Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

55. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Regijsko tekmovanje, 30. marec 2011

Prilepi nalepko s šifro

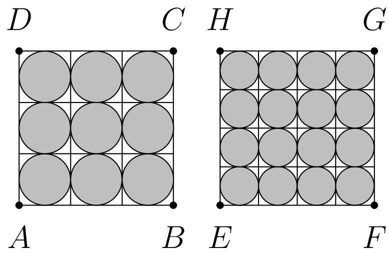
Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Vsak izmed kvadratov $ABCD$ in $EFGH$ s stranico dolžine 1 je razdeljen na skladne kvadratke, v katere so včrtani krogi, kot prikazuje slika. Koliko je razmerje ploščin med osenčenim delom kvadrata $ABCD$ in osenčenim delom kvadrata $EFGH$?



(**A**) $\frac{9}{16}$ (**B**) $\frac{3}{4}$ (**C**) 1 (**D**) $\frac{4}{3}$ (**E**) $\frac{16}{9}$

A2. Za neničelna realna števila a, b in c velja

$$a = b + 2c, \quad a + c = b + d, \quad b = d + c.$$

Katera enakost je zagotovo pravilna?

(**A**) $d = 2c$ (**B**) $a = 3c$ (**C**) $a = 6c$
(**D**) $a = b + 2d$ (**E**) $b = 2a + 2d$

A3. Za naravni števili m in n velja $19 \leq m \leq 49$, $51 \leq n \leq 101$. Kolikšno največjo vrednost lahko zavzame izraz $\frac{n+m}{n-m}$?

(**A**) 20 (**B**) 30 (**C**) 40 (**D**) 50 (**E**) 60

B1. Poišči vsa cela števila x in y, ki rešijo enačbo

$$3xy + 2x + y = 12.$$

(6 točk)

B2. V trikotniku ABC simetrala kota $\sphericalangle BAC$ seka stranico BC v točki D. Trikotnik ADC je enakokrak z vrhom D, velja pa še $|CD| = 36$ in $|BD| = 64$. Izračunaj dolžine stranic trikotnika ABC.

(6 točk)

B3. Peter ima doma 111 rdečih in 111 modrih kroglic, ki jih izdeluje Petrov stric. Peter lahko pri stricu vsak dan zamenja 11 rdečih kroglic za 7 modrih ali 20 modrih kroglic za 28 rdečih.

(a) Ali lahko po nekaj dneh Peter skupno število kroglic poveča za 20?

(b) Ali lahko po nekaj dneh Peter skupno število kroglic poveča za 33?

(c) Ali lahko po nekaj dneh Peter doseže, da ima modrih kroglic trikrat toliko kot rdečih?

(6 točk)

dMFA

55. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Regijsko tekmovanje, 30. marec 2011

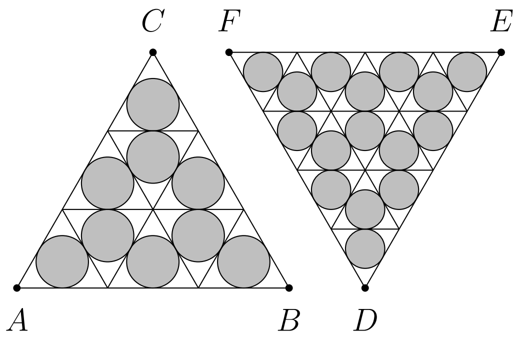
Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3

B1	B2	B3



A1. Vsak izmed enakostraničnih trikotnikov ABC in DEF s stranico dolžine 1 je razdeljen na skladne enakostranične trikotnike, v katere so včrtani krogi, kot prikazuje slika. Koliko je razmerje ploščin med osenčenim delom trikotnika ABC in osenčenim delom trikotnika DEF?

(**A**) $\frac{9}{16}$ (**B**) $\frac{3}{4}$ (**C**) 1 (**D**) $\frac{4}{3}$ (**E**) $\frac{16}{9}$

A2. Za dolžine a, b in c stranic trikotnika ABC velja $c^2 = 2ab$ in $a^2 + c^2 = 3b^2$. Velikosti notranjih kotov trikotnika ABC so

(**A**) $30°$, $60°$ in $90°$. (**B**) $45°$, $60°$ in $75°$. (**C**) $45°$, $45°$ in $90°$.
(**D**) $60°$, $60°$ in $60°$. (**E**) Nemogoče je določiti.

A3. Včeraj opoldne je bilo razmerje med številom fantov in številom deklet na igrišču $3 : 2$. Danes je število fantov na igrišču kvadrat števila deklet, na igrišču pa je 6 fantov in 7 deklet manj kot včeraj opoldne. Koliko otrok je bilo na igrišču včeraj opoldne?

(**A**) 12 (**B**) 13 (**C**) 15 (**D**) 25 (**E**) 30

B1. Določi vsa neničelna cela števila a, različna od 4, za katera je vrednost izraza $\frac{a}{a-4} + \frac{2}{a}$ celo število.

(6 točk)

B2. Dan je kvadrat $ABCD$ in taki točki E in F zunaj kvadrata, da sta trikotnika BEC in CFD enakostranična. Naj bo G presečišče premic BE in FD, H pa taka točka, da je štirikotnik $CEHF$ romb. Dokaži, da točke G, E, H in F ležijo na isti krožnici.

(6 točk)

B3. Dvanajst kroglic je oštevilčeno s števili $1, 2, 3, \ldots, 12$. Vsako kroglico pobarvamo bodisi rdeče bodisi zeleno tako, da sta izpolnjena pogoja:

(a) če sta kroglici, označeni z različnima številoma a in b, pobarvani rdeče in je $a + b < 13$, je tudi kroglica, označena s številom $a + b$, pobarvana rdeče;

(b) če sta kroglici, označeni z različnima številoma a in b, pobarvani zeleno in je $a + b < 13$, je tudi kroglica, označena s številom $a + b$, pobarvana zeleno.

