Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

dMFA

51. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 4. april 2007

Naloge za 1. letnik

1. Na ravnini sta narisani koncentrični krožnici s polmeroma 7 cm in 11 cm. Manjša krožnica razdeli tetivo večje krožnice na 3 enako dolge dele. Koliko je dolga ta tetiva?

2. Tine je bil na tekmovanju, na katerem bi moral rešiti 20 nalog. Za vsako pravilno rešeno nalogo je prejel 8 točk, za napačno rešitev pa so mu odšteli 5 točk. Za nalogo, ki je ni reševal, je prejel 0 točk. Izvedel je, da je zbral 13 točk. Koliko nalog je reševal?

3. Hipotenuza AB pravokotnega trikotnika ABC s pravim kotom pri C je dolga 1 dm, kot BAC pa je velik 30°. V notranjosti trikotnika je točka D, da velja $\sphericalangle BDC = 90^\circ$ in $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DBA$. Naj bo E presečišče stranice AB in premice CD. Izračunaj dolžino daljice AE.

4. Dokaži neenakost
$$(ab+1)(a+b) \geq 4ab$$
za poljubni nenegativni realni števili a in b. Kdaj velja enakost?

5. Dolžina roba lesene kocke je naravno število, večje od 2. Kocko pobarvamo in jo nato razrežemo na enotske kocke. Število enotskih kock, ki imajo natanko dve pobarvani mejni ploskvi, je delitelj števila enotskih kock, ki nimajo nobene mejne ploskve pobarvane. Določi najmanjše naravno število, ki je lahko dolžina roba prvotne kocke.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

51. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 4. april 2007

Naloge za 2. letnik

1. Dokaži, da vsota nobenih dveh naravnih števil ni enaka najmanjšemu skupnemu večkratniku teh dveh števil.

2. Reši sistem enačb

$$\begin{aligned} x + y^2 &= 1, \\ x^2 + y^3 &= 1. \end{aligned}$$

3. Kateta AC pravokotnega trikotnika ABC s pravim kotom pri C je dolga 1 dm, kot BAC pa je velik $30°$. V notranjosti trikotnika je točka D, da velja $\sphericalangle BDC = 90°$ in $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DBA$. Naj bo F presečišče stranice AC in premice BD. Izračunaj dolžino daljice AF.

4. Naj bo a pozitivno realno število. Katero število je večje,

$$\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004} \quad \text{ali} \quad \sqrt{a+1003} - \sqrt{a}?$$

5. Žan je sklenil, da bo vsakemu dvomestnemu številu priredil enomestno, in sicer le z množenjem števk. Za števili 91 in 66 je tako zapisal:

$$91 \xrightarrow{9\cdot 1} 9$$
$$66 \xrightarrow{6\cdot 6} 36 \xrightarrow{3\cdot 6} 18 \xrightarrow{1\cdot 8} 8$$

Kolikim dvomestnim številom je priredil število 0?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

51. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 4. april 2007

Naloge za 3. letnik

1. Poišči vsa taka realna števila a, da je $\sqrt{7-a}+\sqrt{7+a}$ celo število.

2. Ploščina pravilnega večkotnika, ki je včrtan krogu s polmerom r, je enaka $3r^2$. Kateri pravilni večkotnik je to?

3. Naj bo E taka točka na stranici AB kvadrata $ABCD$, da je $|AE|=3|EB|$, F pa taka točka na stranici DA, da je $|AF|=5|FD|$. Označimo presečišče daljic DE in FC s K, presečišče DE in BF z L ter presečišče FB in EC z M. Naj bo p_1 vsota ploščin trikotnikov EML in DKC, p_2 pa vsota ploščin trikotnikov FLK in MBC. Določi razmerje $p_1 : p_2$.

4. Naj bodo a, b, c in d realna števila, večja od 1. Izračunaj vrednost izraza
$$a^{(\log_b c)-1}\, b^{(\log_c d)-1}\, c^{(\log_d a)-1}\, d^{(\log_a b)-1},$$
če veš, da je $\log_b a \cdot \log_d c = 1$.

5. Dolžine a, b in c robov lesenega kvadra so naravna števila, večja od 2, velja pa še $a=b$. Kvader pobarvamo in ga nato razrežemo na enotske kocke. Število enotskih kock, ki imajo natanko dve pobarvani mejni ploskvi, je za 16 večje od števila enotskih kock, ki nimajo nobene mejne ploskve pobarvane. Določi dolžine robov kvadra.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

51. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 4. april 2007

Naloge za 4. letnik

1. Prvi člen neskončnega geometrijskega zaporedja z vsoto 3 je naravno število, količnik pa je enak obratni vrednosti celega števila. Poišči prvi člen in količnik tega zaporedja.

2. Za vsako naravno število n zapišemo vsoto $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ kot število v desetiškem sestavu. Z največ koliko ničlami se lahko končajo ta števila?

3. Naj bosta M in N presečišči simetral kotov $\sphericalangle ACB$ in $\sphericalangle CBA$ trikotnika ABC s trikotniku očrtano krožnico, E in F pa presečišči premice MN s stranico AB oziroma AC. Dokaži: če je $|ME| = |EF| = |FN|$, je trikotnik ABC enakostraničen.

4. Poišči vsa realna števila x, za katera je vrednost izraza

$$\sqrt{x^2+2x-3} + \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{arc\,sin} \frac{x+1}{2}$$

celo število.

