Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge
DMFA Slovenije

56. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Regijsko tekmovanje, 28. marec 2012

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Peter redi na kmetiji konje in krave. Število konjev je bilo enako številu krav in večje od 0. Potem je Peter dokupil nekaj krav in število krav se je povečalo za $50\ \%$. Zdaj predstavlja število konjev le $30\ \%$ števila vseh živali. Koliko konjev ima Peter na kmetiji?

(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 10
(**D**) Neko drugo število (**E**) Naloga nima rešitve

A2. Največ koliko notranjih kotov n-kotnika je lahko večjih od $180°$?

(**A**) $n-1$ (**B**) $n-2$ (**C**) $n-3$ (**D**) $n-4$ (**E**) $n-5$

A3. Število, katerega kub je 2012^{12}, smo pomnožili s kvadratom števila 2012^{11}. Katero število smo dobili?

(**A**) 2012^{58} (**B**) 2012^{26} (**C**) 2012^{88} (**D**) 2012^{15} (**E**) 2012^{12}

B1. Dan je trikotnik ABC. Označimo z D presečišče simetrale kota $\sphericalangle BAC$ in stranice BC ter z E presečišče simetrale kota $\sphericalangle CBA$ in stranice AC. Denimo, da velja $|CD| = |CE|$. Dokaži, da je tedaj trikotnik ABC enakokrak.

(6 točk)

B2. Poišči vsa naravna števila n in praštevila p, za katera je $\sqrt{n + \frac{p}{n}}$ naravno število.

(6 točk)

B3. Lara in Sara bosta na pravokoten list papirja narisali n ravnih črt, pri čemer bosta črte risali izmenično, vsaka po eno. Vsaka črta bo vzporedna enemu izmed robov lista in bo potekala od roba do roba. Nobena črta ne sme sovpadati z robom ali že narisano črto. Na koncu bo torej list papirja razdeljen na nekaj pravokotnikov. Če bo število teh pravokotnikov liho, bo zmagala Lara, če pa bo sodo, bo zmagala Sara. V odvisnosti od n in od tega, kdo začne, določi, kdo ima zmagovito strategijo.

(6 točk)

56. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Regijsko tekmovanje, 28. marec 2012

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. V krog s premerom 4 včrtamo kvadrat, v dobljeni kvadrat včrtamo krog, v tega spet kvadrat in postopek ponavljamo. Kolikšen je premer četrtega kroga?

(**A**) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (**B**) $\frac{1}{2}$ (**C**) 1 (**D**) $\sqrt{2}$ (**E**) $2\sqrt{2}$

A2. Kolikšna je vsota vseh realnih števil, ki rešijo enačbo $|x-2011|+|x-2012|=3$?

(**A**) 2011 (**B**) 2012 (**C**) 2013 (**D**) 4021 (**E**) 4023

A3. Kateri točki ležita na grafu linearne funkcije $y=bx+1$, kjer je b neko neničelno realno število?

(**A**) $(0,1)$ in $(\frac{1}{b},0)$ (**B**) $(0,b)$ in $(-\frac{1}{b},0)$ (**C**) $(0,1)$ in $(b,0)$
(**D**) $(0,1)$ in $(-\frac{1}{b},0)$ (**E**) $(0,-\frac{1}{b})$ in $(1,0)$

B1. Naj bo ABC pravokotni trikotnik s pravim kotom pri C. Dane so takšne točke K, L in M na stranicah CA, AB in BC, da je kot $\sphericalangle MLK$ pravi in velja $|KC| = |KL|$. Dokaži, da sta simetrali kotov $\sphericalangle AKL$ in $\sphericalangle LMB$ vzporedni.

(6 točk)

B2. Poišči vsa naravna števila n in praštevila p, za katera je $\sqrt{n} + \frac{p}{\sqrt{n}}$ kvadrat naravnega števila.

(6 točk)

B3. Jure je v vrsto postavil 2012 črnih frnikol. Najprej je vsako tretjo frnikolo v vrsti zamenjal z rdečo frnikolo. Nato je vsako peto frnikolo v vrsti zamenjal z rumeno frnikolo. Nazadnje je vsako sedmo črno frnikolo v vrsti zamenjal z modro frnikolo. Koliko črnih frnikol mu je na koncu ostalo v vrsti?