Na koliko načinov lahko pobarvamo kroglice?

(6 točk)

55. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Regijsko tekmovanje, 30. marec 2011

Prilepi nalepko s šifro

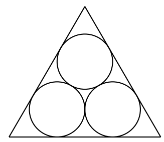
Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. V enakostranični trikotnik s stranico dolžine 1 so včrtane tri enake krožnice (glej sliko). Koliko meri polmer krožnic?



(**A**) $\frac{1}{3}$ (**B**) $\frac{1}{4}$ (**C**) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (**D**) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ (**E**) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

A2. Koliko stopinj meri kot x, če velja $2\cos 10^\circ + \sin 100^\circ + \sin 1000^\circ + \sin 10000^\circ = \sin x$ in $-90^\circ \leq x \leq 90^\circ$?

(**A**) -80 (**B**) -10 (**C**) 0 (**D**) 10 (**E**) 80

A3. Koliko parov (m, n) naravnih števil zadošča pogoju $\frac{3}{m} + \frac{2}{n} = 1$?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5
(**E**) Več kot 5.

B1. Poišči vsa realna števila x, ki rešijo enačbo

$$\log_2(10x) + \log_4(100x) + \log_8(1000x) - 2\log_{64} x = 9.$$

Rezultat zapiši v obliki okrajšanega ulomka.

(6 točk)

B2. Dan je trikotnik ABC in točke D na stranici AB, E na stranici BC ter F na stranici AC, da je premica CD pravokotna na stranico AB, premica DE pravokotna na stranico BC in premica DF pravokotna na stranico AC. Dokaži, da točke A, B, E in F ležijo na isti krožnici.

(6 točk)

B3. Dvanajst kroglic je oštevilčenih s števili $1, 2, 3, \ldots, 12$. Vsako kroglico pobarvamo bodisi rdeče bodisi zeleno tako, da sta izpolnjena pogoja:

(a) če sta kroglici, označeni z različnima številoma a in b, pobarvani rdeče in je $a + b < 13$, je tudi kroglica, označena s številom $a + b$, pobarvana rdeče;

(b) če je kroglica, označena s številom a, pobrvana rdeče in kroglica, označena s številom b, pobarvana zeleno in je $a + b < 13$, je kroglica, označena s številom $a + b$, pobarvana zeleno.

Na koliko načinov lahko pobarvamo kroglice?

(6 točk)

55. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Regijsko tekmovanje, 30. marec 2011

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Kvadrat s stranico dolžine 1 cm je razdeljen na tri trikotnike. Katera trditev je zagotovo pravilna?

(**A**) Eden izmed trikotnikov ima obseg enak $2+\sqrt{2}$ cm.

(**B**) Eden izmed trikotnikov ima ploščino enako 0.5 cm^2.

(**C**) Dva izmed trikotnikov sta pravokotna.

(**D**) Noben izmed trikotnikov ni topokoten.

(**E**) Eden izmed trikotnikov je ostrokoten.

A2. Prvi člen nekega aritmetičnega zaporedja je enak $\frac{1}{3}$, tretji pa $\frac{1}{5}$. Koliko je drugi člen tega zaporedja?

(**A**) $\frac{1}{4}$ (**B**) $\frac{4}{15}$ (**C**) $\frac{5}{24}$ (**D**) $\frac{7}{30}$ (**E**) $\frac{2}{9}$

A3. Koliko naravnih števil, manjših od 1000, ima vsoto števk deljivo s 7 in so večkratniki števila 3?

(**A**) 7 (**B**) 19 (**C**) 21 (**D**) 28 (**E**) 37

B1. Za *realni* števili x in α velja

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha \ .$$

Dokaži, da za vsako naravno število n velja

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos(n\,\alpha) \ .$$

(6 točk)

B2. Naj bo E razpolovišče stranice AB pravokotnika $ABCD$ in F tista točka na diagonali AC, da je premica BF pravokotna na diagonalo AC. Določi razmerje stranic pravokotnika $ABCD$, če je daljica EF pravokotna na diagonalo BD. *(6 točk)*

B3. V rdeči škatli je dvanajst kroglic, oštevilčenih s številkami od 1 do 12. Jan je nekaj izmed teh kroglic prestavil v zeleno škatlo. Ugotovil je, da za vsaki kroglici v zeleni škatli velja: če sta na teh dveh kroglicah zapisani števili a in b, potem je kroglica s številom $|a-b|$ v rdeči škatli. Največ koliko kroglic je Jan prestavil v zeleno škatlo? *(6 točk)*

55. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Regijsko tekmovanje, 30. marec 2011

Rešitve za 1. letnik

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetni 2 točki.

A1	A2	A3
C	C	D

Utemeljitve:

A1. Delež ploščine kvadrata, ki ga pokrije včrtani krog, je $\frac{\pi}{4}$. V kvadratu $ABCD$ ima vsak izmed devetih skladnih kvadratkov osenčen delež ploščine $\frac{\pi}{4}$, zato ima tudi kvadrat $ABCD$ osenčen tak del ploščine. Enako velja v kvadratu $EFGH$. Zato sta razmerji osenčenih ploščin enaki.

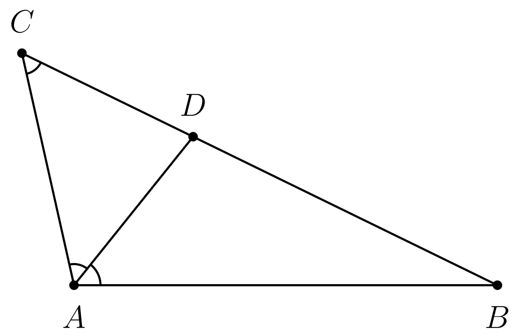
A2. Ker je $b = a - 2c$ in $d = b - c = a - 3c$, sledi $a + c = a - 2c + a - 3c$ in $a = 6c$.