5. Vrtnar je gredico pravokotne oblike z diagonalama razdelil na 4 trikotnike. Na vsakem trikotniku bo posadil eno vrsto cvetlic, tako da bosta na trikotnikih, ki imata skupno stranico, posajeni različni vrsti cvetlic. Na voljo ima gerbere, hortenzije, lampijončke, perunike in žametnice. Na koliko načinov lahko posadi cvetlice?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

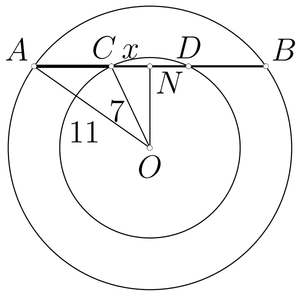
51. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 4. april 2007

Rešitve nalog

Vsaka naloga je vredna 7 točk. Vse matematično in logično korektne rešitve so enakovredne. Pri vrednotenju vsake naloge smiselno upoštevajte priloženi točkovnik. Tekmovalec naj ne prejme več kot 3 točke pri posamezni nalogi, če iz delne rešitve ni razvidna pot do končne rešitve naloge.

I/1. Označimo krajišči tetive z A in B, presečišči tetive z manjšo krožnico pa s C in D. Povežimo točki A in C s središčem O krožnic. Narišimo še pravokotnico iz središča O na tetivo in označimo z N njeno nožišče. Vemo, da je $|AC| = |CD| = |DB|$ in da točka N razpolavlja daljico CD. Naj bo $|CN| = x$. Tedaj je $|AC| = 2x$. Po Pitagorovem izreku je $11^2 - (3x)^2 = 7^2 - x^2$, od tod pa dobimo $8x^2 = 72$. Ker nas zanima pozitivna rešitev, izberemo $x = 3$. Tetiva AB je dolga 18 cm.

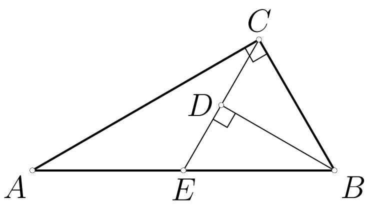


Vpeljava 2 pravokotnih trikotnikov s skupno kateto (npr. AON in CON) po 1 točka
Zapisan pogoj $|AC| = |CD| = |DB|$ (ali ekvivalenten) . . . . 1 točka
Izražava dolžine $|ON|$ s pomočjo Pitagorovega izreka v AON ali CON . . . . . . 1 točka
Enačba $11^2 - (3x)^2 = 7^2 - x^2$ in rešitev $x = 3$ . . . . 2 točki
Rešitev $|AB| = 18$ cm . . . . 1 točka

I/2. Denimo, da je pravilno rešil p nalog, napačno pa n nalog. Tedaj je $8p - 5n = 13$ in očitno mora biti n liho število. Ker je reševal 20 nalog, velja $p+n \leq 20$. Enačbo $8p-5n = 13$ lahko zapišemo v obliki $8p-8 = 5+5n$ oz. $8(p-1) = 5(n+1)$. Torej mora biti število $n+1$ deljivo z 8 in je lahko zato le $n = 7$, saj mora biti $n \leq 20$ liho število. Pri $n = 7$ dobimo še $p = 6$.
Tine je na tekmovanju reševal 13 nalog, 6 jih je rešil pravilno, 7 pa napačno.

Zapis $8p - 5n = 13$ . . . . 2 točki
Ocena $p + n \leq 20$ (ali npr. $p + n + s = 20$, pri čemer s označuje število nalog, ki jih ni reševal) . . . . 1 točka
Ugotovitev, da $n = 7$ in $p = 6$ ustrezata dobljeni enačbi . . . . 1 točka
Preverjanje oziroma izločitev ostalih možnosti . . . . 2 točki
Odgovor 13 nalog . . . . 1 točka

I/3. Trikotnik ABC je polovica enakostraničnega trikotnika, zato v njem velja $|BC| = \frac{1}{2}|AB|$. Označimo $\sphericalangle ACD = \varphi$. Tedaj je $\sphericalangle DCB = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACD = \frac{\pi}{2} - \varphi$ in zato je



$$\sphericalangle CBD = \pi - \sphericalangle BDC - \sphericalangle DCB = \pi - \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \varphi) = \varphi.$$

Zaradi $\sphericalangle DBA = \sphericalangle ACD = \varphi$ je $60^\circ = \sphericalangle CBA = \sphericalangle DBA + \sphericalangle CBD = 2\varphi$ in od tod $\varphi = 30^\circ$. Ker je $\sphericalangle CBE = 60^\circ$ in $\sphericalangle ECB = \sphericalangle DCB = \frac{\pi}{2} - \varphi = 60^\circ$, je trikotnik EBC enakostraničen. Sledi $|EB| = |BC| = \frac{1}{2}|AB|$ in $|AE| = |AB| - |EB| = \frac{1}{2}|AB| = 5$ cm.

Ugotovitev $|BC| = \frac{1}{2}|AB|$ **.......... 2 točki**
Izračun, da sta kota $\sphericalangle CBD$ **in** $\sphericalangle DBA$ **enaka ter zato oba** 30° **.......... 2 točki**
Sklep, da je trikotnik EBC **enakostraničen .... 2 točki**
Sklep $|AE| = 5$ **cm .... 1 točka**

I/4.