(6 točk)

56. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Regijsko tekmovanje, 28. marec 2012

Prilepi nalepko s šifro

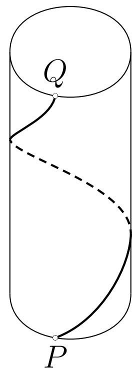
Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Dan je 4 cm visok valj, katerega polmer je 1 cm. Od točke P na spodnji osnovni ploskvi do točke Q, ki leži na zgornji osnovni ploskvi točno nad točko P, napnemo po plašču valja vrvico tako, da se enkrat ovije okoli valja. Koliko centimetrov je dolga najkrajša vrvica, ki jo lahko napnemo na tak način?

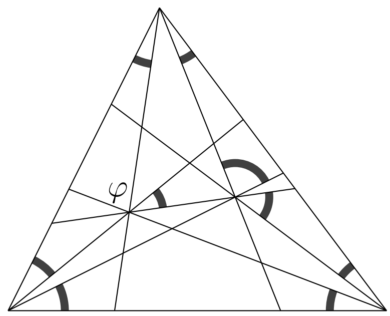


(**A**) 2π (**B**) 4π (**C**) $\pi\sqrt{2}$ (**D**) $2\sqrt{\pi^2+4}$ (**E**) $\sqrt{2\pi^2+4}$

A2. Med spodnjimi funkcijami poišči tisto, ki zavzame vrednost 0 natančno dvakrat.

(**A**) $f(x) = \sin x - 1$ (**B**) $f(x) = |x^2 - 1| - 2$ (**C**) $f(x) = e^x - 1$
(**D**) $f(x) = |2x - 1|$ (**E**) $f(x) = x - 1$

A3. Koliko je vsota velikosti kotov, označenih na sliki, če je $\varphi = 77°$?



(**A**) $283°$ (**B**) $360°$
(**C**) $385°$ (**D**) $437°$
(**E**) Ni mogoče določiti.

B1. Naj bo AB najdaljša stranica tetivnega štirikotnika $ABCD$. Naj simetrali kotov $\sphericalangle DCB$ in $\sphericalangle ADC$ sekata štirikotniku $ABCD$ očrtano krožnico še v točkah E in F. Označimo z G presečišče premic CE in DF ter s H presečišče premic AE in BF. Dokaži, da se premici EF in GH sekata pod pravim kotom.

(6 točk)

B2. Poišči vsa naravna števila n in praštevila p, za katera je $\sqrt[3]{n + \frac{8p}{n}}$ naravno število.

(6 točk)

B3. Poišči vsa realna števila x, ki rešijo enačbo

$$\cos(\pi \sin^2 x) + \sin(\pi \cos^2 x) = 1.$$

(6 točk)

56. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Regijsko tekmovanje, 28. marec 2012

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

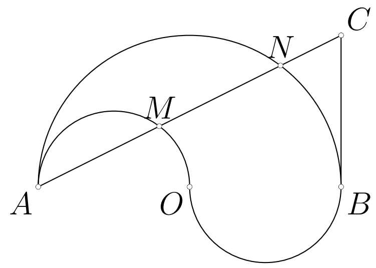
A1. Koliko polinomov pete stopnje, katerih vsi koeficienti so enaki 1 ali -1, ima ničlo v 1?

(**A**) 5 (**B**) 10 (**C**) 15 (**D**) 20 (**E**) 24

A2. Jakob bere knjigo s 630 stranmi. Prvi dan je prebral tretjino knjige. Vsota števil, ki so označevala strani, ki jih je Jakob prebral drugi dan, je bila 4410. Koliko strani je Jakobu ostalo do konca knjige? (Knjiga se začne s stranjo, označeno s številom 1.)

(**A**) 210 (**B**) 211 (**C**) 230 (**D**) 390 (**E**) 400

A3. Andrej začne svoj sprehod v točki A in ga konča pri babici v točki B, pri čemer lahko hodi le po narisanih poteh (glej sliko). (Točke A, O in B so kolinearne, daljica AO je polmer največje polkrožnice, $|AO| = |CB| = 1$, CB pa je pravokotna na AB.)
Kaj oblikuje najkrajšo pot?



(**A**) lok ANB (**B**) lok AO in lok OB

(**C**) daljica AC in daljica CB (**D**) daljica AN in lok NB

(**E**) daljica AM ter loka MO in OB

B1. Naj bo M razpolovišče stranice BC kvadrata $ABCD$ in naj bo P pravokotna projekcija točke C na daljico DM. Dokaži, da je trikotnik DAP enakokrak z vrhom pri A.

