Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

54. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 31. marec 2010

Naloge za 1. letnik

1. Za realno število t in pozitivni realni števili a in b velja
$$2a^2 - 3abt + b^2 = 2a^2 + abt - b^2 = 0.$$
Izračunaj vrednost t.

2. Poišči vsa praštevila p, q in r, za katera je $15p + 7pq + qr = pqr$.

3. Naj bo ABC enakokrak trikotnik z vrhom C, ter naj bosta D in E taki točki na stranicah AC in BC, da se simetrali kotov $\angle DEB$ in $\angle ADE$ sekata v točki F, ki leži na stranici AB. Dokaži, da je F razpolovišče stranice AB.

4. Poišči najmanjše trimestno število, za katerega velja: če števke tega trimestnega števila zapišemo v obratnem vrstnem redu in dobljeno število prištejemo prvotnemu, dobimo število, ki vsebuje same lihe števke.

5. Vid je kvadrat $ABCD$ s stranico dolžine 20 enot razdelil na 400 enotskih kvadratkov. Eva je izbirala po 4 oglišča enotskih kvadratkov. Oglišča so ležala v notranjosti kvadrata $ABCD$ in so bila hkrati oglišča takega pravokotnika s stranicami, vzporednimi stranicam kvadrata $ABCD$, za katerega je obstajalo natanko 24 enotskih kvadratkov, ki so imeli vsaj eno skupno točko s stranicami tega pravokotnika. Določi vse možne ploščine takih pravokotnikov.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

dMFA

54. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 31. marec 2010

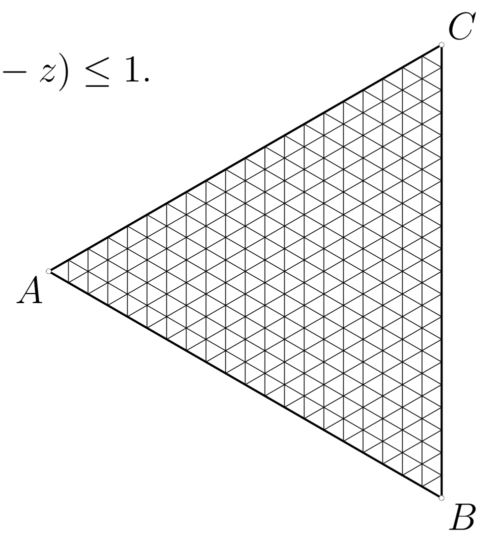
Naloge za 2. letnik

1. Za realni števili a in b velja $|a| \neq |b|$ in $\dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{a-b}{a+b} = 6$. Izračunaj vrednost izraza $\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3} + \dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$.

2. Naj bodo a, b in c neničelne števke ter p praštevilo, ki deli trimestni števili $\overline{abc}$ in $\overline{cba}$. Pokaži, da p deli vsaj eno izmed števil $a+b+c$, $a-b+c$ in $a-c$.

3. Dan je ostrokotni trikotnik ABC. Premica, vzporedna z BC, seka stranici AB in AC v točkah D in E. Krožnica, očrtana trikotniku ADE, seka daljico CD v točki F, $F \neq D$. Dokaži, da sta si trikotnika AFE in CBD podobna.

4. Dokaži, da za vsa realna števila x, y in z, za katera je $0 \leq x, y, z \leq 1$, velja neenakost
$$xyz + (1-x)(1-y)(1-z) \leq 1.$$
Kdaj velja enakost?



5. Vid je enakostraničen trikotnik ABC s stranico dolžine 20 enot razdelil na 400 malih enakostraničnih trikotnikov s stranico dolžine 1. Eva je izbirala po 4 oglišča malih trikotnikov. Oglišča so ležala v notranjosti trikotnika ABC in so bila hkrati oglišča takega paralelograma s stranicami, vzporednimi stranicam trikotnika ABC, za katerega je obstajalo natanko 46 malih trikotnikov, ki so imeli vsaj eno skupno točko s stranicami tega paralelograma. Določi vse možne ploščine takih paralelogramov.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

54. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 31. marec 2010

Naloge za 3. letnik

1. Naj bodo a, b in c naravna števila. Dokaži, da je število $a^2+b^2+c^2$ deljivo s 4 natanko tedaj, ko so števila a, b in c soda.

2. Poišči vsa realna števila x z intervala $[0, 2\pi)$, za katera velja

$$27 \cdot 3^{3\sin x} = 9^{\cos^2 x}.$$

3. Naj bo ABC ostrokotni trikotnik, v katerem je $|AB| > |AC|$. Naj bo D taka točka na stranici AB, da sta kota $\angle ACD$ in $\angle CBD$ enako velika. Označimo razpolovišče daljice BD z E, središče trikotniku BCD očrtane krožnice pa s S. Dokaži, da točke A, E, S in C ležijo na isti krožnici.

4. Poišči vsa neničelna realna števila x, za katera velja

$$\min\left\{4, x+\frac{4}{x}\right\} \geq 8\min\left\{x, \frac{1}{x}\right\}.$$

   OPOMBA. Za realni števili a in b je $\min\{a,b\} = \begin{cases} a, & \text{če je } a \leq b, \\ b, & \text{če je } a > b. \end{cases}$

5. Deset piratov je našlo skrinjo z zlatniki in srebrniki. V skrinji je bilo dvakrat toliko srebrnikov kot zlatnikov. Zlatnike so si razdelili tako, da razlika števil zlatnikov, ki sta jih dobila katerakoli dva pirata, ni bila deljiva z 10. Dokaži, da si srebrnikov ne morejo razdeliti tako, da razlika števil srebrnikov, ki bi jih dobila katerakoli dva pirata, ne bi bila deljiva z 10.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

54. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 31. marec 2010

Naloge za 4. letnik

1. Poišči vsa praštevila p, q in r, za katera je $p > q > r$ in so tudi števila $p - q$, $p - r$ in $q - r$ praštevila.

2. Naj bosta $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ krožnici s središčema O_1 in O_2, ki se sekata v točkah A in B. Naj bo p premica skozi točko A, ki seka krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ še v točkah C_1 in C_2. Denimo, da točka A leži med C_1 in C_2. Označimo presečišče premic C_1O_1 in C_2O_2 z D. Dokaži, da točke C_1, C_2, B in D ležijo na isti krožnici.

3. Poišči vse funkcije $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, ki zadoščajo enačbi
$$(y + 1)f(x + y) = f(xf(y))$$
za vsa nenegativna realna števila x in y.

4. Za realna števila a, b in c velja
$$(2b - a)^2 + (2b - c)^2 = 2(2b^2 - ac).$$
Dokaži, da so števila a, b in c zaporedni členi nekega aritmetičnega zaporedja.

5. Za katera naravna števila $n \geq 3$ obstaja n-kotnik (ne nujno konveksen), v katerem je vsaka stranica vzporedna neki drugi stranici?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.
Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

54. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 31. marec 2010

Rešitve nalog

Vsaka naloga je vredna 7 točk. Vse matematično in logično korektne rešitve so enakovredne. Pri vrednotenju vsake naloge smiselno upoštevajte priloženi točkovnik. Tekmovalec naj ne prejme več kot 3 točke pri posamezni nalogi, če iz delne rešitve ni razvidna pot do končne rešitve naloge.

I/1. 1. način. Če enačbi $2a^2 - 3abt + b^2 = 0$ in $2a^2 + abt - b^2 = 0$ seštejemo, dobimo $4a^2 - 2abt = 0$ oziroma $2a(2a - bt) = 0$. Ker je a pozitivno število, od tod sledi $2a - bt = 0$ oziroma $a = \frac{bt}{2}$. Vstavimo v prvo ali drugo izmed enačb in dobimo $b^2t^2 - b^2 = 0$, torej je $b^2(t^2 - 1) = 0$. Ker je $b > 0$, sledi $t^2 = 1$.

Dobili smo $t = 1$ ali $t = -1$. V prvem primeru je $a = \frac{b}{2}$, v drugem pa $a = -\frac{b}{2}$. Ker sta a in b pozitivni realni števili, je možen le prvi primer, zato je $t = 1$.

2. način. Če enačbi $2a^2-3abt+b^2 = 0$ in $2a^2+abt-b^2 = 0$ odštejemo, dobimo $-4abt+2b^2 = 0$ oziroma $2b(-2at + b) = 0$. Ker je b pozitivno število, od tod sledi $-2at + b = 0$ oziroma $b = 2at$. Vstavimo v prvo ali drugo izmed enačb in dobimo $2a^2 - 2a^2t^2 = 0$, torej je $2a^2(1 - t^2) = 0$. Ker je $a > 0$, sledi $t^2 = 1$.