A3. Ker je $\frac{n+m}{n-m} = \frac{n-m+2m}{n-m} = 1 + 2\frac{m}{n-m}$, bo vrednost največja, ko bo $n - m = 2$ in $m = 49$. Vrednost bo tedaj enaka 50.

B1. Enačbo preuredimo do $x(3y + 2) = 12 - y$. Očitno je $3y + 2 \neq 0$ in deli $12 - y$. Torej število $3y + 2$ deli $3(12 - y) + (3y + 2) = 38$. Ker ima $3y + 2$ ostanek 2 pri deljenju s 3, imamo štiri možnosti. Število $3y + 2$ je enako $-19, -1, 2$ ali 38. Zaporedoma dobimo, da je število y enako $-7, -1, 0$ ali 12, in nato še, da je število x enako $-1, -13, 6$ ali 0. Rešitve za (x, y) so $(-1, -7), (-13, -1), (6, 0)$ in $(0, 12)$.

Zapis ene izmed enačb $x(3y + 2) = 12 - y$ ali $y(3x + 1) = 12 - 2x$ oziroma izražava $x = \frac{12-y}{3y+2}$ ali $y = \frac{12-2x}{3x+1}$ .... 1 točka
Sklep, da $3y + 2$ deli $12 - y$ (ali $3x + 1$ deli $12 - 2x$ ali ocena $|3y + 2| \leq |12 - y|$ ali ocena $|3x + 1| \leq |12 - 2x|$) .... 1 točka
Utemeljitev, da ostane le končno možnosti in zapis vseh teh možnosti .. 2 točki
Vse zapisane rešitve $(-1, -7), (-13, -1), (6, 0)$ in $(0, 12)$ .... 2 točki
(Če tekmovalec zapiše 2 ali 3 rešitve, priznajte 1 točko.)

B2. Očitno je $|BC| = 100$. Izračunajmo še dolžini ostalih stranic. Ker je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC = \sphericalangle ACB$, sta si trikotnika ABD in CBA podobna. Torej je $\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|AB|}$. Iz druge enakosti dobimo $|AB| = \sqrt{|BD| \cdot |BC|} = \sqrt{64 \cdot 100} = 80$. Iz prve enakosti pa potem sledi $|AC| = \frac{|AD| \cdot |AB|}{|BD|} = \frac{36 \cdot 80}{64} = 45$.



Izračun $|BC| = 100$ .... 1 točka
Trikotnika ABD in CBA sta si podobna .... 2 točki
Zapis razmerja $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|AB|}$ .... 1 točka
Izračun $|AB| = 80$ .... 1 točka
Zapis razmerja $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|AD|}$ in izračun $|AC| = 45$ .... 1 točka

B3. (a) Peter lahko skupno število kroglic poveča za 20. Najprej trikrat 20 modrih kroglic zamenja za 28 rdečih kroglic. Po tem ima $111 - 60 = 51$ modrih kroglic ter $111 + 3 \cdot 28 = 111 + 84 = 195$ rdečih. Nato 11 rdečih zamenja za 7 modrih. Tedaj ima 184 rdečih in 58 modrih kroglic, skupaj 242, kar je za 20 več od 222.

Zapis menjav, s katerimi Peter skupno število kroglic poveča za 20 .. 2 točki

(b) Pri menjavi 11 rdečih kroglic za 7 modrih se skupno število kroglic zmanjša za 4. Pri menjavi 20 modrih kroglic za 28 rdečih se skupno število kroglic poveča za 8. Na začetku ima sodo mnogo kroglic, zato jih bo imel sodo mnogo tudi po vsaki menjavi. Zato skupnega števila ne more povečati za 33, saj je to število liho.

Ugotovitev, da se pri obeh menjavah skupno število kroglic spremeni za sodo število .... 1 točka
(Ta točka se prizna tudi v primeru, ko je ugotovljeno, da se skupno število kroglic spremeninja za večkratnik števila 4.)
Utemeljitev, da Peter števila kroglic ne more povečati za 33 .... 1 točka

(c) Denimo, da Peter to lahko doseže. Naj bo x število rdečih kroglic. Modrih kroglic je tedaj $3x$, vseh pa $4x$. Po vsaki menjavi se število kroglic poveča ali zmanjša za večkratnik števila 4. Ker je imel Peter na začetku 222 kroglic, lahko dosega le števila oblike $222 + 4k$. Enačba $222 + 4k = 4x$ nima rešitev, saj število 222 ni deljivo s 4. Zato Peter ne more doseči, da bi bilo modrih kroglic trikrat toliko kot rdečih.

Ugotovitev, da se pri obeh menjavah skupno število kroglic spremeni za večkratnik števila 4 ali ugotovitev, da je v primeru, ko je modrih kroglic trikrat toliko kot rdečih, skupno število kroglic deljivo s 4 .... 1 točka
Uporaba deljivosti s 4 za zaključek, da Peter ne more doseči, da bi bilo modrih kroglic trikrat toliko kot rdečih .... 1 točka

Rešitve za 2. letnik

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetni 2 točki.

A1	A2	A3
C	C	D

Utemeljitve:

A1. Delež ploščine trikotnika, ki ga pokrije včrtani krog, je $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. V trikotniku ABC ima vsak izmed devetih skladnih trikotnikov osenčen delež ploščine $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$, zato ima tudi trikotnik ABC osenčen tak del ploščine. Enako velja v trikotniku DEF. Zato sta razmerji osenčenih ploščin enaki.

