2 m_3}$. Tedaj je $n = 1999 - \overline{m_1 m_2 m_3} = 1000 + (9 - m_1) \cdot 100 + (9 - m_2) \cdot 10 + (9 - m_3)$. Ker je $0 \leq 9 - m_i \leq 9$, so števke števila $n$ kar 1, $9 - m_1$, $9 - m_2$ in $9 - m_3$, zato je $S(m) + S(n)$ res enako 28.
Različnih parov števil $m$ in $n$, katerih vsota je 1999, je $\frac{1998}{2} + 1 = 1000$ (število 1999 je v paru z 0), torej je iskana vsota enaka

$$100 \cdot 28 + S(2000) + S(2001) + S(2002) + S(2003) + S(2004) + S(2005) + S(2006)$$

$$= 28000 + 35 = 28035.$$

**Preštevanje posameznih števk v številih do 999 .......................... 3 točke**
**Preštevanje posameznih števk v številih od 1000 do 1999 .................. 2 točki**
**Vsota števk v številih od 2000 do 2006 .................................... 1 točka**
**Rešitev: vsota števil v drugi vrsti je 28035 .............................. 1 točka**