Dobili smo $t = 1$ ali $t = -1$. V prvem primeru je $b = 2a$, v drugem pa $b = -2a$. Ker sta a in b pozitivni realni števili, je možen le prvi primer, zato je $t = 1$.

3. način. Če enačbi $2a^2-3abt+b^2 = 0$ in $2a^2+abt-b^2 = 0$ odštejemo, dobimo $-4abt+2b^2 = 0$ oziroma $2b(-2at + b) = 0$. Ker je b pozitivno število, od tod sledi $-2at + b = 0$ in zaradi $a \neq 0$ lahko izrazimo $t = \frac{b}{2a}$. Vstavimo v prvo ali drugo izmed enačb in dobimo $2a^2 - \frac{b^2}{2} = 0$, torej je $4a^2 - b^2 = 0$. Dobimo $b^2 = 4a^2$, ker pa sta a in b pozitivni števili, od tod sledi $b = 2a$. Tako je $t = \frac{2a}{2a} = 1$.

4. način. Če enačbi $2a^2-3abt+b^2 = 0$ in $2a^2+abt-b^2 = 0$ odštejemo, dobimo $-4abt+2b^2 = 0$ oziroma $2b(-2at + b) = 0$. Ker je b pozitivno število, od tod sledi $-2at + b = 0$ oziroma $b = 2at$.

Če dani enačbi seštejemo, dobimo $4a^2 - 2abt = 0$ oziroma $2a(2a - bt) = 0$. Ker je a pozitivno število, sledi $0 = 2a - bt$ in zaradi $b = 2at$ velja $0 = 2a(1 - t^2)$. Ker je $a > 0$, sledi $t^2 = 1$.

Dobili smo $t = 1$ ali $t = -1$. V prvem primeru je $b = 2a$, v drugem pa $b = -2a$. Ker sta a in b pozitivni realni števili, je možen le prvi primer, zato je $t = 1$.

Zapis enačbe $-4abt + 2b^2 = 0$ **ali** $4a^2 - 2abt = 0$ .... **1 točka**
Razcep $2b(-2at + b) = 0$ **ali** $2a(2a - bt) = 0$ .... **1 točka**
Ugotovitev $b = 2at$ **ali** $a = \frac{b}{2t}$ **ali** $a = \frac{bt}{2}$ **ali** $b = \frac{2a}{t}$ **ali** $t = \frac{b}{2a}$ **ali** $t = \frac{2a}{b}$ .... **1 točka**
Zapis enačbe, v kateri nastopata le dve izmed števil a, b **oziroma** t **(na primer** $2a^2 - 2a^2t^2 = 0$ **ali** $\frac{b^2}{2t^2} - \frac{b^2}{2} = 0$ **ali** $2a^2 - \frac{b^2}{2} = 0$**)** .... **1 točka**
Enačba $t^2 = 1$ **ali** $b^2 = 4a^2$ **ali razcep** $(2a - b)(2a + b) = 0$ .... **1 točka**
Utemeljitev, da t **ne more biti** -1 **ali sklep, da je edina možnost** $b = 2a$ ...... **1 točka**
Odgovor $t = 1$ .... **1 točka**

5. način. Iz $2a^2 - 3abt + b^2 = 0$ sledi $t = \frac{2a^2+b^2}{3ab}$, iz $2a^2 + abt - b^2 = 0$ pa $t = \frac{b^2-2a^2}{ab}$. Od tod sledi enakost $\frac{2a^2+b^2}{3ab} = \frac{b^2-2a^2}{ab}$. Ko odpravimo ulomke, dobimo $8a^2 = 2b^2$ oziroma $4a^2 = b^2$. Ker sta a in b pozitivni števili, sledi $b = 2a$. Zato je $t = \frac{2a^2+4a^2}{6a^2} = 1$.

Izražava $t = \frac{2a^2+b^2}{3ab}$ **ali** $t = \frac{b^2-2a^2}{ab}$ .... **1 točka**
Enakost $\frac{2a^2+b^2}{3ab} = \frac{b^2-2a^2}{ab}$ **(ali upoštevanje** $t = \frac{2a^2+b^2}{3ab}$ **v drugi enačbi ali upoštevanje** $t = \frac{b^2-2a^2}{ab}$ **v prvi enačbi)** .... **2 točki**
Zapis enačbe brez ulomkov, v kateri nastopata le a **in** b .... **1 točka**
Ugotovitev $b^2 = 4a^2$ **(ali razcep** $(2a-b)(2a+b) = 0$**)** .... **1 točka**
Sklep, da je edina možnost $b = 2a$ .... **1 točka**
Izračun $t = 1$ .... **1 točka**

I/2. 1. način. Zaradi $qr = pqr - 15p - 7pq = p(qr - 15 - 7q)$ je število qr deljivo s p. Ker so p, q in r praštevila, imamo le dve možnosti: $p = q$ ali $p = r$.

Če je $p = q$, dobimo enačbo $15 + 7q + r = qr$, ki jo lahko preoblikujemo v

$$22 = qr - 7q - r + 7 = (q-1)(r-7).$$

Natanko eno izmed števil $q - 1$ oziroma $r - 7$ je liho, zato je eno izmed praštevil q oziroma r sodo. Edina možnost je $q = 2$, ki nam da $r = 29$.

V primeru $p = r$ po krajšanju z r dobimo $15 + 8q = qr$ oziroma $15 = q(r - 8)$. Zato praštevilo q deli 15 in je tako enako 3 ali 5. Če je $q = 3$, dobimo $r = 13$, če je $q = 5$ pa $r = 11$.

Vse rešitve so trojice $(p, q, r) = (2, 2, 29)$, $(13, 3, 13)$ in $(11, 5, 11)$.

Ugotovitev, da praštevilo p **deli produkt** qr .... **1 točka**
Sklep: $p = q$ **ali** $p = r$ .... **1 točka**
V primeru $p = q$ **zapisan razcep** $22 = (q-1)(r-7)$ **(ali ena izmed enakosti** $q = 1 + \frac{22}{r-7}$ **oziroma** $r = 7 + \frac{22}{q-1}$**)** .... **1 točka**
Rešitev $(p, q, r) = (2, 2, 29)$ .... **1 točka**
V primeru $p = r$ **zapisan razcep** $15 = q(r-8)$ **(ali ena izmed enakosti** $q = \frac{15}{r-8}$ **oziroma** $r = 8 + \frac{15}{q}$**)** .... **1 točka**
Rešitev $(p, q, r) = (13, 3, 13)$ .... **1 točka**
Rešitev $(p, q, r) = (11, 5, 11)$ .... **1 točka**

2. način. Zaradi $15p = pqr - qr - 7pq = q(pr - r - 7p)$ je število $15p$ deljivo s q. Števili p in q sta praštevili, je zato $q = 3$, $q = 5$ ali $q = p$.

V primeru $q = 3$ po krajšanju s 3 dobimo $5p = pr - r - 7p$ oziroma $p = \frac{r}{r-12} = 1 + \frac{12}{r-12}$. Zato velja $12 \geq r - 12 \geq 1$, od koder sledi $24 \geq r \geq 13$. Ker je r praštevilo, je možno le $r = 13$, $r = 17$, $r = 19$ in $r = 23$. Število p je celo le v prvem primeru in tedaj je $p = 13$, $q = 3$, $r = 13$.

Naj bo $q = 5$. Dobimo $10p = pr - r$ oziroma $(p-1)(r-10) = 10$. Ker je $p - 1 > 0$, je število $r - 10$ enako enemu izmed števil 1, 2, 5 oziroma 10. Le v prvem primeru je r praštevilo. Zato je $r = 11$, od koder sledi še $p = 11$.

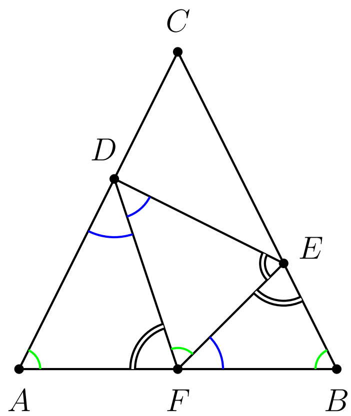
Če je $q = p$, dobimo enačbo $15 + 7p + r = pr$, ki jo lahko preoblikujemo v

$$22 = pr - 7p - r + 7 = (p-1)(r-7).$$

Natanko eno izmed števil $p-1$ oziroma $r-7$ je liho, zato je eno izmed praštevil p oziroma r sodo. Edina možnost je $p=2$, ki nam da $r=29$.

Vse rešitve so trojice $(p,q,r)=(2,2,29)$, $(13,3,13)$ in $(11,5,11)$.