A2. Iz $c^2 = 2ab$ in $a^2 + c^2 = 3b^2$ sledi $a^2 + 2ab = 3b^2$ oziroma $(a + b)^2 = 4b^2$. Od tod dobimo $(a + b - 2b)(a + b + 2b) = 0$. Ker sta a in b pozitivni števili, je edina možnost $a = b$. Tedaj je $c^2 = 2a^2 = a^2 + b^2$. Trikotnik je tako enakokrak in pravokotni, zato so velikosti notranjih kotov $45°$, $45°$ in $90°$.

A3. Včeraj je bilo na igrišču $3t$ fantov in $2t$ deklet. Danes je na igrišču $3t-6$ fantov in $2t-7$ deklet. Iz zveze $3t - 6 = (2t - 7)^2$ sledi $4t^2 - 31t + 55 = 0$ oziroma $t_{1,2} = \frac{31\pm\sqrt{81}}{8}$. Edina možnost je $t = 5$, saj je t celo število. Včeraj je bilo na igrišču $3t = 15$ fantov in $2t = 10$ deklet, torej 25 otrok.

2. način Naj f in d označujeta števili fantov in deklet na igrišču včeraj opoldne. Velja $\frac{f}{d} = \frac{3}{2}$ oziroma $f = \frac{3d}{2}$. Danes je na igrišču $f - 6$ fantov in $d - 7$ deklet ter velja $f - 6 = (d - 7)^2$. Če vstavimo $f = \frac{3d}{2}$ dobimo $2d^2 - 31d + 110 = 0$ oziroma

$$d_{1,2} = \frac{31 \pm \sqrt{31^2 - 880}}{4} = \frac{31 \pm 9}{4}.$$

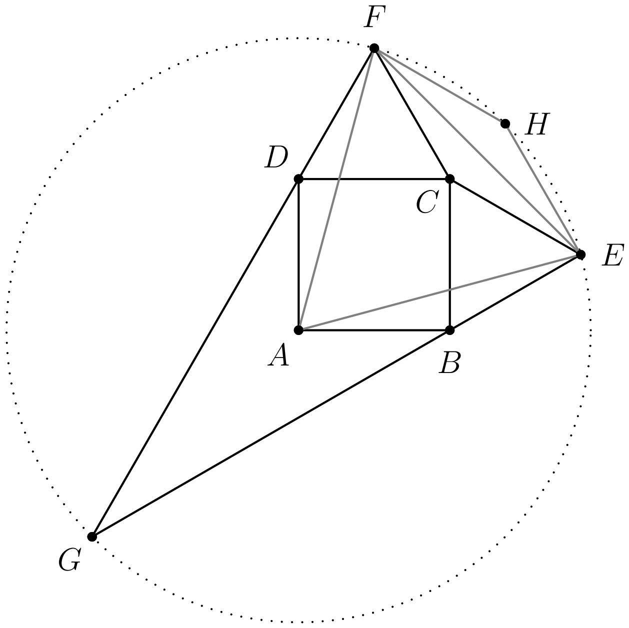
Edina možnost je $d = 10$, saj je d celo število. Tedaj je $f = 15$. Včeraj opoldne je bilo na igrišču 25 otrok.

B1. Če je $\frac{a}{a-4} + \frac{2}{a} = \frac{a^2+2a-8}{a(a-4)}$ celo število, je $a(a-4)$ delitelj a^2+2a-8. Zato a deli a^2+2a-8, torej a deli 8. Vsi celoštevilski delitelji števila 8, različni od 4, so $1, 2, 8, -1, -2, -4$ in -8. Preverimo teh sedem možnosti in ugotovimo, da je vrednost izraza celo število le pri $a = 2$ in $a = -4$.

Zapis ulomkov na skupni imenovalec .... **1 točka**
Sklep, da je $a(a-4)$ delitelj $a^2 + 2a - 8$ .... **1 točka**
Sklep, da a (ali $a - 4$) deli $a^2 + 2a - 8$ .... **1 točka**
Omejitev na končno možnosti (na primer, a deli 8) .... **1 točka**
Obravnava vseh primerov (tudi negativnih!) .... **1 točka**
Obe rešitvi $a = 2$ in $a = -4$ .... **1 točka**

B2. Ker je štirikotnik $ABCD$ kvadrat, trikotnika BEC in CFD pa sta enakostranična, je $|CE| = |CB| = |CD| = |CF|$. Trikotnik FCE je tako enakokrak in velja

$$\begin{aligned} \sphericalangle ECF &= 2\pi - \sphericalangle FCD - \sphericalangle DCB - \sphericalangle BCE \\ &= 2\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$



Zato je $\sphericalangle CEF = \frac{\pi}{12}$ in $\sphericalangle EFC = \frac{\pi}{12}$. Ker je štirikotnik $CEHF$ romb, velja še $\sphericalangle FEH = \sphericalangle HFE = \frac{\pi}{12}$. Tedaj je $\sphericalangle BEH = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$ in prav tako $\sphericalangle DFH = \frac{\pi}{2}$. V štirikotniku $GEHF$ velja $\sphericalangle GEH + \sphericalangle HFG = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, zato točke G, E, H in F ležijo na isti krožnici.

Ugotovitev, da je trikotnik FCE enakokrak .... **1 točka**
Izračun $\sphericalangle ECF = \frac{5\pi}{6}$ .... **1 točka**
Izračun $\sphericalangle CEF = \frac{\pi}{12}$ ali $\sphericalangle ECF = \frac{\pi}{12}$ .... **1 točka**
Sklep, da je $\sphericalangle FEH = \sphericalangle HFE = \frac{\pi}{12}$ .... **1 točka**
Izračun $\sphericalangle BEH = \frac{\pi}{2}$ ali $\sphericalangle DFH = \frac{\pi}{2}$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da je $\sphericalangle GEH + \sphericalangle HFG = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ in zaključek, da točke G, E, H in F ležijo na isti krožnici. .... **1 točka**

B3. Predpostavimo, da je kroglica 1 rdeče barve. Če je tudi kroglica 2 rdeče barve, so rdeče še $1+2=3$, $1+3=4, \ldots, 1+11=12$. Torej so vse kroglice rdeče.