1. način Dana neenakost je ekvivalentna neenakosti $a^2b + a + b + ab^2 - 4ab \geq 0$. Ker je

$$\begin{aligned} a^2b + a + b + ab^2 - 4ab &= a^2b - 2ab + b + ab^2 - 2ab + a = \\ &= b(a^2 - 2a + 1) + a(b^2 - 2b + 1) = b(a-1)^2 + a(b-1)^2 \end{aligned}$$

in sta $b(a-1)^2$ ter $a(b-1)^2$ nenegativna, je res $a^2b + a + b + ab^2 - 4ab \geq 0$.

Enakost velja natanko takrat, ko je $b(a-1)^2 = 0$ in $a(b-1)^2 = 0$, torej mora veljati $a = b = 0$ ali pa $a = b = 1$.

Ugotovitev, da neenakost velja za poseben primer (npr. $a = 0$ **ali** $b = 0$**) .... 1 točka**
Zapis $a^2b + a + b + ab^2 - 4ab \geq 0$ **.......... 1 točka**
Preoblikovanje izraza v $b(a-1)^2 + a(b-1)^2$ **.......... 2 točki**
Sklep, da sta $b(a-1)^2$ **in** $a(b-1)^2$ **nenegativna .... 1 točka**
Enakost velja pri $a = b = 0$ **in** $a = b = 1$ **.......... po 1 točka**

2. način Aritmetično geometrijska neenakost (na kratko: A-G neenakost) pove, da za nenegativni realni števili x in y velja neenakost $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ oziroma $x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Če jo uporabimo za $x = a$ in $x = b$, dobimo

$$(ab+1)(a+b) \geq (ab+1) \cdot 2\sqrt{ab}. \tag{1}$$

Ponovno uporabimo A-G neenakost za števili $x = ab$ in $y = 1$ ter dobimo

$$(ab+1) \cdot 2\sqrt{ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot 1} \cdot 2\sqrt{ab} = 4ab, \tag{2}$$

kar je bilo potrebno dokazati.

Enačaj v A-G neenakosti velja natanko tedaj, ko sta števili x in y enaki. Torej v (1) velja enačaj za $a = b$. Če je $a = b = 0$, v (2) očitno velja enakost. Če pa je $a = b \neq 0$, bo v enakost (2) veljala le še za $ab = 1$, torej $a = b = 1$.

Ugotovitev, da neenakost velja za poseben primer (npr. $a = 0$ **ali** $b = 0$**) .... 1 točka**
Sklep $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ **.......... 2 točki**
Sklep $ab + 1 \geq 2\sqrt{ab}$ **.......... 2 točki**
Enakost velja pri $a = b = 0$ **in** $a = b = 1$ **.......... po 1 točka**

I/5. Enotske kocke, ki imajo pobarvani natanko dve mejni ploskvi, se nahajajo vzdolž robov, a ne ob oglišcih prvotne kocke. Vzdolž vsakega roba jih je $a-2$. Vseh robov je 12, torej jih je skupaj $12 \cdot (a-2)$.

Preštejmo še enotske kocke, ki nimajo pobarvane nobene mejne ploskve. V prvotni kocki se te nahajajo v notranjosti, torej tvorijo kocko z robom, dolgim $a-2$. Teh je $(a-2)^3$.

Ker število $12 \cdot (a-2)$ deli $(a-2)^3$, od tod sledi, da $12 = 2^2 \cdot 3$ deli $(a-2)^2$. Torej 6 deli $a-2$. Najmanjše število, za katero to velja, je $6 = a-2$, to je $a = 8$.

Preštevanje kock z dvema pobarvanima ploskvama .... **1 točka**
Preštevanje kock brez pobarvanih ploskev .... **1 točka**
Sklep, da 12 **deli** $(a-2)^2$ .... **2 točki**
Sklep, da 6 **deli** $a-2$ .... **2 točki**
Sklep $a = 8$ .... **1 točka**

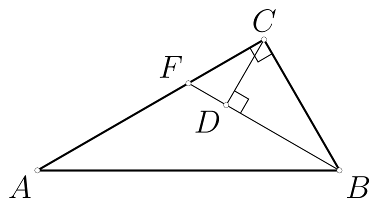
II/1. Recimo, da taki dve števili obstajata. Označimo ju z a in b. Označimo z d največji skupni delitelj števil a in b. Potem je $a = nd$ in $b = md$, pri čemer sta si števili n in m tuji. Iz pogoja naloge sledi $d(n+m) = dnm$. Torej bi moralo veljati $n + m = nm$. Ker pa sta si števili n in m tuji, sta si tuji tudi števili $n+m$ in nm. Torej mora veljati $n + m = nm = 1$, kar pa ni možno. Torej števili a in b ne obstajata.

Zapis $a = dn$ **in** $b = dm$ **(ali enakovreden z vpeljavo** d**)** .... **1 točka**
Ugotovitev, da je najmanjši skupni večkratnik števil a **in** b **enak** dmn .... **1 točka**
Preoblikovanje enačbe v $m + n = mn$ **(ali enakovredne brez** d**)** .... **1 točka**
Sklep, da sta si $m + n$ **in** mn **tuji (ali pa, da** m **deli** n **ali obratno)** .... **2 točki**
Sklep $m + n = mn = 1$ **(ali** $m = 1$ **ali** $n = 1$**)** .... **1 točka**
Eksplicitno zapisano, da taki števili a **in** b **ne obstajata** .... **1 točka**

II/2. Ker je $x = 1 - y^2$, sledi $(1-y^2)^2 + y^3 = 1$. Torej je $1 - 2y^2 + y^4 + y^3 = 1$, kar nam da $y^2(y^2 + y - 2) = y^2(y+2)(y-1) = 0$. Rešitve so $y = 0$, $y = -2$ in $y = 1$, pripadajoči x pa $x = 1$, $x = -3$ in $x = 0$.