Ugotovitev, da praštevilo q deli $15p$ .... 1 točka
Sklep: $q=3$, $q=5$ ali $p=q$ .... 1 točka
V primeru $q=3$ zapisana ena izmed enakosti $(p-1)(r-12)=12$, $p=1+\frac{12}{r-12}$ ali $r=12+\frac{12}{p-1}$ IN v primeru $q=5$ zapisana ena izmed enakosti $(p-1)(r-10)=10$, $p=1+\frac{10}{r-10}$ ali $r=10+\frac{10}{p-1}$ .... 1 točka
Rešitev $(p,q,r)=(13,3,13)$ .... 1 točka
Rešitev $(p,q,r)=(11,5,11)$ .... 1 točka
V primeru $q=p$ zapisan razcep $22=(p-1)(r-7)$ (ali ena izmed enakosti $p=1+\frac{22}{r-7}$ oziroma $r=7+\frac{22}{p-1}$) .... 1 točka
Rešitev $(p,q,r)=(2,2,29)$ .... 1 točka



I/3. Označimo $\angle BAC=\alpha$, $\angle ADF=\varphi$ in $\angle FEB=\psi$. Trikotnik ABC je enakokrak z vrhom C, zato je $\angle CBA=\angle BAC=\alpha$. Daljici DF in EF sta simetrali kotov $\angle ADE$ in $\angle DEB$, zato velja $\angle FDE=\varphi$ in $\angle DEF=\psi$.
Vsota velikosti notranjih kotov v štirikotniku je $360°$, torej v štirikotniku $ABED$ velja

$$\begin{aligned} 360° &= \angle BAD+\angle ADE+\angle DEB+\angle EBA \\ &= \alpha+2\varphi+2\psi+\alpha, \end{aligned}$$

od koder sledi $\alpha+\varphi+\psi=180°$.
Vsota velikosti notranjih kotov v vsakem trikotniku je $180°$, zato lahko izračunamo

$$\angle DFA=180°-\alpha-\varphi=\psi,\quad \angle BFE=180°-\alpha-\psi=\varphi \quad \text{in} \quad \angle DFE=180°-\varphi-\psi=\alpha.$$

Trikotniki AFD, FED in BEF se tako ujemajo v velikostih notranjih kotov, zato so podobni. Od tod sledi

$$\frac{|AF|}{|FD|}=\frac{|FE|}{|ED|} \quad \text{in} \quad \frac{|FD|}{|ED|}=\frac{|BF|}{|EF|},$$

oziroma

$$|AF|=\frac{|FE|\cdot|FD|}{|ED|}=|EF|\cdot\frac{|FD|}{|ED|}=|BF|.$$

Točka F je zato razpolovišče stranice AB.

Zapisani enakosti kotov $\angle ADF=\angle FDE$ in $\angle DEF=\angle FEB$ .... 1 točka
Izračun $\alpha+\varphi+\psi=180°$ .... 1 točka
Ugotovitev $\angle DFA=\psi$, $\angle BFE=\varphi$ in $\angle DFE=\alpha$ .... 1 točka
Sklep, da so trikotniki AFD, FED in BEF podobni .... 1 točka
Vsaka izmed zapisanih enačb $\frac{|AF|}{|FD|}=\frac{|FE|}{|ED|}$ in $\frac{|FD|}{|ED|}=\frac{|BF|}{|EF|}$ .... po 1 točka
Izpeljava $|AF|=|BF|$ in zaključek, da je F razpolovišče AB .... 1 točka

Opomba. Nalogo je mogoče rešiti tudi s poznavanjem pojma pričrtane krožnice. Premici

DF in EF sta namreč zunanji simetrali kotov $\angle CDE$ in $\angle DEC$. Zato je točka F središče pričrtane krožnice (tiste pričrtane krožnice, ki se dotika stranice DE), skozi to središče pa poteka tudi simetrala kota $\angle DCE$. Premica CF je tako simetrala kota $\angle ACB$, ker pa je trikotnik ACB enakokrak, je daljica CF hkrati simetrala kota, višina in težiščnica, zato je $|AF| = |FB|$.

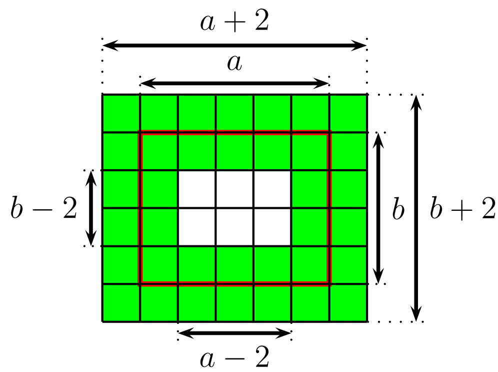
I/4. Zapišimo trimestno število v obliki $\overline{abc}$. Število, dobljeno z zapisom števk v obratnem vrstnem redu, je $\overline{cba}$. Za vsoto x teh dveh števil velja

$$x = \overline{abc} + \overline{cba} = (a+c)10^2 + (b+b)10 + (c+a).$$

Ker so vse števke števila x lihe, število $2b$ pa je sodo, mora biti $c+a$ vsaj 10. Število $c+a$ ne more biti enako 10, kajti enice števila x so lihe in so enake enicam $c+a$. Vsota $c+a$ je zato najmanj 11, kar pomeni, da je a vsaj 2. Število $\overline{abc}$ bo najmanjše, ko bomo izbrali najmanjši a, torej $a = 2$. V tem primeru je $c = 9$, najmanjša možna števka b pa je 0. Res število $209 + 902 = 1111$ vsebuje same lihe števke, zato je 209 najmanjše iskano število.

Vpeljava zapisa $\overline{abc}$ **.. 1 točka**
Zapis vsote x **v odvisnosti od števk trimestnega števila (na primer enačba** $x = \overline{abc} + \overline{cba} = (a+c)10^2 + (b+b)10 + c + a$**) .... 1 točka**
Sklep $a + c \geq 10$ **.. 1 točka**
Utemeljitev $a + c \neq 10$ **.. 1 točka**
Sklep $a \geq 2$ **.. 1 točka**
Najmanjše možno število je 209 **.. 1 točka**
Preverjanje, da 209 **zadošča vsem pogojem (t.j.** $209 + 902 = 1111$ **vsebuje same lihe števke) .... 1 točka**

I/5. 1. način. Naj bosta a in b dolžini stranic pravokotnika. Predpostavimo lahko $a \geq b$. Enotski kvadratki, ki imajo s pravokotnikom vsaj eno skupno točko, so označeni na sliki. Število enotskih kvadratkov je kar enako ploščini tega dela, ki jo lahko izračunamo tako, da ploščini pravokotnika s stranicama dolžine $a+2$ in $b+2$ odštejemo ploščino belega pravokotnika v notranjosti. Pri tem ločimo dva primera.

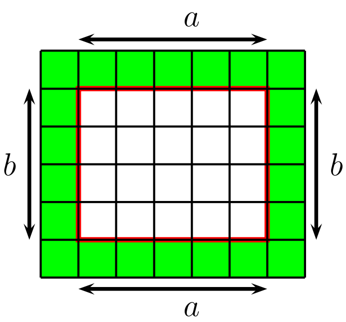


Če je $b \leq 2$, belega pravokotnika v notranjosti ni, zato je število enotskih kvadratkov enako ploščini povečanega pravokotnika, to je $(a+2)(b+2)$. Iz $b \leq 2$ in $(a+2)(b+2) = 24$ sledi $b = 1$, $a = 6$ in $b = 2$, $a = 4$.
V primeru $b \geq 3$ je število enotskih kvadratkov, ki imajo s stranicami pravokotnika vsaj eno skupno točko, enako $(a+2)(b+2) - (a-2)(b-2) = 4a + 4b$. Zato je $a + b = \frac{24}{4} = 6$. Edina možnost je $a = b = 3$.
Možne ploščine pravokotnikov so $1 \cdot 6 = 6$, $2 \cdot 4 = 8$ in $3 \cdot 3 = 9$.

Vsi taki kvadratki se nahajajo v pravokotniku velikosti $(a+2) \times (b+2)$ **...... 1 točka**
V primeru $b \leq 2$ **imajo vsi kvadratki v notranjosti tega pravokotnika vsaj eno točko skupno s stranicami pravokotnika .... 1 točka**
Ugotovitev, da sta taka pravokotnika s stranicama $b = 1$, $a = 6$ **oziroma** $b = 2$, $a = 4$

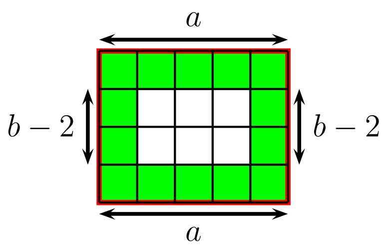
(ali, da sta ploščini 6 in 8) . . . . za vsako možnost po 1 točko
Vseh takih enotskih kvadratkov v primeru $b \geq 3$ je $4a + 4b$ . . . . 1 točka
Edina možnost $a = b = 3$ za $b \geq 3$ . . . . 1 točka
Odgovor, da so vse možne ploščine 6, 8 oziroma 9 . . . . 1 točka

2. način. Naj bosta a in b dolžini stranic pravokotnika. Predpostavimo lahko $a \geq b$. Število enotskih kvadratkov zunaj pravokotnika, ki imajo s pravokotnikom vsaj eno skupno točko, je $2a + 2b + 4$ (glej sliko).