(6 točk)

B2. Poišči vsa naravna števila n in praštevila p, za katera je $\sqrt[3]{n} + \frac{p}{\sqrt[3]{n}}$ kvadrat naravnega števila.

(6 točk)

B3. Naj bo a realno število, večje od 1. Seštej neskončno vrsto

$$a^{\ln \frac{1}{a^0}} + a^{\ln \frac{1}{a^1}} + a^{\ln \frac{1}{a^2}} + \ldots .$$

(6 točk)

56. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Regijsko tekmovanje, 28. marec 2012

Rešitve za 1. letnik

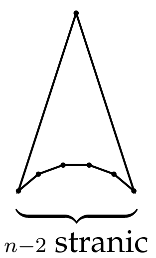
V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

A1	A2	A3
E	C	B

Utemeljitve:

A1. Denimo, da je bilo na začetku na kmetiji x krav in x konjev. Ko se je število krav povečalo za 50%, je bilo na kmetiji $x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$ krav. Torej je bil delež konjev enak $x/(x + \frac{3}{2}x) = \frac{2}{5}$, kar je 40% in ne 30%. Pravilen odgovor je torej (**E**).

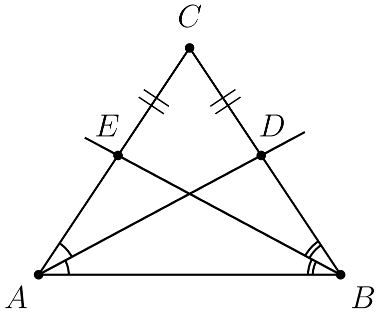
A2. Odgovor je $n-3$. S skice je razvidno, da je lahko $n-3$ notranjih kotov n-kotnika večjih od $180°$.



Vsota notranjih kotov poljubnega n-kotnika je enaka $(n-2)\cdot 180°$. Če bi bilo vsaj $n-2$ notranjih kotov večjih od $180°$, potem bi bila vsota notranjih kotov večja od $(n-2)\cdot 180°$, kar pa je protislovje.

A3. Število 2012^4 smo pomnožili z $(2012^{11})^2$ in dobili $2012^4 \cdot 2012^{22} = 2012^{26}$.

B1.



Označimo presečišče premic AD in BE z F. Tedaj je premica CF simetrala kota $\sphericalangle ACB$. Trikotnika CFD in CFE se ujemata v dveh stranicah in kotu med njima, torej sta skladna. Zato sta kota $\sphericalangle CDF$ in $\sphericalangle FEC$ enaka. Trikotnika ADC in BEC se ujemata v eni stranici in priležnima kotoma, torej sta skladna. Zato sta kota $\sphericalangle DAC$ in CBE enaka. Od tod očitno sledi, da je trikotnik ABC enakokrak z vrhom pri C.

Utemeljitev skladnosti trikotnikov CFD in CFE .... 2 točki
Skladnost kotov $\sphericalangle CDF$ in $\sphericalangle FEC$ .... 1 točka
Utemeljitev skladnosti trikotnikov ADC in BEC .... 1 točka
Utemeljitev, da je trikotnik ABC enakokrak .... 2 točki

2. način. Označimo $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ in $|CD| = |CE| = x$. Ker je premica AD simetrala kota $\sphericalangle BAC$, velja $\frac{b}{c} = \frac{x}{a-x}$. Ker je premica BE simetrala kota $\sphericalangle CBA$, velja $\frac{a}{c} = \frac{x}{b-x}$. Od tod sledi $b(a-x) = cx = a(b-x)$ oziroma $ba - bx = ab - ax$, torej $a = b$. To pa ravno pomeni, da je trikotnik ABC enakokrak z vrhom pri C.

Zapis razmerja $\frac{b}{c} = \frac{x}{a-x}$ .... 2 točki
Zapis razmerja $\frac{a}{c} = \frac{x}{b-x}$ .... 2 točki
Enačba $b(a-x) = cx = a(b-x)$ .... 1 točka
Izračun $a = b$ .... 1 točka

B2. Označimo $\sqrt{n + \frac{p}{n}} = k$, kjer je k naravno število, torej $n + \frac{p}{n} = k^2$. Od tod sledi, da n deli p. Ker je p praštevilo, mora biti $n = 1$ ali $n = p$. V obeh primerih dobimo enačbo $1 + p = k^2$ oziroma $p = (k+1)(k-1)$. Od tod sledi, da mora biti $k = 2$, torej $p = 3$. Dobimo rešitvi $n = 1$, $p = 3$ in $n = 3$, $p = 3$.