Zapis $x = 1 - y^2$ **in vstavljanje v drugo enačbo** .... **2 točki**
Razcep na $y^2(y+2)(y-1) = 0$ .... **2 točki**
Vsak par rešitev $(x, y) \in \{(1,0),\ (-3,-2),\ (0,1)\}$ .... **po 1 točka**

II/3. Trikotnik ABC je polovica enakostraničnega trikotnika, zato v njem velja $|AC| = |AB|\frac{\sqrt{3}}{2}$, kar nam da $|AB| = \frac{2}{\sqrt{3}}|AC|$ in $|BC| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{\sqrt{3}}{3}|AC|$.
Označimo $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DBA = \varphi$. Tedaj je $\sphericalangle DCB = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACD = \frac{\pi}{2} - \varphi$ in zato je



$$\sphericalangle DBC = \pi - \sphericalangle BDC - \sphericalangle DCB = \pi - \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \varphi) = \varphi.$$

Torej velja $60° = \sphericalangle CBA = \sphericalangle CBD + \sphericalangle DBA = 2\varphi$, zato je $\varphi = 30°$.
Ker je $\sphericalangle FBC = \sphericalangle DBC = 30°$, je trikotnik BFC podoben trikotniku ABC. Torej velja $|CF| : |BC| = |BC| : |AC|$, od koder sledi

$$|CF| = \frac{|BC|^2}{|AC|} = \frac{\frac{1}{3}|AC|^2}{|AC|} = \frac{1}{3}|AC|.$$

Torej je $|AF| = |AC| - |CF| = \frac{2}{3}|AC| = \frac{2}{3}$ dm.

Izračun $|BC| = \frac{\sqrt{3}}{3}|AC|$ (ali v obliki $\frac{1}{\sqrt{3}}|AC|$) .... 1 točka
Izračun, da sta kota $\sphericalangle CBD$ in $\sphericalangle DBA$ enaka ter zato oba $30°$ .... 2 točki
Omenjena podobnost trikotnikov BFC in ABC .... 1 točka
Izračun $|CF| = \frac{1}{3}|AC|$ .... 2 točki
Sklep $|AF| = \frac{2}{3}$ dm .... 1 točka

II/4. 1. način Pokažimo, da je razlika $(\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004}) - (\sqrt{a+1003} - \sqrt{a})$ negativna, kar je enakovredno neenakosti

$$\sqrt{a+2007} + \sqrt{a} < \sqrt{a+1004} + \sqrt{a+1003}.$$

Ker sta izraza na obeh straneh neenakosti pozitivna, jo lahko kvadriramo in dobimo

$$a + 2007 + 2\sqrt{(a+2007)a} + a < a + 1004 + 2\sqrt{(a+1004)(a+1003)} + a + 1003$$

oziroma
$$\sqrt{a^2 + 2007a} < \sqrt{a^2 + 2007a + 1004 \cdot 1003}.$$

Ker je število a pozitivno, dobljena neenakost res velja. Torej je $\sqrt{a+1003} - \sqrt{a}$ večje od $\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004}$ za vsako pozitivno število a.

Predpostavka, da je $\sqrt{a+1003} - \sqrt{a} > \sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004}$ .... 1 točka
Kvadriranje $\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004} < \sqrt{a+1003} - \sqrt{a}$ (oziroma enakovrednega izraza, v katerem na obeh straneh nastopajo pozitivne količine) .... 2 točki
Preoblikovanje na enakovredno neenakost, ki velja za vsak a .... 3 točke
Sklep $\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004} < \sqrt{a+1003} - \sqrt{a}$ .... 1 točka
(Če tekmovalec na nekem mestu kvadrira negativne količine in dobi obratno neenakost, lahko prejme skupaj največ 4 točke.)

2. način Izraza najprej preoblikujemo

$$\begin{aligned}
\sqrt{a+2007}-\sqrt{a+1004} &= \frac{(\sqrt{a+2007}-\sqrt{a+1004})(\sqrt{a+2007}+\sqrt{a+1004})}{\sqrt{a+2007}+\sqrt{a+1004}} = \\
&= \frac{(a+2007)-(a+1004)}{\sqrt{a+2007}+\sqrt{a+1004}} = \frac{1003}{\sqrt{a+2007}+\sqrt{a+1004}}, \\
\sqrt{a+1003}-\sqrt{a} &= \frac{(\sqrt{a+1003}-\sqrt{a})(\sqrt{a+1003}+\sqrt{a})}{\sqrt{a+1003}+\sqrt{a}} = \\
&= \frac{(a+1003)-a}{\sqrt{a+1003}+\sqrt{a}} = \frac{1003}{\sqrt{a+1003}+\sqrt{a}}.
\end{aligned}$$

Ker za imenovalce dobljenih ulomkov velja $\sqrt{a+2007}+\sqrt{a+1004} > \sqrt{a+1003}+\sqrt{a}$, je seveda

$$\sqrt{a+2007}-\sqrt{a+1004} < \sqrt{a+1003}-\sqrt{a}.$$

Predpostavka, da je $\sqrt{a+1003}-\sqrt{a} > \sqrt{a+2007}-\sqrt{a+1004}$ **. . . . . 1 točka**
Zapis $\sqrt{a+2007}-\sqrt{a+1004} = \frac{1003}{\sqrt{a+2007}+\sqrt{a+1004}}$ **. . . . . 2 točki**
Zapis $\sqrt{a+1003}-\sqrt{a} = \frac{1003}{\sqrt{a+1003}+\sqrt{a}}$ **. . . . . 2 točki**
Primerjava imenovalcev $\sqrt{a+2007}+\sqrt{a+1004} > \sqrt{a+1003}+\sqrt{a}$ **in zaključek 2 točki**

II/5. Število 0 je gotovo priredil vsem dvomestnim številom, ki imajo eno števko enako 0 (to so 10, 20 ... 90). Teh je 9.