Če je $b = 1$, je v notranjosti pravokotnika a enotskih kvadratkov in vsi imajo s pravokotnikom skupno vsaj eno stranico. Zato je v tem primeru $2a + 2 + 4 + a = 3a + 6$ enotskih kvadratov, ki imajo vsaj eno skupno točko s pravokotnikom. Iz $3a + 6 = 24$ sledi $a = 6$. Ploščina takega pravokotnika je 6.

Če je $b > 1$, je število enotskih kvadratkov, ki imajo s pravokotnikom vsaj eno točko in ležijo v notranjosti pravokotnika, enako $2a + 2(b - 2) = 2a + 2b - 4$ (glej sliko). Vseh kvadratkov z vsaj eno skupno točko s stranicami trikotnika je v tem primeru



$$2a + 2b + 4 + 2a + 2b - 4 = 4a + 4b.$$

Iz $4a + 4b = 24$ sledi $a + b = 6$. Ker smo vzeli $a \geq b \geq 2$ sta možnosti le dve in sicer $a = b = 3$ in $a = 4$, $b = 2$. Ploščini teh dveh pravokotnikov sta 9 in 8.

Možne ploščine pravokotnika, ki ga je narisala Eva, so 6, 8 in 9.

Zunaj pravokotnika je $2a + 2b - 4$ takih enotskih kvadratkov . . . . 1 točka
Če je $b = 1$, je $3a + 6$ takih kvadratkov . . . . 1 točka
Ugotovitev, da je tak pravokotnik s stranicama dolžine 1 in 6 (ali ploščina pravokotnika je 6) . . . . 1 točka
Vseh takih enotskih kvadratkov v primeru $a, b \geq 2$ je $4a + 4b$ . . . . 1 točka
Stranici pravokotnika sta dolgi 2 in 4 ali 3 in 3 (ali ploščini pravokotnika sta 8 oziroma 9) . . . . vsaka možnost po 1 točko
Odgovor, da so vse možne ploščine 6, 8 oziroma 9 . . . . 1 točka

II/1. Iz enakosti

$$6 = \frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = \frac{2a^2 + 2b^2}{a^2 - b^2}$$

sledi $6a^2 - 6b^2 = 2a^2 + 2b^2$ oziroma $4a^2 = 8b^2$, od koder dobimo $a = \pm b\sqrt{2}$. Tedaj lahko izračunamo

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 - b^3} + \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} = \frac{2a^6 + 2b^6}{a^6 - b^6} = \frac{(2 \cdot 2^3 + 2)b^6}{(2^3 - 1)b^6} = \frac{18}{7}.$$

Zapis prvotne enakosti z odpravljenimi ulomki (npr. $6a^2 - 6b^2 = 2a^2 + 2b^2$) . . . . 1 točka
Možno je $a = \sqrt{2}b$ . . . . 1 točka
Možno je $a = -\sqrt{2}b$ . . . . 1 točka

V primeru $a = \sqrt{2}b$ **zapis izraza** $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3} + \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$ **le z neznanko** a **ali le z neznanko** b **(na primer** $\frac{16b^6+2b^6}{8b^6-b^6}$**)** .... **1 točka**
V primeru $a = \sqrt{2}b$ **izračunana vrednost** $\frac{18}{7}$ .... **1 točka**
V primeru $a = -\sqrt{2}b$ **zapis izraza** $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3} + \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$ **le z neznanko** a **ali le z neznanko** b **(na primer** $\frac{(2\cdot 2^3+2)b^6}{(2^3-1)b^6}$**)** .... **1 točka**
V primeru $a = -\sqrt{2}b$ **izračunana vrednost** $\frac{18}{7}$ .... **1 točka**

II/2. Ker praštevilo p deli števili $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ in $\overline{cba} = 100c + 10b + a$, deli tudi njuno razliko

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 100(a-c) + (c-a) = 99(a-c).$$

Če p deli $a-c$, je naloga dokazana. Sicer p deli 99 in je zato $p = 3$ ali $p = 11$.

V kolikor je $p = 3$, je število $\overline{abc}$ deljivo s 3. Vemo, da je število deljivo s 3 natanko tedaj, ko je vsota števk tega števila deljiva s 3, zato 3 deli $a+b+c$. Torej p deli $a+b+c$.

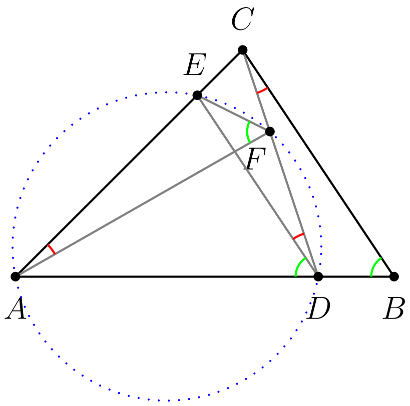
Ostane še primer $p = 11$. Tedaj 11 deli

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 99a + 11b + a - b + c = 11(9a+b) + (a-b+c),$$

od koder sledi, da je tudi število $a-b+c$ deljivo z 11. V tem primeru p deli $a-b+c$.

Zapis $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a-c)$ .... **1 točka**
Sklep, da p **deli** $a-c$ **ali** 99 .... **1 točka**
Če $p \mid 99$**, je** $p = 3$ **ali** $p = 11$ .... **1 točka**
V primeru $p = 3$ **je število** $\overline{abc}$ **deljivo s** 3**, zato** 3 **deli vsoto števk** $a+b+c$ .... **1 točka**
V primeru $p = 3$ **velja** $p \mid a+b+c$ .... **1 točka**
V primeru $p = 11$ **je število** $\overline{abc}$ **deljivo z** 11**, zato** 11 **deli** $11(9a+b) + (a-b+c)$ **(ali navedba kriterija za deljivost z** 11**)** .... **1 točka**
V primeru $p = 11$ **velja** $p \mid a-b+c$ .... **1 točka**

II/3. 1. način. Zaradi vzporednosti premic DE in BC je $\angle DCB = \angle CDE$. Obodna kota nad tetivo EF v tetivnem štirikotniku $ADFE$ sta enaka, $\angle FDE = \angle FAE$. Od tod sledi

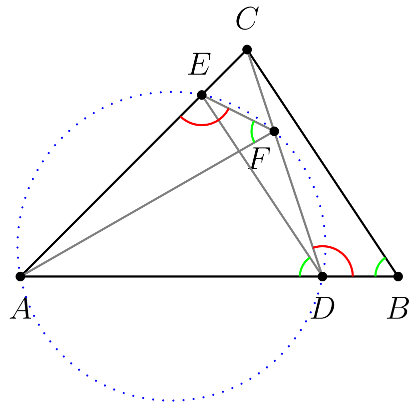


$$\angle DCB = \angle CDE = \angle FDE = \angle FAE.$$

Ker sta premici DE in BC vzporedni, velja še $\angle ABC = \angle ADE$. Zaradi koncikličnosti točk A, D, E in F je $\angle ADE = \angle AFE$, torej imamo $\angle DBC = \angle EFA$. Trikotnika AFE in CBD se ujemata v velikostih dveh kotov, $\angle AFE = \angle DBC$ in $\angle FAE = \angle DCB$, zato sta si podobna.

Zaradi vzporednosti je $\angle DCB = \angle CDE$ .... **1 točka**
Enakost obodnih kotov $\angle FDE = \angle FAE$ .... **1 točka**
Sklep $\angle DCB = \angle FAE$ .... **1 točka**
Zaradi vzporednosti je $\angle ABC = \angle ADE$ .... **1 točka**
Enakost obodnih kotov $\angle ADE = \angle AFE$ .... **1 točka**

Sklep $\angle DBC = \angle EFA$ .... **1 točka**
Trikotnika AFE in CBD sta si podobna .... **1 točka**



2. način Zaradi vzporednosti premic DE in BC velja $\angle ABC = \angle ADE$. Zaradi koncikličnosti točk A, D, E in F je $\angle ADE = \angle AFE$, torej imamo $\angle DBC = \angle EFA$. Ker točke A, D, F in E ležijo na isti krožnici, velja $\angle AEF = \pi - \angle ADF$. Toda, $\pi - \angle ADF = \angle CDB$, zato je $\angle AEF = \angle CDB$.
Trikotnika AFE in CBD se ujemata v velikostih dveh kotov, $\angle AFE = \angle DBC$ in $\angle AEF = \angle CDB$, zato sta si podobna.
Opomba. Nalogo lahko dokažemo tudi tako, da kot v prvi rešiti pokažemo enakost kotov $\angle DCB = \angle EAF$ in enakost kotov $\angle AEF = \angle CDB$ kot v tej rešitvi.