Če je kroglica 2 zelene barve, spet ločimo dve možnosti. V kolikor je kroglica 3 rdeče barve, so rdeče barve tudi $1+3=4$, $1+4=5, \ldots, 1+11=12$, torej vse ostale kroglice. Če pa je kroglica 3 zelene barve, je tudi $2+3=5$ zelene barve. Ker je $1+4=5$ in je kroglica 5 zelene barve, 1 pa rdeče, kroglica 4 ne more biti rdeče barve, torej je zelene. Potem pa so zelene tudi kroglice s števili $4+2=6$, $5+2=7$, $6+2=8, \ldots, 9+2=11$, $10+2=12$, torej vse ostale.

Dobili smo tri možnosti. Če zamenjamo vlogi zelene in rdeče barve, dobimo še 3 barvanja. Vseh načinov je 6 in sicer: vse kroglice so rdeče, vse kroglice so zelene, vse kroglice razen kroglice 1 so zelene, vse kroglice razen kroglice 1 so rdeče, vse kroglice razen kroglice 2 so rdeče in vse kroglice razen kroglice 2 so zelene barve.

Vseh 6 pravilnih barvanj .... 4 točke
(Če tekmovalec ne navede vseh rešitev, priznajte 1 točko za prvo najdeno barvanje, 2 točki za 2 ali 3 barvanja, 3 točke za 4 ali 5 barvanj.)
Razčlenitev primerov ali utemeljitev, iz katere je razvidno, da poleg zapisanih šestih barvanj drugih pravilnih barvanj ni .... 2 točki

Rešitve za 3. letnik

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetni 2 točki.

A1	A2	A3
E	E	C

Utemeljitve:

A1. Če označimo polmere krožnic z r, velja $r\sqrt{3}+2r+r\sqrt{3}=1$. Sledi $r=\frac{1}{2(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

A2. Ker je $2\cos 10^\circ+\sin 100^\circ+\sin 1000^\circ+\sin 10000^\circ=2\cos 10^\circ+\sin 80^\circ-\sin 80^\circ-\sin 80^\circ=\sin 80^\circ$, sledi $x=80^\circ$.

A3. Jasno je $m>3$ in $n>2$. Ker z naraščajočim m število n pada, vidimo, da so možne le rešitve $(m,n)\in\{(4,8),\ (5,5),\ (6,4),\ (9,3)\}$.

B1. Enačbo preoblikujemo

$$\begin{aligned}
9 &= \log_2(10x)+\log_4(100x)+\log_8(1000x)-2\log_{64}x\\
&= \log_2(10x)+\frac{\log(100x)}{\log 4}+\frac{\log(1000x)}{\log 8}-\frac{2\log x}{\log 64}=\\
&= \log_2(10x)+\frac{\log(100x)}{2\log 2}+\frac{\log(1000x)}{3\log 2}-\frac{2\log x}{6\log 2}=\\
&= \log_2(10x)+\frac{1}{2}\log_2(100x)+\frac{1}{3}\log_2(1000x)-\frac{1}{3}\log_2 x=\\
&= \log_2(10x)+\log_2(\sqrt{100x})+\log_2(\sqrt[3]{1000x})-\log_2\sqrt[3]{x}=\\
&= \log_2\left(\frac{10x\cdot\sqrt{100x}\cdot\sqrt[3]{1000x}}{\sqrt[3]{x}}\right)\\
&= \log_2(1000\sqrt{x^3}),
\end{aligned}$$

od koder sledi $1000\sqrt{x^3}=2^9$ oziroma $x=\left(\frac{2^9}{10^3}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{16}{25}$.

Zapis logaritmov z osnovami 4, 8 in 64 v obliki kvocientov logaritmov z osnovo 10 **.. 1 točka**

Upoštevanje $\log 4 = 2\log 2$**,** $\log 8 = 3\log 2$ **in** $\log 64 = 6\log 2$ .... **1 točka**
Zapis enačbe, v kateri so vsi lograitmi z osnovo 2 .... **1 točka**
Upoštevanje, da je vsota logaritmov enaka logaritmu produkta .... **1 točka**
Enačba $9 = \log_2(1000\sqrt{x^3})$ .... **1 točka**
Odgovor $x = \frac{16}{25}$ .... **1 točka**

2. način Levo stran lahko preoblikujemo

$$
\begin{aligned}
&\log_2(10x) + \log_4(100x) + \log_8(1000x) - 2\log_{64} x = \\
&= \frac{\log(10x)}{\log 2} + \frac{\log(100x)}{\log 4} + \frac{\log(1000x)}{\log 8} - \frac{2\log x}{\log 64} = \\
&= \frac{\log 10 + \log x}{\log 2} + \frac{\log 100 + \log x}{\log 2^2} + \frac{\log 1000 + \log x}{\log 2^3} - \frac{2\log x}{\log 2^6} = \\
&= \frac{1 + \log x}{\log 2} + \frac{2 + \log x}{2\log 2} + \frac{3 + \log x}{3\log 2} - \frac{2\log x}{6\log 2} = \\
&= \frac{1}{\log 2}\left((1+1+1) + \log x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)\right) = \\
&= \frac{3 + \frac{3}{2}\log x}{\log 2} = \frac{6 + 3\log x}{2\log 2}.
\end{aligned}
$$