Sklep, da n deli p .... 2 točki
Ugotovitev, da je $n = 1$ ali $n = p$ .... 1 točka
Zapis enačbe $p = (k-1)(k+1)$ .... 1 točka
Sklep, da je $k = 1$ oz. $p = 3$ .... 1 točka
Zapis obeh rešitev .... 1 točka
(Če tekmovalec samo zapiše obe rešitvi, mu priznajte 1 točko.)

B3. Če je n lih, zmaga Sara, neglede na to, kdo začne. Če pa je n sod, zmaga tisti, ki ne začne. Denimo, da je na koncu na listu papirja p navpičnih in r vodoravnih črt, kjer je $p + r = n$. Potem je list papirja razdeljen na $(p+1)(r+1)$ pravokotnikov. Če je n lih, potem je eno od števil p in r liho, torej je $(p+1)(r+1)$ sodo število. V tem primeru torej zmaga Sara, neglede na to, kdo je začel in kako sta igrali. Naj bo sedaj n sod. Naj bo po $n - 1$ potezah na papirju narisanih s navpičnih in t vodoravnih črt, pri čemer je $s + t = n - 1$. Ker je $n - 1$ liho število, sta števili s in t različnih parnosti. Ko bo narisana še zadnja črta, bo papir razdeljen bodisi na $(s+1)t$ bodisi na $s(t+1)$ pravokotnikov. Ker sta števili s in t različnih parnosti, sta tudi števili $(s+1)t = st + t$ in $s(t+1) = st + s$ različnih parnosti. Tisti, ki je zadnji na potezi, se torej lahko odloči, ali bo na koncu število pravokotnikov liho ali sodo, torej lahko zmaga in to neglede na to, kako je igra potekala pred tem. Če je n sod torej zmaga tisti, ki je zadnji na potezi oziroma tisti, ki ne začne.

Ugotovitev in utemeljitev, da pri lihem n vedno zmaga Sara .... 2 točki
Ugotovite, da pri sodem n zmaga tisti, ki ne začne .... 1 točka
Razmislek za $n - 1$ potez .... 1 točka
Ugotovitev, da pri sodem n zadnji igralec odloča o sodem oz. lihem številu pravokotnikov .... 2 točki

Rešitve za 2. letnik

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

A1	A2	A3
D	E	D

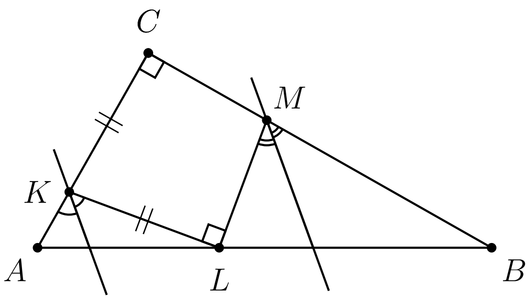
Utemeljitve:

A1. Razmerje premerov zaporednih dveh krogov je enako razmerju med diagonalo in stranico kvadrata, torej $\sqrt{2}$. Torej je razmerje premerov med prvim in četrtim krogom enako $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$. Premer četrtega kroga je zato enak $\frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

A2. Taki števili sta samo dve, to sta 2010 in 2013. Njuna vsota je enaka 4023.

A3. Od omenjenih točk, le točki $(0, 1)$ in $(-\frac{1}{b}, 0)$ vedno ustrezata enačbi.

B1.



Naj bosta K' in L' presečišči stranice AB s simetralama kotov $\sphericalangle AKL$ in $\sphericalangle LMB$. Trikotnika KMC in KML se ujemata v dveh stranicah in kotu nasproti daljši izmed teh dveh stranic, zato sta skladna. Torej je premica KM simetrala kotov $\sphericalangle LKC$ in $\sphericalangle CML$. Od tod sledi, da sta kota $\sphericalangle K'KM$ in $\sphericalangle KML'$ prava. Od tod trditev naloge očitno sledi.