Zaradi vzporednosti je $\angle ABC = \angle ADE$ (ali $\angle DCB = \angle CDE$) .... **1 točka**
Enakost obodnih kotov $\angle ADE = \angle AFE$ (ali $\angle FDE = \angle FAE$) .... **1 točka**
Sklep $\angle DBC = \angle EFA$ (ali $\angle DCB = \angle FAE$) .... **1 točka**
V tetivnem štirikotniku $ADFE$ velja $\angle AEF = \pi - \angle ADF$ .... **2 točki**
Sklep $\angle AEF = \angle CDB$ .... **1 točka**
Trikotnika AFE in CBD sta si podobna .... **1 točka**

II/4. 1. način. Neenakost je enakovredna $xy + yz + zx - x - y - z \leq 0$ oziroma

$$0 \leq x(1-y) + y(1-z) + z(1-x).$$

Zaradi $0 \leq y \leq 1$ sledi $1 \geq 1 - y \geq 0$. Torej je $x(1-y)$ produkt dveh nenegativnih števil in tako velja $x(1-y) \geq 0$. Analogno sklepamo $y(1-z) \geq 0$ in $z(1-x) \geq 0$, zato neenakost $0 \leq x(1-y) + y(1-z) + z(1-x)$ velja.

Enakost velja natanko takrat, ko je $x(1-y) = 0$, $y(1-z) = 0$, $z(1-x) = 0$. Če je $x = 0$, iz tretje enačbe sledi $z = 0$ in nato iz druge $y = 0$. Sicer mora biti $y = 1$ in nato iz druge sledi $z = 1$, iz tretje pa $x = 1$. Torej dobimo enakost, ko je $x = y = z = 0$ ali $x = y = z = 1$.

Zapis enakovredne neenakosti, v kateri ne nastopa produkt xyz (na primer neenakost $xy + yz + zx - x - y - z \leq 0$) .... **1 točka**
Preoblikovanje neenakosti v $0 \leq x(1-y) + y(1-z) + z(1-x)$ .... **2 točki**
Sklep $1 - x \geq 0$ (ali $1 - y \geq 0$ ali $1 - z \geq 0$) .... **1 točka**
Sklep $x(1-y) \geq 0$, $y(1-z) \geq 0$ in $z(1-x) \geq 0$, ter zaključek, da zato prvotna neenakost velja .... **1 točka**
Enakost velja v primerih $x = y = z = 0$ in $x = y = z = 1$ .... **1 točka**
Utemeljitev, da sta $x = y = z = 0$ in $x = y = z = 1$ edini možnosti za enakost . **1 točka**

2. način. Neenakost je enakovredna $xy + yz + zx \leq x + y + z$. Ker je x pozitivno število in je $y \leq 1$, velja $xy \leq x$. Prav tako sklepamo $yz \leq y$ in $zx \leq z$. Zato neenakost velja.

Enakost velja natanko takrat, ko je $xy = x$, $yz = y$ in $zx = z$. Če je $x = 0$, iz tretje enačbe sledi $z = 0$ in nato iz druge $y = 0$. Sicer mora biti $y = 1$ in nato iz druge sledi $z = 1$, iz tretje pa $x = 1$. Torej dobimo enakost, ko je $x = y = z = 0$ ali $x = y = z = 1$.

Zapis enakovredne neenakosti, v kateri ne nastopa produkt xyz (na primer neenakost $xy + yz + zx - x - y - z \leq 0$) .... 1 točka
Ugotovitev, da zaradi $y \leq 1$ in $x \geq 0$ velja $xy \leq x$. .... 3 točke
(Če je narejena ocena $xy \leq x$, a ni posebej omenjeno, da je število x pozitivno, priznajte le 2 točki.)
Zaključek, da zato prvotna neenakost velja .... 1 točka
Enakost velja v primerih $x = y = z = 0$ in $x = y = z = 1$ .... 1 točka
Utemeljitev, da sta $x = y = z = 0$ in $x = y = z = 1$ edini možnosti za enakost . 1 točka

3. način. Neenakost je enakovredna $0 \leq x + y + z - xy - yz - zx$. Ker je $0 \leq x \leq 1$, velja $x \geq x^2$, zato je

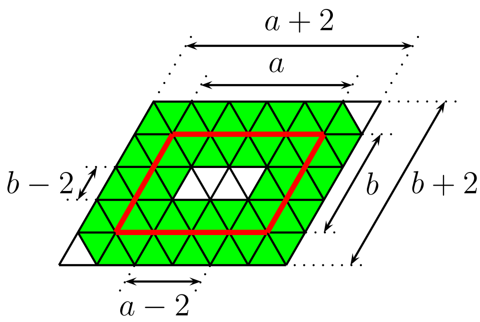
$$
\begin{aligned}
x + y + z - xy - yz - zx &\geq x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \qquad (1)\\
&= \frac{1}{2}\left((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right). \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Očitno je $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$, kar je bilo še potrebno videti.

Enakost velja natanko takrat, ko je $x = x^2$, $y = y^2$, $z = z^2$ in $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 0$. Tedaj je $x = y = z$. Iz $x = x^2$ sledi $x = 0$ ali $x = 1$. Torej dobimo enakost, ko je $x = y = z = 0$ ali $x = y = z = 1$.

Zapis enakovredne neenakosti, v kateri ne nastopa produkt xyz (na primer neenakost $xy + yz + zx - x - y - z \leq 0$) .... 1 točka
Ocena $x \geq x^2$ .... 1 točka
Preoblikovanje na vsoto kvadratov kot v (2) .... 2 točki
Sklep $0 \leq (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$ .... 1 točka
Enakost velja v primerih $x = y = z = 0$ in $x = y = z = 1$ .... 1 točka
Utemeljitev, da sta $x = y = z = 0$ in $x = y = z = 1$ edini možnosti za enakost . 1 točka

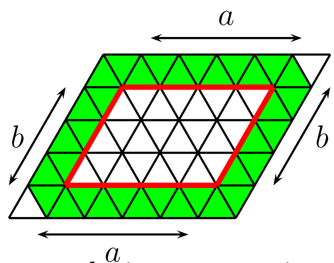
II/5. 1. način. Denimo, da je Eva narisala paralelogram s stranicama dolžine a in b. Predpostavimo lahko $a \geq b$. Mali trikotniki, ki imajo s stranicami paralelograma vsaj eno skupno točko, so označeni na sliki. Njihovo število lahko dobimo tako, da od števila vseh trikotnikov v povečanem paralelogramu odštejemo dva (vogalna trikotnika) in število trikotnikov v notranjem belem paralelogramu.



V primeru $b \leq 2$ notranjega belega paralelograma ni.
Če je $b = 1$, je malih trikotnikov toliko, kot jih leži v paralelogramu velikosti $(a+2) \times 3$, zmanjšano za 2. V paralelogramu jih je $2 \cdot 3(a+2)$, torej velja $6(a+2) - 2 = 46$, od koder sledi $a = 6$.
Če je $b = 2$, je malih trikotnikov $2 \cdot (a+2) \cdot 4 - 2 = 46$, od koder sledi $a = 8$.
Naj bo $b \geq 3$. V povečanem paralelogramu je $2(a+2)(b+2)$ malih trikotnikov, v notranjem paralelogramu pa $2(a-2)(b-2)$. Dobimo enačbo $2(a+2)(b+2) - 2(a-2)(b-2) - 2 = 46$, od koder sledi $a + b = 6$. Zaradi $a \geq b \geq 3$ je edina možnost $a = b = 3$.
Izračunajmo ploščine dobljenih paralelogramov. Ker je ostri kot v paralelogramu enak $60°$, je ploščina enaka $\frac{\sqrt{3}ab}{2}$. V primeru $a = 6$, $b = 1$ dobimo $3\sqrt{3}$, v primeru $a = b = 3$ je ploščina $\frac{9\sqrt{3}}{2}$, v primeru $a = 4$, $b = 2$ pa $4\sqrt{3}$.