Število 0 je priredil tudi tistim številom, ki se po enem koraku spremenijo v dvomestno število s števko 0. V $10 = 2 \cdot 5$ se spremenita števili 25 in 52, v $20 = 4 \cdot 5$ se spremenita 45 in 54, v $30 = 6 \cdot 5$ se spremenita 65 in 56, v $40 = 8 \cdot 5$ pa se spremenita števili 85 in 58. Teh števil je 8. Drugih dvomestnih števil, deljivih z 10, ne moremo dobiti kot zmnožek dveh števk.

Število 0 je priredil tudi vsem tistim dvomestnim številom, ki imajo zmnožek števk enak 25, 45, 52, 54, 56, 58, 65 ali 85. Prav hitro uvidimo, da je nemogoče dobiti zmnožek 52, 58, 65 in 85, druge vrednosti pa dobimo s števili 55, 59, 69, 78, 87, 95 oziroma 96. Teh števil je 7.

Ker nobenega izmed števil 55, 59, 69, 78, 87, 95 in 96 ni možno dobiti kot zmnožek dveh števk, ni drugih dvomestnih števil, ki bi jim Žan lahko priredil število 0. Ugotovili smo, da je $9 + 8 + 7 = 24$ dvomestnih števil, ki jim lahko priredi število 0.

Takšna so števila $10, 20, \ldots, 90$ **. . . . . 1 točka**
Sklep, da so takšna še števila, ki se spremenijo v $10, 20, \ldots, 90$ **. . . . . 1 točka**
Sklep, da so taka števila 25, 52, 45, 54, 65, 56, 85 **in** 58 **. . . . . 1 točka**
Število 0 **je priredil tudi tistim, katerih zmnožek števk je enak enemu izmed zgornjih števil . . . . 1 točka**
Takšna so števila 55, 59, 69, 78, 87, 95, 96 **. . . . . 1 točka**
Sklep, da ostalih števil ni možno dobiti na tak način . . . . 1 točka
Odgovor 24 **števil . . . . 1 točka**
(Če tekmovalec nalogo pravilno reši tako, da za vsa dvomestna števila izračuna ustrezna prirejena enomestna števila, priznajte 7 točk. Če pri tej metodi reševanja ne najde vseh rešitev ali ne preveri vseh dvomestnih števil, za vsako manjkajočo rešitev ali nepreverjeno dvomestno število odbijte 1 točko.)

III/1. Naj bo $\sqrt{7-a}+\sqrt{7+a}=n$, $n\in\mathbb{N}$. Enačbo kvadriramo: $14+2\sqrt{49-a^2}=n^2$ in preoblikujemo v

$$\sqrt{49-a^2}=\frac{n^2}{2}-7. \tag{3}$$

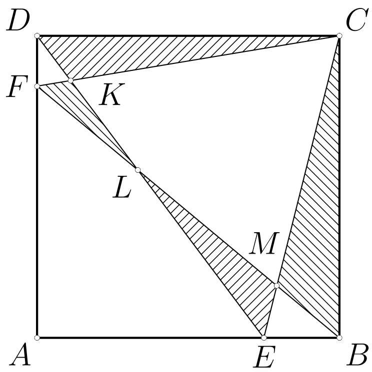
Ker je $\sqrt{49-a^2}\geq 0$, iz enačbe (3) sledi, da je $\frac{n^2}{2}-7\geq 0$ in $n>3$. Ker pa je $\sqrt{49-a^2}\leq 7$, iz enačbe (3) sledi tudi, da je $\frac{n^2}{2}-7\leq 7$, kar nam da $n<6$. Torej je lahko le $n=4$ in $a=\pm 4\sqrt{3}$ ali $n=5$ in $a=\pm\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

Zapis brez korenov $a^2=7n^2-\frac{n^4}{4}$ **(ali enakovreden) .... 2 točki**
Sklep $n<6$ **.. 2 točki**
Rešitvi $n=4$ **in** $a=\pm 4\sqrt{3}$ **ali** $n=5$ **in** $a=\pm\frac{5}{2}\sqrt{3}$ **....................... po 1 točka**
(Če tekmovalec navede le obe pozitivni rešitvi, priznajte 1 točko.)
Sklep ali preizkus, da ostala števila $n<6$ **ne ustrezajo .... 1 točka**

III/2. Mislimo si, da smo pravilni n-kotnik razdelili na skladne enakokrake trikotnike, ki imajo osnovnico enako stranici večkotnika, kraka pa sta enako dolga kot polmer kroga in oklepata kot $\frac{2\pi}{n}$. Ploščina posameznega trikotnika je $\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$, ploščina n-kotnika pa $\frac{n}{2}\cdot r^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$. Tako imamo $3\cdot r^2=\frac{n}{2}\cdot r^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$, kar preuredimo v $\frac{6}{n}=\sin\frac{2\pi}{n}$, od tod pa sklepamo $n=12$. Pravilni dvanajstkotnik, ki ga včrtamo krogu s polmerom r ima res ploščino $3r^2$. Opomniti velja, da je to res edina rešitev. Včrtani večkotnik, ki bi imel večje število stranic, bi imel tudi večjo ploščino.