Skladnost trikotnikov KMC in KML .... 2 točki
Sklep, da je KM simetrala kotov $\sphericalangle LKC$ in $\sphericalangle CML$ .... 1 točka
Uporaba izreka o pravokotnosti simetrale notranjega in simetrale zunanjega kota 2 točki
Končni sklep .... 1 točka

B2. Označimo $\sqrt{n} + \frac{p}{\sqrt{n}} = k^2$, kjer je k naravno število. Enačbo kvadriramo, da dobimo $n + 2p + \frac{p^2}{n} = k^4$. Od tod sledi, da n deli p^2. Ker je p praštevilo, mora biti $n = 1$, $n = p$ ali $n = p^2$. Če je $n = p$, dobimo enačbo $p + 2p + p = k^4$ oziroma $4p = k^4$. Od tod sledi, da mora biti k sod in zato p deljiv s 4, kar pa ni mogoče. Če je $n = 1$ ali $n = p^2$, dobimo enačbo $1 + 2p + p^2 = k^4$ oziroma $1 + p = k^2$, torej $p = (k-1)(k+1)$. Od tod sledi, da mora biti $k = 2$, torej $p = 3$. Dobimo rešitvi $n = 1$, $p = 3$ in $n = 9$, $p = 3$.

Kvadriranje začetne enačbe .... 1 točka
Ugotovitev, da n deli p^2 .... 1 točka
Zapis vseh treh možnosti za n .... 1 točka
Sklep, da n ne more biti enak p .... 1 točka
Zapis enačbe $p(k-1)(k+1)$ za $n=1$ ali $n=p^2$ .... 1 točka
Zapis obeh rešitev .... 1 točka
(Če tekmovalec samo zapiše obe rešitvi, mu priznajte 1 točko.)

2. način. Označimo $\sqrt{n}+\frac{p}{\sqrt{n}}=k^2$, kjer je k naravno število. Enačbo pomnožimo s $\sqrt{n}$, da dobimo $n+p=k^2\sqrt{n}$. Od tod sledi, da mora biti n kvadrat naravnega števila. V začetno enačbo vstavimo $n=m^2$, kjer je m naravno število, da dobimo $m+\frac{p}{m}=k^2$. Od tod sledi, da m deli p. Ker je p praštevilo, mora biti $m=1$ ali $m=p$. V obeh primerih dobimo enačbo $1+p=k^2$, torej $p=(k-1)(k+1)$. Od tod sledi, da mora biti $k=2$, torej $p=3$. Dobimo rešitvi $n=1$, $p=3$ in $n=9$, $p=3$.

Množenje enačbe $\sqrt{n}+\frac{p}{\sqrt{n}}=k^2$ s $\sqrt{n}$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je $n=m^2$ .... 1 točka
Zapis enačbe $m+\frac{p}{m}=k^2$ .... 1 točka
Ugotovitev, da m deli p .... 1 točka
Zapis obeh možnosti za m .... 1 točka
Zapis obeh rešitev .... 1 točka
(Če tekmovalec samo zapiše obe rešitvi, mu priznajte 1 točko.)

B3. Označimo frnikole po vrsti s številkami od 1 do 2012. Izračunajmo najprej koliko črnih frnikol je bilo v vrsti po drugem koraku. Jure je zamenjal natanko tiste črne frnikole, katerih številka je deljiva s 3 ali 5. Ker je $2012=670\cdot 3+2=402\cdot 5+2=134\cdot 15+2$, je teh frnikol natanko $670+402-134=938$. Torej po drugem koraku je bilo v vrsti še 1074 črnih frnikol. Ker je $1074=153\cdot 7+3$, je v tretjem koraku Jure zamenjal 153 črnih frnikol. Na koncu mu je v vrsti ostalo $1074-153=921$ črnih frnikol.

Izračunano število frnikol po prvem koraku (2012-670) .... 1 točka
Izračunano število frnikol po drugem koraku (2012-670-402+134) .... 2 točki
Izračunano število frnikol, ki jih je zamenjal v tretjem koraku (153) .... 2 točki
Izračunano končno število črnih frnikol .... 1 točka

Rešitve za 3. letnik

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

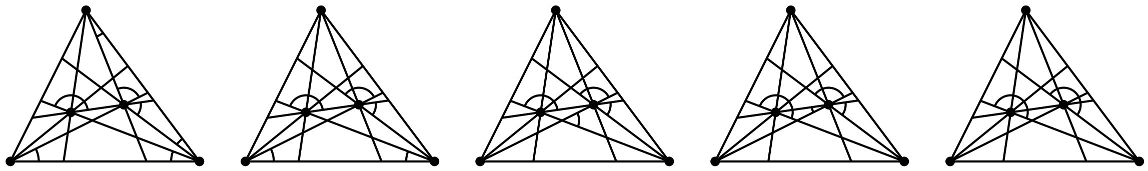
A1	A2	A3
D	B	A

Utemeljitve:

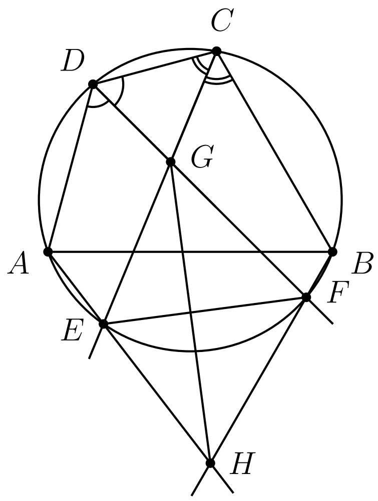
A1. Če cilinder prerežemo po navpičnici PQ in razgrnemo, dobimo pravokotnik z dolžinama stranic 4 cm in 2π cm. Naloga potem sprašuje po dolžini najkrajše poti med nasprotnima ogliščema pravokotnika. Ta je enaka dolžini diagonale, torej $\sqrt{(2\pi)^2 + 4^2} = 2\sqrt{\pi^2 + 4}$ cm.

A2. Graf funkcije pod (**A**) seka x-os neskončnokrat, graf funkcije pod (**B**) seka x-os v točkah $(\sqrt{3}, 0)$ in $-\sqrt{3}, 0$, graf funkcije pod (**C**) seka x-os le v točki $(0, 0)$, graf funkcije pod (**D**) seka x-os le v točki $(\frac{1}{2}, 0)$, graf funkcije pod (**E**) pa seka x-os le v točki $(1, 0)$. Torej je pravilen odgovor (**B**).

A3. Dodatno označimo še kot φ. Z upoštevanjem dejstva, da je vsota notranjih kotov pri dveh ogliščih v trikotniku enaka zunanjemu kotu pri tretjem oglišču, zaporedoma sklepamo, da je vsota kotov na skici enaka vsoti kotov na naslednjih skicah:



Vsota kotov označenih na skici je torej $2 \cdot 180° = 360°$, vsota prvotno označenih kotov pa je $360° - \varphi = 360° - 77° = 283°$.



B1.

Ker so točke C, D, E in F konciklične, sta kota $\sphericalangle FDC$ in $\sphericalangle FEC$ enaka. Ker so točke A, E, F in D konciklične, sta kota $\sphericalangle ADF$ in $\sphericalangle HEF$ enaka. Torej sta kota $\sphericalangle HEF$ in $\sphericalangle FEG$ enaka. Na podoben način pokažemo tudi, da sta kota $\sphericalangle GFE$ in $\sphericalangle EFH$ enaka. Trikotnika EFG in EFH se ujemata v eni stranici in priležnima kotoma, torej sta skladna. Zato velja $|EG| = |EH|$, torej je trikotnik HGE enakokrak z vrhom pri E. Od tod pa sledi, da se premici EF in GH res sekata pod pravim kotom.

Skladnost kotov $\sphericalangle FDC$ in $\sphericalangle FEC$ .... 1 točka
Skladnost kotov $\sphericalangle ADF$ in $\sphericalangle HEF$ in skladnost kotov $\sphericalangle HEF$ in $\sphericalangle FEG$. 1 točka
Skladnost kotov $\sphericalangle GFE$ in $\sphericalangle EFH$ .... 1 točka
Skladnost trikotnikov EFG in EFH .... 2 točki
Sklep, da se EF in GH sekata pod pravim kotom .... 1 točka