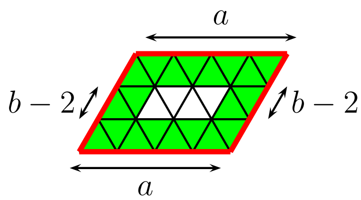
Vsi taki mali trikotniki so v paralelogramu velikosti $(a+2) \times (b+2)$ **. . . . . 1 točka**
V primeru $b \leq 2$ **imajo znotraj tega paralelograma vsi mali trikotniki razen dveh vsaj eno skupno točko s stranicami paralelograma . . . . 1 točka**
Ustreza paralelogram s stranicama dolžine $a = 6$, $b = 1$ **. . . . . 1 točka**
Ustreza paralelogram s stranicama dolžine $a = 4$, $b = 2$ **. . . . . 1 točka**
Vseh malih trikotnikov v primeru $b \geq 3$ **je** $8a + 8b - 2$ **. . . . . 1 točka**
Stranici paralelograma sta dolgi 3 **in** 3 **. . . . . 1 točka**
Odgovor, da so vse možne ploščine $3\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$ **in** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ **. . . . . 1 točka**

2. način. Denimo, da je Eva narisala paralelogram s stranicama dolžine a in b. Predpostavimo lahko $a \geq b$. Število malih trikotnikov, ki ležijo zunaj paralelograma in imajo z njim vsaj eno skupno točko (glej sliko), je



$$2 \cdot 2a + 2 \cdot 2b + 1 + 2 + 1 + 2 = 4a + 4b + 6.$$

Če je $b = 1$, leži vsaj ena stranica vsakega malega trikotnika, ki se nahaja v notranjosti paralelograma, na kaki stranici paralelograma, zato je v notranjosti paralelograma še $2a$ takih trikotnikov. Vseh trikotnikov, ki imajo vsaj eno skupno točko s stranicami paralelograma, je v tem primeru $6a + 10$. Iz $6a + 10 = 46$ sledi $a = 6$.
Če je $b \geq 2$, je število malih trikotnikov, ki imajo s stranicami paralelograma vsaj eno skupno točko, in ložijo znotraj paralelograma, enako $2 \cdot 2a + 2 \cdot 2(b-2) = 4a + 4b - 8$ (glej sliko). Skupaj je $4a + 4b + 6 + 4a + 4b - 8 = 8a + 8b - 2$ takih malih trikotnikov. Iz $8a + 8b - 2 = 46$ sledi $a + b = 6$. Ker smo vzeli $a \geq b \geq 2$ sta možnosti le dve, in sicer $a = b = 3$ ter $a = 4$, $b = 2$.



Izračunajmo ploščine dobljenih paralelogramov. Ker je ostri kot v paralelogramu enak

$60°$, je ploščina enaka $\frac{\sqrt{3}ab}{2}$. V primeru $a = 6$, $b = 1$ dobimo $3\sqrt{3}$, v primeru $a = b = 3$ je ploščina $\frac{9\sqrt{3}}{2}$, v primeru $a = 4$, $b = 2$ pa $4\sqrt{3}$.

Zunaj pravokotnika je $4a + 4b + 6$ takih enotskih trikotnikov .... 1 točka
Če sta a in 1 dolžini stranic paralelograma, je $6a + 10$ takih kvadratkov .... 1 točka
Ugotovitev, da sta stranici paralelograma lahko dolgi 1 in 6 (ali ploščina paralelograma je $3\sqrt{3}$) .... 1 točka
Vseh takih enotskih kvadratkov v primeru $a, b \geq 2$ je $8a + 8b - 2$ .... 1 točka
Stranici paralelograma sta dolgi 2 in 4 ali 3 in 3 (ali ploščini paralelograma sta lahko $4\sqrt{3}$ oziroma $\frac{9\sqrt{3}}{2}$) .... po 1 točka za vsako možnost
Odgovor, da so vse možne ploščine $3\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$ in $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ .... 1 točka

III/1. Naj bodo vsa števila a, b in c soda, $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, $c = 2c_1$. Tedaj je število

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$$

deljivo s 4.

Dokažimo še obratno trditev. Naj bo število $a^2 + b^2 + c^2$ deljivo s 4. Če bi bilo liho natanko eno izmed števil a, b in c ali, če bi bila liha vsa tri, bi bila vsota $a^2 + b^2 + c^2$ liho število, kar ne drži.

Denimo, da sta dve izmed števil a, b oziroma c lihi. Predpostavimo lahko, da sta lihi a in b, število c pa je sodo. Tedaj je $a = 2a_1 - 1$, $b = 2b_1 - 1$ in $c = 2c_1$ za neka naravna števila a_1, b_1 in c_1. Tako število

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2a_1 - 1)^2 + (2b_1 - 1)^2 + (2c_1)^2 = 4(a_1^2 - a_1 + b_1^2 - b_1 + c_1^2) - 2$$

ni deljivo s 4, kar je v nasprotju s predpostavko. Zato tudi dve izmed števil a, b oziroma c nista lihi. Edina možnost je, da so vsa števila soda, s čimer je naloga dokazana.

Utemeljitev, da je $a^2 + b^2 + c^2$ deljivo s 4, če so vsa števila soda .... 2 točki
Če $4 \mid a^2 + b^2 + c^2$, niso vsa števila liha .... 1 točka
Če $4 \mid a^2 + b^2 + c^2$, ni natanko eno število liho .... 1 točka
Če sta dve izmed števil a, b oziroma c lihi, število $a^2 + b^2 + c^2$ ni deljivo s 4.... 2 točki
Sklep: iz $4 \mid a^2 + b^2 + c^2$ sledi, da so vsa števila soda .... 1 točka

III/2. Enačbo preoblikujemo v $3^3 \cdot 3^{3\sin x} = (3^2)^{\cos^2 x}$ oziroma

$$3^{3+3\sin x} = 3^{2\cos^2 x}.$$

Od tod sledi $\log_3(3^{3+3\sin x}) = \log_3(3^{2\cos^2 x})$ oziroma $3 + 3\sin x = 2\cos^2 x$. Upoštevamo še, da je $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ in dobimo

$$1 + 3\sin x + 2\sin^2 x = 0$$

ter nato

$$(1 + \sin x)(1 + 2\sin x) = 0.$$

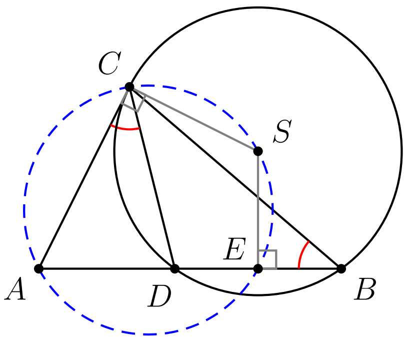
Od tod sledi $\sin x = -1$ ali $\sin x = -1/2$. Edino realno število x iz intervala $[0, 2\pi)$, ki zadošča prvemu pogoju, je $x = \frac{3\pi}{2}$. Realni števili $x \in [0, 2\pi)$, za kateri velja $\sin x = -1/2$ sta dve, in sicer $x = \frac{7\pi}{6}$ ter $x = \frac{11\pi}{6}$.

Vse rešitve so $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{7\pi}{6}$ in $x = \frac{11\pi}{6}$.

Zapis $9 = 3^2$ **in** $27 = 3^3$ **. . . . . 1 točka**
Zapis enačbe, v kateri so izrazi na vsaki strani enačaja zapisani v obliki potence števila 3 **(npr.** $3^{3+3\sin x} = 3^{2\cos^2 x}$**) . . . . 1 točka**
Sklep, da velja $3 + 3\sin x = 2\cos^2 x$ **. . . . . 1 točka**
Zamenjava $\cos^2 x$ **z** $1 - \sin^2 x$ **(zapis kvadratne enačbe** $1 + 3\sin x + 2\sin^2 x = 0$**) 1 točka**
Ugotovitev, da je lahko $\sin x = -1$ **in zapisana rešitev** $x = \frac{3\pi}{2}$ **. . . . . 1 točka**
V primeru $\sin x = -1/2$ **rešitvi** $x = \frac{7\pi}{6}$ **in** $x = \frac{11\pi}{6}$ **. . . . . vsaka po 1 točko**

III/3. Središčni kot je dvakrat večji od obodnega, zato je $\angle CSD = 2\angle CBD$. Trikotnik CSD je enakokrak z vrhom S, zato je $\angle DCS = \frac{\pi - \angle CSD}{2} = \frac{\pi}{2} - \angle CBD$. Torej je

$$\angle ACS = \angle ACD + \angle DCS = \angle CBD + \frac{\pi}{2} - \angle CBD = \frac{\pi}{2}.$$



Točka E je razpolovišče daljice BD, zato je premica SE pravokotna na premico BD in je $\angle SEA = \frac{\pi}{2}$. Od tod sledi $\angle ACS + \angle SEA = \pi$, zato so točke A, E, S in C koncikličn.