Torej imamo enačbo

$$\frac{6 + 3\log x}{2\log 2} = 9.$$

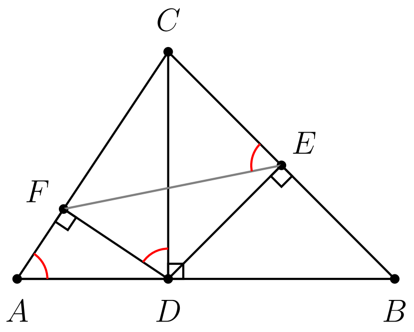
Od tod lahko izrazimo $\log x = \frac{1}{3}(18\log 2 - 6) = 6\log 2 - 2$, torej je

$$x = 10^{6\log 2 - 2} = \frac{(10^{\log 2})^6}{10^2} = \frac{2^6}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{2^4}{5^2} = \frac{16}{25}.$$

Zapis enačbe, v kateri so vsi logaritmi z osnovo 10 .... **1 točka**
Upoštevanje, da je logaritem produkta enak vsoti logaritmov .... **1 točka**
dotfill 1 točka
Upoštevanje $\log 4 = 2\log 2$**,** $\log 8 = 3\log 2$ **in** $\log 64 = 6\log 2$ .... **1 točka**
Zapis enačb, v kateri nastopajo le logaritmi $\log x$ **in** $\log 2$ .... **1 točka**
Enačba $\frac{6+3\log x}{2\log 2} = 9$ .... **1 točka**
Odgovor $x = \frac{16}{25}$ .... **1 točka**

B2. Označimo $\sphericalangle BAC = \alpha$. Ker leži točka D na daljici AB, kota $\sphericalangle BAC$ in $\sphericalangle CBA$ nista topa. Če točka D sovpada z A ali B je trditev očitna. V nadaljevanju zato privzemimo, da leži točka znotraj daljice AB.

Tedaj je $\sphericalangle FDA = \frac{\pi}{2} - \alpha$ in $\sphericalangle FDC = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle FDA = \alpha$. V štirikotniku $DECF$ velja $\sphericalangle DEC + \sphericalangle CFD = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, zato je tetiven. Od tod sledi $\sphericalangle CEF = \sphericalangle CDF = \alpha$. Torej je $\sphericalangle FEB = \pi - \sphericalangle FEC = \pi - \alpha$, zato velja $\sphericalangle BAF + \sphericalangle FEB = \alpha + \pi - \alpha = \pi$. Štirikotnik $ABEF$ je zato tetiven.



Velja $\sphericalangle FDA = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle BAC$ **..1 točka**
Velja $\sphericalangle CDF = \sphericalangle BAC$ **..1 točka**
Tetivnost štirikotnika $DECF$ **...................................2 točki**
Sklep $\sphericalangle CEF = \sphericalangle CDF$ **..1 točka**
Ugotovitev $\sphericalangle BAF + \sphericalangle FEB = \pi$ **in tetivnost štirikotnika** $ABEF$ **..........1 točka**

B3. Očitno ustrezajo vsa barvanja, v katerih je največ ena kroglica rdeča. Denimo, da sta rdeči vsaj dve kroglici. Naj bosta $a < b$ najmanjši števili na rdečih kroglicah.

Če je $a = 1$ in $b = 2$, po pravilu a) dobimo, da so vse kroglice rdeče. Če je $a = 1$ in $b > 2$, je zelena kroglica 2 in po pravilu b) dobimo, da je tudi kroglica 3 zelena. Z večkratno uporabo pravila b) sklepamo, da so vse ostale kroglice zelene, kar je v nasprotju s predpostavko, da sta vsaj dve kroglici rdeči.

Naj bo $a > 1$. Kroglice $1, 2, \ldots, a-1$ so zelene. Po pravilu b) so zelene tudi $a+1, a+2, \ldots, a+(a-1) = 2a-1$. Če je kroglica $2a$ zelena, so po pravilu b) zelene tudi $a+(a+1) = 2a+1, \ldots, a+(2a-1) = 3a-1, a+2a = 3a$. Z uporabo pravila b) nadaljujemo in ugotovimo, da nobena kroglica ne more biti rdeča. Od tod sledi, da je kroglica $2a$ rdeča. Po pravilu b) za tista izmed števil $2a+1, 2a+2, \ldots, 3a-1$, ki so manjša od 13, velja, da so kroglice s temi števili zelene. Če je $3a < 13$ po pravilu a) sledi, da je kroglica $3a$ rdeča. S tem sklepom nadaljujemo in ugotovimo, da so rdeče natanko tiste kroglice, ki so večkratniki števila a. Ker sta rdeči kroglici vsaj dve, je $2a \leq 12$, torej $a \leq 6$.

Ugotovili smo, da so možna naslednja barvanja

- vse kroglice so zelene,
- natanko ena kroglica je rdeča (teh barvanj je 12),
- rdeče so kroglice s števili, ki so večkratniki števila $a \leq 6$ (možnosti za izbiro a je 6).

Vseh barvanj je 19.

Navedeno, da ustrezajo vsa barvanja z največ eno rdečo kroglico ....1 točka
Če je kroglica 1 **rdeča, utemeljitev, da so vse ostale kroglice bodisi rdeče bodisi zelene ....1 točka**
V primeru vsaj dveh rdečih kroglic je drugo najmanjše število na rdeči kroglici večkratnik najmanjšega ....1 točka
Če sta rdeči kroglici vsaj dve, so števila na rdečih kroglicah večkratniki nekega

števila a **. . . . . 1 točka**
Če sta rdeči kroglici vsaj dve, so zelene vse kroglice, ki niso večkratniki nekega števila a **. . . . . 1 točka**
Vseh barvanj je 19 **. . . . . 1 točka**

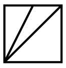
Rešitve za 4. letnik

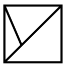
V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetni 2 točki.