Razdelitev n**-kotnika na skladne trikotnike .... 1 točka**
Ploščina trikotnika je $\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$ **.. 1 točka**
Ploščina n**-kotnika je** $\frac{n}{2}\cdot r^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$ **....................................... 1 točka**
Zapis enačbe $\frac{6}{n}=\sin\frac{2\pi}{n}$ **(ali podobne) .... 1 točka**
Rešitev $n=12$ **.. 2 točki**
Sklep, da je rešitev največ ena .... 1 točka

III/3. Naj bo p ploščina štirikotnika $CKLM$. Tedaj je p_2+p enako ploščini trikotnika FBC. Dolžina višine na stranico BC v trikotniku FBC je enaka $|AB|$, torej je ploščina trikotnika enaka $\frac{|AB|\cdot|BC|}{2}=\frac{|AB|^2}{2}$. Zato je



$$p_2=\frac{|AB|^2}{2}-p.$$

Podobno sklepamo, da je p_1+p enako ploščini trikotnika DEC, le-ta pa je enaka $\frac{|DC|\cdot|CB|}{2}=\frac{|AB|^2}{2}$. Torej je tudi

$$p_1=\frac{|AB|^2}{2}-p$$

in je tako razmerje $p_1:p_2$ enako 1.

Vpeljava ploščine štirikotnika $CKLM$ **................................ 3 točke**
Zapis $p_1=\frac{|AB|^2}{2}-p$ **(ali podoben) .... 1 točka**
Zapis $p_2=\frac{|AB|^2}{2}-p$ **(ali podoben) .... 1 točka**
Sklep $p_1:p_2=1$ **.. 2 točki**

III/4. Označimo $S = a^{(\log_b c)-1}\, b^{(\log_c d)-1}\, c^{(\log_d a)-1}\, d^{(\log_a b)-1}$. Zapišimo $1 = \log_b a \cdot \log_d c = \frac{\log a \cdot \log c}{\log b \cdot \log d}$. S pomočjo tega izračunamo

$$\begin{aligned}
\log(abcdS) &= \log\left(a^{\log_b c} b^{\log_c d} c^{\log_d a} d^{\log_a b}\right) = \\
&= \log a^{\log_b c} + \log b^{\log_c d} + \log c^{\log_d a} + \log d^{\log_a b} = \\
&= \log_b c \cdot \log a + \log_c d \cdot \log b + \log_d a \cdot \log c + \log_a b \cdot \log d = \\
&= \frac{\log c \cdot \log a}{\log b} + \frac{\log d \cdot \log b}{\log c} + \frac{\log a \cdot \log c}{\log d} + \frac{\log b \cdot \log d}{\log a} = \\
&= \frac{\log a \cdot \log c \cdot (\log b + \log d)}{\log b \cdot \log d} + \frac{\log b \cdot \log d \cdot (\log a + \log c)}{\log a \cdot \log c} = \\
&= \log a + \log b + \log c + \log d = \log(abcd)
\end{aligned}$$

od koder sledi $abcdS = abcd$ oziroma $S = 1$.

Sklep $\frac{\log a \cdot \log c}{\log b \cdot \log d} = 1$ .... 1 točka
Logaritmiranje izraza S ali $abcdS$ .... 2 točki
Zapis vseh logaritmov na enako osnovo .... 2 točki
Rešitev $S = 1$ .... 2 točki

III/5. Na robu kvadra dolžine a je $a-2$ enotskih kock, ki imajo pobarvani natanko dve ploskvi, na robu dolžine c pa jih je $c-2$. Ker je v kvadru 8 robov dolžine a in 4 robovi dolžine c, je število vseh kock z dvema pobarvanima ploskvama enako $8(a-2)+4(c-2)$. Kocke, ki nimajo pobarvanih stranic, se nahajajo v notranjosti in jih je $(a-2)(a-2)(c-2)$. Veljati mora

$$8(a-2)+4(c-2) = 16 + (a-2)^2(c-2). \tag{4}$$

Izraz lahko poenostavimo v $0 = 32 + a^2c - 4ac - 2a^2$. Od tod lahko izrazimo $ac(a-4) = 2(a^2-16) = 2(a-4)(a+4)$. Če je $a = 4$, izraz velja za vsako naravno število c. Sicer pa lahko z $a-4$ delimo in dobimo $ac = 2a+8$ oziroma $c = 2 + \frac{8}{a}$. Torej je a delitelj števila 8 in ker je $a \geq 3$ in $a \neq 4$, je zato lahko le $a = 8$ in $c = 3$.

Enačbo (4) lahko uženemo tudi drugače, če označimo $x = a-2$ in $y = c-2$. Tedaj dobimo $8x + 4y = 16 + x^2y$ oziroma

$$0 = x^2y - 4y + 16 - 8x = y(x-2)(x+2) + 8(2-x) = (x-2)(y(x+2)-8).$$

Tedaj je bodisi $x = 2$ in y poljuben ali pa je $y(x+2) = 8$. Od tod sledi, da je za $x \neq 2$ izraz $x+2$ lahko 8, pri tem pa je $y = 1$.