2. način Po izreku o kotu med tangento in tetivo je obodni kot nad tetivo enak kotu med tetivo in tangento. Kot med tangento na krožnico, očrtano trikotniku BCD, skozi točko C in tetivo CD je zato enak kotu $\angle CBD$. Zaradi $\angle CBD = \angle ACD$ sledi, da je premica AC tangenta. Zato je $\angle ACS = \frac{\pi}{2}$.
Točka E je razpolovišče daljice BD, zato je premica SE pravokotna na premico BD in je $\angle SEA = \frac{\pi}{2}$. Od tod sledi $\angle ACS + \angle SEA = \pi$, zato so točke A, E, S in C koncikličn.

Vsaka izmed enakosti $\angle CSD = 2\angle CBD$ **in** $\angle DCS = \frac{\pi}{2} - \angle CBD$ **. . . . . po 1 točka**
(ALI Utemeljitev, da je AC **tangenta na trikotniku** BCD **očrtano krožnico . . 2 točki)**
Sklep $\angle ACS = \frac{\pi}{2}$ **. . . . . 1 točka**
Ugotovitev $\angle SEA = \frac{\pi}{2}$ **(ali premica** SE **je pravokotna na premico** AB**) . . . . 2 točki**
Sklep $\angle ACS + \angle SEA = \pi$ **. . . . . 1 točka**
Zaključek, da so točke A, E, S **in** C **koncikličn . . . . 1 točka**

III/4. Preverimo, kdaj je $4 \leq x + \frac{4}{x}$. Če je $x > 0$, je ta neenakost enakovredna $4x \leq x^2 + 4$ oziroma $0 \leq (x-2)^2$, ki vedno velja. V kolikor je $x < 0$, pa sledi $0 \geq (x-2)^2$, ki ni nikoli izpolnjena, torej velja $4 \geq x + \frac{4}{x}$. Zato je

$$\min\left\{4, x + \frac{4}{x}\right\} = \begin{cases} 4, & \text{če je } x > 0, \\ x + \frac{4}{x}, & \text{če je } x < 0. \end{cases}$$

Iz $x > \frac{1}{x}$ za $x > 0$ sledi $x^2 > 1$, torej $x > 1$. Iz $x > \frac{1}{x}$ za $x < 0$ sledi $x^2 < 1$, torej

$-1 < x < 0$. Zato je

$$\min\left\{x, \frac{1}{x}\right\} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{če je } x > 1 \text{ ali } -1 < x < 0, \\ x, & \text{če je } x \leq -1 \text{ ali } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Dana neenakost je v primeru $x > 1$ enakovredna $4 \geq \frac{8}{x}$, od koder sledi $x \geq 2$. Neenakosti tako ustrezajo števila $x \in [2, \infty)$. V primeru $0 < x \leq 1$ dobimo $4 \geq 8x$, torej $\frac{1}{2} \geq x$. Zato neenakost velja tudi za $x \in (0, \frac{1}{2}]$.

Naj bo $-1 < x < 0$. Dobimo $x + \frac{4}{x} \geq \frac{8}{x}$ oziroma $x \geq \frac{4}{x}$. Če množimo z x, sledi $x^2 \leq 4$, kar za $-1 < x < 0$ velja. Vsa števila $x \in (-1, 0])$ zato zadoščajo neenakosti. Ostane še primer $x \leq -1$. Dobimo $x + \frac{4}{x} \geq 8x$ oziroma $4 \leq 7x^2$. Ker je $x \leq -1$, sledi $x^2 \geq 1$, zato je $7x^2 \geq 7 > 4$. Neenakost velja še za vse $x \in (-\infty, -1]$.

Pokazali smo, da dana neenakost velja za števila x iz $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}] \cup [2, \infty)$.

V primeru $x > 0$ velja $\min\{4, x + \frac{4}{x}\} = 4$ .... 1 točka
V primeru $x < 0$ velja $\min\{4, x + \frac{4}{x}\} = x + \frac{4}{x}$ .... 1 točka
V primerih $x \geq 1$ in $-1 \leq x < 0$ velja $\min\{x, \frac{1}{x}\} = \frac{1}{x}$ .... 1 točka
V primerih $x \leq -1$ in $0 < x \leq 1$ velja $\min\{x, \frac{1}{x}\} = x$ .... 1 točka
Neenačbo rešijo števila $x \in [2, \infty)$ .... 1 točka
Neenačbo rešijo števila $x \in (0, \frac{1}{2}]$ .... 1 točka
(V kolikor tekmovalec navede, da neenačbo rešijo števila $x \in (2, \infty)$ in $x \in (0, \frac{1}{2})$, ne navede pa, da sta tudi $x = 2$ in $x = \frac{1}{2}$ rešitvi, za ta dva primera dodelite skupaj 1 točko)
Neenačbo rešijo števila $x \in (-\infty, 0)$ .... 1 točka

III/5. Naj a_1 označuje število zlatnikov, ki jih je dobil prvi pirat, a_2 število zlatnikov, ki jih je dobil drugi in tako dalje. Ker $10 \nmid a_i - a_j$ za vsaka $i \neq j$, imajo števila $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ različne ostanke pri deljenju z 10. Ker je možnih različnih ostankov le 10, ta števila zavzamejo natanko vse ostanke. Zapišimo $a_i = 10k_i + l_i$, kjer je l_i ostanek števila a_i pri deljenju z 10. Skupno število zlatnikov je

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 10(k_1 + \ldots + k_{10}) + (l_1 + \ldots + l_{10}).$$

Ker smo ugotovili, da so števila $l_1, \ldots, l_{10}$ enaka številom $0, 1, 2, \ldots, 9$ (ne nujno v tem vrstnem redu), je njihova vsota enaka $l_1 + l_2 + \ldots + l_{10} = 0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$. Zato je v skrinji $10(k_1 + \ldots + k_{10}) + 45$ zlatnikov.

Denimo, da si pirati srebrnike lahko razdelijo na enak način. Potem kot zgoraj ugotovimo, da je skupno število srebrnikov oblike $10(m_1 + m_2 + \ldots + m_{10}) + 45$ za neka števila $m_1, \ldots, m_{10}$. Toda, število srebrnikov je sodo, zato to ni mogoče.

Nobeni števili a_i, a_j za $i \neq j$ nimata enakega ostanka pri deljenju z 10 .... 1 točka
Ostanki števil $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ so natanko števila $0, 1, 2, \ldots, 9$ (ne nujno v tem vrstnem redu) .... 2 točki
Skupno število zlatnikov je oblike $10(k_1 + \ldots + k_{10}) + 45$ (ali $10k + 5$) .... 1 točka
Če si lahko srebrnike razdelijo na enak način, je vseh srebrnikov $10(m_1 + m_2 + \ldots + m_{10}) + 45$ (ali $10m + 5$) .... 1 točka
Število srebrnikov je sodo .... 1 točka
Sklep, da taka razdelitev ni mogoča .... 1 točka

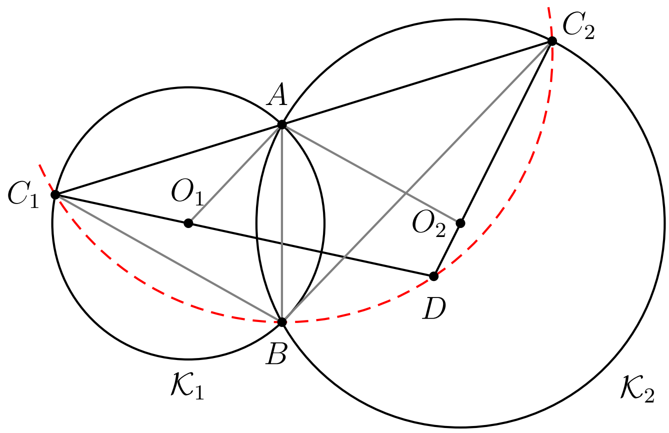
IV/1. Ker je $r \geq 2$, sta p in q lihi praštevili. Zato je praštevilo $p - q$ sodo, torej je enako 2. Od tod sledi $p = q + 2$. Števili $p - r = q - r + 2$ in $q - r$ sta praštevili, ki se razlikujeta za 2 in sta tako enake parnosti. Od tod sledi, da sta obe lihi. Ker sta števili q in $q - r$ lihi, je število r sodo, torej $r = 2$.

Števila q, $p = q + 2$ in $q - r = q - 2$ so praštevila. Ker je $q - 2$ liho praštevilo, je $q - 2$ vsaj 3. Toda, natanko eno izmed praštevil $q - 2$, q, $q + 2$ je deljivo s 3, zato je $q - 2 = 3$, od koder sledi $q = 5$ in $p = 7$.