A1	A2	A3
B	B	D

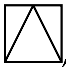
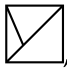
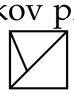
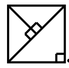
Utemeljitve:

A1. Imamo le tri bistveno različne načine, kako lahko kvadrat razdelimo na tri trikotnike:

 eden od rezov poteka po diagonali, drugi pa od oglišča do točke na stranici,

 eden od rezov poteka po diagonali, drugi pa od oglišča do diagonale,

 oba reza potekata od oglišča do skupne točke na stranici.

Opazimo, da ima v vseh treh primerih večji izmed trikotnikov ploščino 0.5 cm^2. Protiprimeri za trditve A, C, D in E so zaporedoma , ,  in .

A2. Drugi člen aritmetičnega zaporedja je $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_3) = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}) = \frac{4}{15}$.

A3. Večkratniki števila 3 imajo vsoto števk deljivo s 3. Vsota števk iskanih števil je tako deljiva z 21. Ker je vsota števk vsakega števila, manjšega od 1000, manjša ali enaka $9+9+9=27$, vsota števk iskanih števil pa je večkratnik 21, je edina možnost, da je ta vsota enaka 21.

Najmanjša števka je vsaj $21 - 18 = 3$ in največ $\frac{21}{3} = 7$. Vse možnosti za števke predstavljajo trojice $(3,9,9)$, $(4,8,9)$, $(5,7,9)$, $(5,8,8)$, $(6,6,9)$, $(6,7,8)$ in $(7,7,7)$. Trojica s tremi različnimi števkami določa šest možnih števil, trojica z dvema enakima števkama tri možna števila in trojica $(7,7,7)$ eno število. Vseh takih števil je $3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 1 = 28$.

B1. Obravnavajmo najprej primer $x > 0$. Ker velja $(x-1)^2 \geq 0$ oziroma $x^2 + 1 \geq 2x$, po deljenju z x dobimo

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \geq 2\cos\alpha = x + \frac{1}{x}.$$

Zato mora biti $\cos\alpha = 1$ in $x + 1/x = 2$. Torej je $x = 1$. Od tod sledi $x^n + 1/x^n = 1 + 1 = 2 = \cos(n\,\alpha)$. Če je $x < 0$, iz podobnega razmisleka za $(x+1)^2 \geq 0$ sledi $x = -1$ in $\cos\alpha = -1$, od tod $x^n + 1/x^n = 2(-1)^n = 2\cos(n\,\alpha)$.

Uporaba ene izmed ocen $x+\frac{1}{x}\geq 2$ (v primeru $x>0$) ali $x+\frac{1}{x}\leq -2$ (v primeru $x<0$) .... **2 točki**
Uporaba druge izmed ocen $x+\frac{1}{x}\geq 2$ (v primeru $x>0$) ali $x+\frac{1}{x}\leq -2$ (v primeru $x<0$) .... **1 točka**
Sklep $x=1$ v primeru $x>0$ .... **1 točka**
Sklep $x=-1$ v primeru $x<0$ .... **1 točka**
Zaključek, da formula $x^n+1/x^n=2\cos(n\,\alpha)$ velja .... **1 točka**

2. način Iz enačbe sledi $x^2-2x\cos\alpha+1=0$ oziroma

$$x_{1,2}=\frac{2\cos\alpha\pm\sqrt{4\cos^2\alpha-4}}{2}=\cos\alpha\pm\sqrt{\cos^2\alpha-1}.$$

Diskriminanta mora biti nenegativna, zato velja $\cos^2\alpha\geq 1$, kar je možno le, kadar je $\cos^2\alpha=1$. Če je $\cos\alpha=1$, sledi $x=1$, pri $\cos\alpha=-1$ pa $x=-1$. V obeh primerih velja $x^n+1/x^n=2(-1)^n=2\cos(n\,\alpha)$.

Zapis kvadratne enačbe za x .... **1 točka**
Izražava rešitev kvadratne enačbe .... **1 točka**
Sklep, da je diskriminanta nenegativna .... **1 točka**
Ugotovitev $\cos\alpha^2=1$ .... **1 točka**
Ugotovitev $\cos\alpha=1$ ali $\cos\alpha=-1$ .... **1 točka**
Zaključek, da formula $x^n+1/x^n=2\cos(n\,\alpha)$ velja .... **1 točka**

3. način Nalogo dokažimo z indukcijo na n. Za $n=1$ enakost $x+\frac{1}{x}=2\cos\alpha$ drži po predpostavki naloge. Za $n=2$ zahtevana enakost tudi drži, saj je

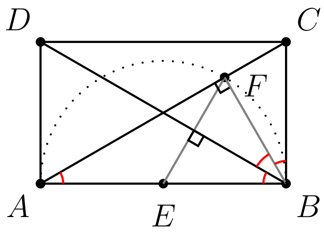
$$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=(2\cos\alpha)^2-2=4\cos^2\alpha-2=2(2\cos^2\alpha-1)=2\cos 2\alpha.$$

Predpostavimo zdaj, da za nek n veljata enakosti $x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos(n\alpha)$ in $x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}=2\cos((n-1)\alpha)$. Z uporabo te indukcijske predpostavke in znanih formul za produkte kotnih funkcij dobimo

$$\begin{aligned}x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)\\ &= 4\cos\alpha\cos n\alpha-2\cos(n-1)\alpha\\ &= 2(\cos(n+1)\alpha+\cos(n-1)\alpha)-2\cos(n-1)\alpha\\ &= 2\cos(n+1)\alpha.\end{aligned}$$