Za robove kvadra velja bodisi $a = 4$ in c poljubno število ali pa $a = 8$ in $c = 3$.

Zapis števila kock z dvema in brez pobarvanih ploskev .... 1 točka
Enačba (4) (ali enakovredna) .... 1 točka
Razcep $ac(a-4) = 2(a-4)(a+4)$ oz. $(x-2)(y(x+2)-8) = 0$ (ali podoben) . 2 točki
Rešitev $a = 4$, c poljuben .... 1 točka
Sklep, da je a (ali $c-2$ ali $x+2$ ali y) delitelj števila 8 .... 1 točka
Rešitev $a = 8$, $c = 3$ .... 1 točka
(Če tekmovalec vpelje x in y (ali podobno) in v celoti reši nalogo, a ne zapiše rezultata za a in c, dodelite 6 točk.)

IV/1. Naj bo prvi člen $a_1 = n$ in količnik $q = \frac{1}{m}$. Ker je vsota geometrijskega zaporedja končna, je $|q| < 1$ oziroma $|m| > 1$. Tedaj je $n + nq + nq^2 + \cdots = \frac{n}{1-q} = \frac{n}{1-\frac{1}{m}} = 3$. Od tod dobimo $n = 3(1 - \frac{1}{m}) = 3 - \frac{3}{m}$. Ker je n naravno število, sta le dve možnosti za m, in sicer $m_1 = 3$ in $m_2 = -3$. Imamo torej dve rešitvi naloge: zaporedje, ki ima prvi člen $a_1 = 2$ in količnik $q = \frac{1}{3}$, ali zaporedje, ki ima prvi člen $a_1 = 4$ in količnik $q = -\frac{1}{3}$.

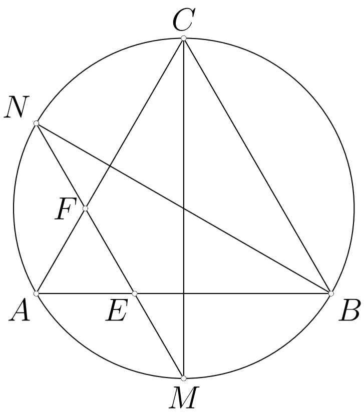
Zapis $q = \frac{1}{m}$ **.. 1 točka**
Sklep $|m| > 1$ **.. 1 točka**
Zapis $n = 3 - \frac{3}{m}$ **(ali podoben) .... 2 točki**
Sklep, da je m **lahko le** 3 **ali** -3 **.. 1 točka**
Rešitvi $a_1 = 2$, $q = \frac{1}{3}$ **in** $a_1 = 4$, $q = -\frac{1}{3}$ **.. po 1 točka**

IV/2. Najprej je $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$ in $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$. Denimo, da bi pri nekem naravnem številu $n > 3$ izrazili vsoto $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ kot število, ki bi se končalo s tremi ničlami. To število bi bilo deljivo s $1000 = 8 \cdot 125$. Oglejmo si ostanek posameznega seštevanca v omenjeni vsoti pri deljenju z 8. Seštevanec 1^n da ostanek 1, seštevanca 2^n in 4^n pa dasta ostanek 0, saj je $n > 3$. Zapišimo $3^n = (2+1)^n = 2^n + n \cdot 2^{n-1} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2^3 + \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 1} \cdot 2^2 + n \cdot 2 + 1$. Od tod sklepamo, da bo ostanek seštevanca 3^n pri deljenju z 8 enak ostanku izraza $\frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 1} \cdot 2^2 + n \cdot 2 + 1 = 2n^2 + 1$ pri deljenju z 8. Hitro uvidimo, da ima izraz $2n^2 + 1$ ostanek 1, če je n sodo število, saj je v tem primeru $2n^2$ deljivo z 8. Če je n liho število, zapišemo $n = 2k + 1$ in je $2 \cdot (2k+1)^2 + 1 = 8k^2 + 8k + 3$, od koder vidimo, da je ostanek enak 3.

Ugotovili smo: če vsoto $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ pri poljubnem $n > 3$ delimo z 8, dobimo ostanek 2 ali 4. Ker ta vsota ni deljiva z 8, je ne moremo pri nobenem naravnem številu n zapisati kot število, ki bi se končalo z več kot dvema ničlama. Torej se število oblike $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ lahko konča z največ dvema ničlama.

Izračun $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$ **.. 1 točka**
Opazovanje ostankov izraza pri deljenju z 8, 125 **ali** 1000 **.. 1 točka**
Sklep, da je za $n > 3$ **število** $2^n + 4^n$ **deljivo z** 8 **.. 1 točka**
Sklep, da je ostanek števila 3^n **pri deljenju z** 8 **bodisi** 1 **bodisi** 3 **.. 1 točka**
Sklep, da je ostanek števila $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ **pri deljenju z** 8 **bodisi** 2 **bodisi** 4**. 1 točka**
Sklep, da zato nobeno število oblike $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ **ni deljivo s** 1000 **....... 1 točka**
Eksplicitno zapisano, da se število oblike $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ **lahko konča z največ dvema ničlama .... 1 točka**

IV/3. Označimo kote trikotnika ABC na običajen način z α, β in γ. Po izreku o obodnih kotih je $\sphericalangle ANM = \sphericalangle ACM = \frac{\gamma}{2}$ in $\sphericalangle NMA = \sphericalangle NBA = \frac{\beta}{2}$. Prav tako velja $\sphericalangle CAN = \sphericalangle CBN = \frac{\beta}{2}$ in $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BCM = \frac{\gamma}{2}$. Zato so si trikotniki AME, NAF in NMA podobni.