Dobili smo $r = 2$, $q = 5$ in $p = 7$, ki zadoščajo vsem pogojem naloge, saj so tudi $p - r = 5$, $p - q = 3$ in $q - r = 2$ praštevila.

Praštevili p in q sta lihi .... **1 točka**
Sklep $p = q + 2$ .... **1 točka**
Praštevili $q - r$ in $q - r + 2$ sta enake parnosti .... **1 točka**
Ugotovitev $r = 2$ .... **1 točka**
Števila $q - 2$, q in $q + 2$ so praštevila .... **1 točka**
Eno izmed števil $q - 2$, q in $q + 2$ je deljivo s 3 .... **1 točka**
Rešitev je $r = 2$, $q = 5$, $p = 7$ .... **1 točka**

IV/2. Označimo $\angle ABC_1 = \alpha$ in $\angle C_2BA = \beta$. Tedaj je $\angle C_2BC_1 = \alpha + \beta$. Točke C_1, C_2, B in D so konciklične natanko tedaj, ko je $\angle C_2BC_1 = \angle C_2DC_1$. Zato pokažimo, da je $\angle C_2DC_1 = \alpha + \beta$. Središčni kot je dvakratnik obodnega, torej velja $\angle AO_1C_1 = 2\angle ABC_1 = 2\alpha$ in $\angle C_2O_2A = 2\angle C_2BA = 2\beta$. Trikotnik AO_1C_1 je enakokrak z vrhom O_1, zato je $\angle O_1C_1A = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Trikotnik C_2O_2A je enakokrak z vrhom O_2, zato je $\angle AC_2O_2 = \frac{\pi}{2} - \beta$. Sedaj izračunamo



$$\begin{aligned}\angle C_2DC_1 &= \pi - \angle C_1C_2D - \angle DC_1C_2 \\ &= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \alpha + \beta,\end{aligned}$$

torej točke C_1, C_2, B in D ležijo na isti krožnici.

Zapis $\angle C_2BC_1 = \angle ABC_1 + \angle C_2BA$ .... **1 točka**
Enakost $\angle AO_1C_1 = 2\angle ABC_1$ .... **1 točka**
Enakost $\angle C_2O_2A = 2\angle C_2BA$ .... **1 točka**
Sklep $\angle O_1C_1A = \frac{\pi}{2} - \angle ABC_1$ ali $\angle O_1C_1A = \frac{\pi - \angle AO_1C_1}{2}$ .... **1 točka**
Sklep $\angle O_2C_2A = \frac{\pi}{2} - \angle ABC_2$ ali $\angle O_2C_2A = \frac{\pi - \angle AO_2C_2}{2}$ .... **1 točka**
Enakost $\angle C_1DC_2 = \frac{\angle C_1O_1A + \angle AO_2C_2}{2}$ ali $\angle C_1DC_2 = \angle C_1BA + \angle ABC_2$ .... **1 točka**
Sklep $\angle C_1BC_2 = \angle C_1DC_2$ in zaključek, da točke C_1, C_2, B in D ležijo na isti krožnici1 točka

IV/3. Če v funkcijsko enačbo vstavimo $x = 0$, dobimo

$$(y+1)f(y) = f(0)$$

za vsak $y \geq 0$. Torej je $f(y) = \frac{f(0)}{y+1}$. Ta predpis vstavimo v funkcijsko enačbo in dobimo

$$(y+1) \cdot \frac{f(0)}{1+x+y} = \frac{f(0)}{1 + x \cdot \frac{f(0)}{1+y}}$$

za vse $x, y \geq 0$. Dobljena enačba je enakovredna $(y+1) \cdot x \cdot f(0) \cdot (f(0) - 1) = 0$, od koder sledi $f(0) = 0$ ali $f(0) = 1$. Edini funkciji, ki ustrezata enačbi, sta $f(x) = 0$ in $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

V funkcijsko enačbo vstavljen $x = 0$ .... **1 točka**
Zapis $f(y) = \frac{f(0)}{y+1}$ .... **2 točki**
Vstavljanje predpisov $f(x+y) = \frac{f(0)}{x+y+1}$ **in** $f(y) = \frac{f(0)}{y+1}$ **v prvotno enačbo** .... **1 točka**
Izpeljana enačba $(y+1) \cdot x \cdot f(0) \cdot (f(0) - 1) = 0$ .... **1 točka**
Rešitvi sta $f(x) = 0$ **in** $f(x) = \frac{1}{x+1}$ .... **vsaka po 1 točko**

IV/4. Enačba je enakovredna $8b^2 - 4ab - 4bc + a^2 + c^2 = 4b^2 - 2ac$ oziroma

$$4b^2 - 4ab - 4bc + a^2 + 2ac + c^2 = 0.$$

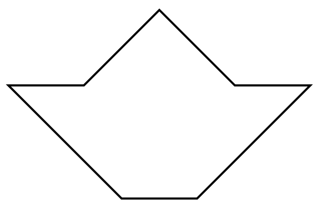
Preoblikujemo jo lahko v $(a+c)^2 - 4b(a+c) + 4b^2 = 0$ oziroma

$$(a + c - 2b)^2 = 0.$$

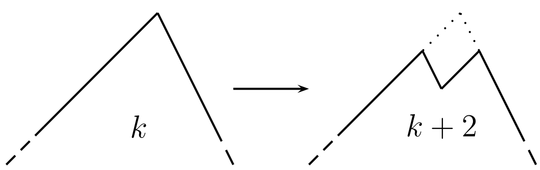
Od tod sledi $a + c = 2b$ oziroma $b - a = c - b$. To ravno pomeni, da so števila a, b in c zaporedni členi aritmetičnega zaporedja.

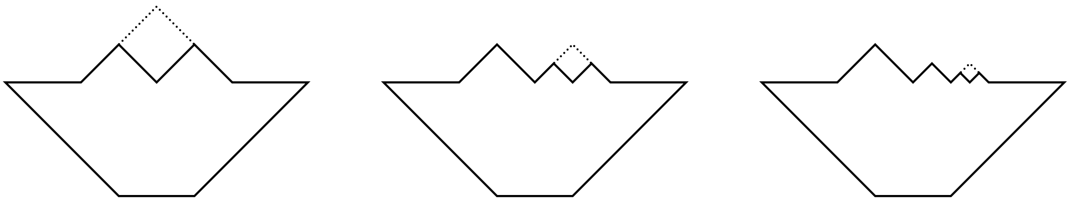
Kvadriranje izrazov $(2b - a)$ **in** $(2b - c)$ .... **1 točka**
Zapis enačbe v kateri nastopa $(a+c)^2$ **(npr.** $(a+c)^2 = 4ab + 4ac - 4b^2$**)** .... **2 točki**
Zapis $(a + c - 2b)^2 = 0$ .... **2 točki**
Sklep $a + c = 2b$ .... **1 točka**
Zaključek, da so a, b **in** c **zaporedni členi aritmetičnega zaporedja** .... **1 točka**

IV/5. Za soda števila $n \geq 3$, $n = 2k$, tak n-kotnik gotovo obstaja, saj ima vsak pravilen $2k$-kotnik vzporedni stranici. Če je $n = 3$ ali $n = 5$ utemeljimo, da tak n-kotnik ne obstaja. V trikotniku nobeni dve stranici nista vzporedni, v petkotniku pa bi dejstvo, da je vsaka stranica vzporedna neki drugi, pomenilo, da ima tri vzporedne stranice, od koder bi sledilo, da ima dve vzporedni sosednji stranici, kar seveda ni mogoče. Tak 7-kotnik obstaja in je prikazan na skici.



Z indukcijo dokažimo, da za liha naravna števila n, $n \geq 7$, tak n-kotnik obstaja. Denimo, da za neko število k obstaja k-kotnik z željenimi lastnostmi. Izberimo neko oglišče tega k-kotnika, pri katerem je notranji kot manjši od $180°$. Pri tem oglišču odrežemo dovolj majhen paralelogram (kot prikazuje skica). Na ta način dobimo $(k+2)$-kotnik, ki ima željene lastnosti. Nekaj primerov je prikazanih na spodnji sliki.





$n = 9$ $n = 11$ $n = 13$

Opomba. Zgoraj opisani indukcijski korak lahko uporabimo tudi za soda naravna števila n.

Opisan primer takega n-kotnika za sodo naravno število n .... 1 točka
Tak trikotnik ne obstaja .... 1 točka
Utemeljitev, da tak 5-kotnik ne obstaja .... 1 točka
Narisan ali opisan primer takega 7-kotnika .... 1 točka
Opis, kako iz k-kotnika s temi lastnostmi pridemo do $k + 2$-kotnika .... 3 točke
(V kolikor tekmovalec ne navede splošne konstrukcije, napiše pa primera za $n = 9$ in $n = 11$, lahko dodelite 1 točko.)