Željena enakost drži za $n=2$ .... **2 točki**
Jasno zapisano, da gre za dokaz z indukcijo .... **1 točka**
Zapis $x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)$ .... **2 točki**
Izpeljava $x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=2\cos(n+1)\alpha$ .... **1 točka**

B2. Označimo $\sphericalangle BAC = \alpha$. Trikotnik ABF je pravokotni in točka E je razpolovišče hipotenuze, zato je središče trikotniku ABF očrtane krožnice in velja $|AE| = |BE| = |FE|$. Torej je $\sphericalangle AFE = \sphericalangle EAF = \alpha$, zato je $\sphericalangle EFB = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle AFE = \frac{\pi}{2} - \alpha$, od koder sledi $\sphericalangle FBD = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle EFB = \alpha$. Velja še $\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{2} - \alpha$, zato je $\sphericalangle CBF = \alpha$. Prav tako je $\sphericalangle DBA = \sphericalangle BAC = \alpha$. Dobili smo $\frac{\pi}{2} = \sphericalangle CBA = \sphericalangle DBA + \sphericalangle FBD + \sphericalangle CBF = 3\alpha$, od koder sledi $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Trikotnik ABC je polovica enakostraničnega, zato je $\frac{|AB|}{|BC|} = \sqrt{3}$.



Velja $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DBA$ .... **1 točka**
Velja $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBF$ .... **1 točka**
Sklep $|AE| = |FE|$ **ali** $|BE| = |EF|$ .... **1 točka**
Ugotovitev $\sphericalangle EAF = \sphericalangle AFE$ .... **1 točka**
Ugotovitev $\sphericalangle FBD = \sphericalangle BAC$ .... **1 točka**
Izračun $\sphericalangle BAC = \frac{\pi}{6}$ **in zaključek** $\frac{|AB|}{|BC|} = \sqrt{3}$ .... **1 točka**

2. način Označimo $|AB| = a$ in $|BC| = b$ in naj bo T presečišče premic BD in EF, S pa presečišče diagonal. Po Pitagorovem izreku je $|AC| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Trikotnika ABC in AFB se ujemata v velikosti skupnega ostrega kota in sta oba pravokotna, zato sta si podobna. Sledi $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AF|}{|AB|}$, od koder izpeljemo $|AF| = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Od tod sledi še $|FC| = |AC| - |AF| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Po Pitagorovem izreku v trikotniku BCF sledi $|BF| = \sqrt{|BC|^2 - |CF|^2} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Ker je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA$, sta si tudi pravokotna trikotnika ABC in BTE podobna. Zato je $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BT|}{|BE|}$ in zaradi $|BE| = \frac{|AB|}{2}$ lahko izrazimo $|BT| = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

Po Pitagorovem izreku v trikotniku BFT sledi $|FT|^2 = |BF|^2 - |BT|^2 = \frac{a^2(4b^2-a^2)}{4(a^2+b^2)}$. Velja še Pitagorov izrek za trikotnik SFT in sicer $|TS|^2 + |TF|^2 = |SF|^2$. Ker je $|SF| = |AF| - \frac{|AC|}{2}$ (ali $|SF| = \frac{|AC|}{2} - |AF|$, če je F med A in S) in $|TS| = \frac{1}{2}|BD| - |BT|$, od tod izpeljemo

$$\frac{b^4}{4(a^2+b^2)} + \frac{a^2(4b^2-a^2)}{4(a^2+b^2)} = \frac{(a^2-b^2)^2}{4(a^2+b^2)}$$

oziroma $2a^4 - 6a^2b^2 = 0$. Od tod sledi $2a^2(a^2 - 3b^2) = 0$. Ker sta a in b pozitivni števili, je edina možnost $a = \sqrt{3}b$.

Izpeljava $|AF| = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .... **1 točka**
Izpeljava $|FC| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .... **1 točka**
Izpeljava $|BF| = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .... **1 točka**
Izračunano $|BT| = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ .... **1 točka**

Uporaba Pitagorovega izreka v trikotnikih BFT in SFT .... 1 točka
Izpeljava enačbe $2a^4 - 6a^2b^2 = 0$ in zaključek $\frac{|AB|}{|BC|} = \sqrt{3}$ .... 1 točka

B3. Jan je lahko prestavil 6 kroglic. Če je izbral vse kroglice z lihimi števili, je razlika števil na poljubnih dveh kroglicah sodo število, ki ni zapisano na nobeni kroglici v zeleni škatli.

Denimo, da je Jan prestavil vsaj 7 kroglic. Naj bodo števila na sedmih kroglicah v zeleni škatli $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$. Tedaj je $a_7 - a_1$, $a_6 - a_1$, $a_5 - a_1$, $a_4 - a_1$, $a_3 - a_1$, $a_2 - a_1$ šest različnih naravnih števil, manjših od 12. Kroglice s temi števili so v rdeči škatli. Slednje ni možno, saj je v rdeči škatli največ pet kroglic.

Zapisano, da je Jan lahko prestavil 6 kroglic .... 1 točka
Naveden primer s šestimi kroglicami, ki zadošča pogojem .... 2 točki
Začetek obravnave primera, ko je v zeleni škatli vsaj 7 kroglic .... 1 točka
(Točka se ne prizna, če je predpostavljeno, da je v zeleni škatli točno 7 kroglic, primeri z več kot sedmimi kroglicami pa niso navedeni. Točka se prizna, če je obravnavan primer s točno 7 kroglicami in je hkrati utemeljeno, da ta obravnava zadošča.)
Ugotovitev, da v tem primeru obstaja šest števil, ki bi morala biti na kroglicah v rdeči škatli .... 1 točka
Zaključek, da v zeleni škatli ne more biti več kot 6 kroglic .... 1 točka