Po drugi strani pa je $\sphericalangle AFN = \sphericalangle MEA$, zato je $\sphericalangle AFE = \pi - \sphericalangle AFN = \pi - \sphericalangle MEA = AEF$, torej je trikotnik AFE enakokrak ter velja $|AE| = |AF|$.

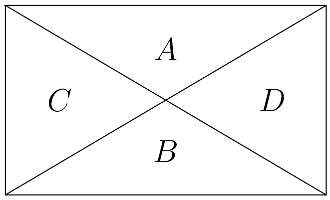
Iz podobnosti trikotnikov AME in NAF sledi, $\frac{|AE|}{|EM|} = \frac{|NF|}{|FA|}$, od koder z upoštevanjem $|NF| = |ME|$ in $|AE| = |AF|$ dobimo $|AE| = |EM| = |FE|$. Trikotnik AEM je zato enakokrak z vrhom pri E, od koder sledi, da je $\beta = \gamma$. Trikotnik AFE pa je enakostraničen, torej je $\alpha = \frac{\pi}{3}$, kar pravzaprav pomeni, da je trikotnik ABC enakostraničen.

Izračun $\sphericalangle ANM = \frac{\gamma}{2}$, $\sphericalangle NMA = \frac{\beta}{2}$, $\sphericalangle CAN = \frac{\beta}{2}$, $\sphericalangle BAM = \frac{\gamma}{2}$ . . . . 2 točki
(Za izračun le 2 ali 3 izmed zgoraj naštetih kotov dodelite 1 točko)
Omenjena podobnost dveh izmed trikotnikov AME, NAF in NMA . . . . 1 točka
Izpeljava $|AE| = |AF|$ (ali $|AN| = |AM|$) . . . . 1 točka
Sklep $\gamma = \beta$ . . . . 1 točka
Sklep, da je trikotnik AEF enakostraničen . . . . 1 točka
Sklep, da je trikotnik ABC enakostraničen . . . . 1 točka

IV/4. Označimo $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + \frac{2}{\pi} \cdot \text{arc sin}\frac{x+1}{2}$. Najprej si oglejmo, za katere x je funkcija f sploh definirana. Veljati mora $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ in $-1 \leq \frac{x+1}{2} \leq 1$. Prvi pogoj lahko zapišemo kot $(x+3)(x-1) \geq 0$, od koder sledi $x \leq -3$ ali $x \geq 1$. Drugi pogoj lahko preoblikujemo v $-2 \leq x+1 \leq 2$ oziroma $-3 \leq x \leq 1$. Torej je funkcija definirana pri $x = -3$ in $x = 1$. V prvem primeru je $f(-3) = 0 + \frac{2}{\pi} \cdot (-\frac{\pi}{2}) = -1$, v drugem pa $f(1) = 0 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$. Edini realni števili, kjer je vrednost funkcije celo število, sta torej $x = -3$ in $x = 1$.

Pogoj $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ . . . . 1 točka
Sklep $x \leq -3$ ali $x \geq 1$ . . . . 1 točka
Pogoj $-1 \leq \frac{x+1}{2} \leq 1$ . . . . 1 točka
Sklep $-3 \leq x \leq 1$ . . . . 1 točka
Funkcija f (oz. izraz) je definirana le za $x = 1$ in $x = -3$ . . . . 1 točka
Vrednost funkcije f (oz. izraza) je celo število pri $x = 1$ in $x = -3$ . . . . po 1 točka

IV/5. Na trikotnika A in B, ki imata skupno le oglišče, lahko vrtnar posadi katerikoli vrsti cvetlic. Denimo najprej, da bo na ta dva trikotnika posadil isto vrsto cvetlic. Ker ima na voljo 5 vrst cvetlic, lahko to naredi na 5 načinov. Pri tem ostaneta še druga dva trikotnika, ki imata skupno le oglišče, in 4 vrste cvetlic, ki jih lahko uporabi. Če bi tudi na ta trikotnika posadil isto vrsto cvetlic, lahko to napravi na 4 načine, sicer pa lahko napravi na $4 \cdot 3 = 12$ načinov. To pomeni, da ima v tem primeru $5 \cdot (4 + 12) = 80$ možnosti izbire.



Preostane nam še premislek, ko vrtnar posadi različni vrsti cvetlic na trikotnikih A in B. Za to ima $5 \cdot 4 = 20$ možnosti. Ostaneta trikotnika C in D, ki imata skupno le oglišče, in 3 vrste cvetlic. Če posadi na oba isto vrsto cvetlic, ima 3 možnosti, sicer pa $3 \cdot 2 = 6$ možnosti. V tem primeru ima vrtnar $20 \cdot (3 + 6) = 180$ možnosti izbire. Vrtnar lahko posadi cvetlice na $80 + 180 = 260$ načinov.

Preštete možnosti za enaki vrsti cvetlic na obeh parih trikotnikov .... 2 točki
Preštete možnosti, če sta na A in B enaki, na C in D pa različni vrsti .... 1 točka
Preštete možnosti, če sta na A in B različni, na C in D pa enaki vrsti .... 1 točka
Preštete možnosti za 4 različne vrste cvetlic .... 1 točka
Rešitev 260 načinov .... 2 točki