B2. Označimo $\sqrt[3]{n+\frac{8p}{n}}=k$, kjer je k naravno število, torej $n+\frac{8p}{n}=k^3$. Od tod sledi, da n deli $8p$. Ker je p praštevilo, mora biti $n=1$, $n=2$, $n=4$, $n=8$, $n=p$, $n=2p$, $n=4p$ ali $n=8p$. Če je $n=1$ ali $n=8p$, dobimo enačbo $1+8p=k^3$ oziroma $8p=(k-1)(k^2+k+1)$. Ker je k^2+k+1 liho naravno število, mora biti $k-1=8$ in $p=k^2+k+1$, torej $p=91$, kar pa ni praštevilo. Če je $n=2$ ali $n=4p$, dobimo enačbo $2+4p=k^3$. Od tod sledi, da mora biti k sod, zato je desna stran deljiva s 4, leva pa ne. Če je $n=4$ ali $n=2p$, dobimo enačbo $4+2p=k^3$. Od tod sledi, da mora biti k sod, torej je desna stran deljiva s 4, zato mora biti tudi p sod, torej $p=2$. Od tod dobimo rešitev $n=4$, $p=2$. Če je $n=8$ ali $n=p$, dobimo enačbo $8+p=k^3$ oziroma $p=(k-2)(k^2+2k+4)$. Od tod sledi, da mora biti $k=3$, torej $p=19$. Od tod dobimo rešitvi $n=8$, $p=19$ in $n=19$, $p=19$.

Zapis enačbe $n+\frac{8p}{n}=k^3$ in ugotovitev, da n deli $8p$ .... 1 točka
Zapis vseh možnosti za n .... 1 točka
Ugotovitev, da možnosti $n=1$ ali $n=8p$ ne rešita enačbe .... 1 točka
Ugotovitev, da možnosti $n=2$ ali $n=4p$ ne rešita enačbe .... 1 točka
Sklep, da iz $n=4$ ali $n=2p$ dobimo rešitev $n=4$ in $p=2$ .... 1 točka
Sklep, da iz $n=8$ ali $n=p$ dobimo rešitvi $n=8, p=19$ in $n=19, p=19$ .. 1 točka
(Če tekmovalec samo zapiše vse tri rešitve, mu priznajte 1 točko.)

B3. Označimo $y=\pi\sin^2 x$. Ker je $\sin(\pi\cos^2 x)=\sin(\pi(1-\sin^2 x))=\sin(\pi-\pi\sin^2 x)=\sin(\pi\sin^2 x)$, dobimo enačbo $\cos y+\sin y=1$. Ker je $\cos y+\sin y=\sin y+\sin(\frac{\pi}{2}-y)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2y-\frac{\pi}{2}}{2}=1$, sledi $\cos(y-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$, kar nam da $y=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$. Ker pa je $y=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi=\pi\sin^2 x\in[0,\pi]$, je lahko le $k=0$. Torej je $y=0$ ali $y=\frac{\pi}{2}$. Če je $y=0$, je $x=n\pi$, kjer je n celo število. Za $y=\frac{\pi}{2}$, pa mora biti $\sin^2 x=\frac{1}{2}$, kar nam da $\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ oz. $x=\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}$, kjer je n celo število.

Uvedba nove neznanke in pretvorba enačbe v $\cos y+\sin y=1$ .... 1 točka
Rešitev $y=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$ .... 2 točki
Sklep, da je $k=0$. .... 1 točka
Zapis obeh družin rešitev pri $y=0$ in $y=\frac{\pi}{2}$ .... (1+1) točka
(Če tekmovalec samo zapiše vse rešitve, mu priznajte 2 točki.)

Rešitve za 4. letnik

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

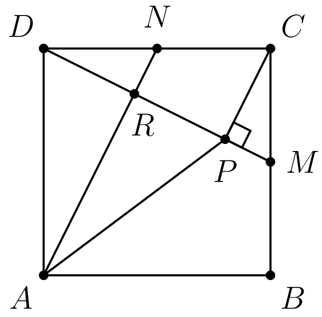
A1	A2	A3
D	E	D

Utemeljitve:

A1. Vrednost polinoma v točki 1 je enaka vsoti vseh koeficientov polinoma. Ker mora biti ta vrednost enaka 0, morajo biti natanko trije koeficienti enaki 1, trije pa enaki -1. Število iskanih polinomov je torej $\binom{6}{3}=20$.

A2. Prvi dan je prebral 210 strani. Če je drugi dan prebral n strani, je bila vsota številk teh strani enaka $211 + 212 + 213 + \ldots + (210 + n) = 210n + \frac{n(n+1)}{2}$. Torej mora biti $210n + \frac{n(n+1)}{2} = 4410$. Od tod sledi $210n \leq 4410$ oziroma $n \leq 20$. Pri $n = 20$ je $210n + \frac{n(n+1)}{2} = 4410$, torej je drugi dan prebral 20 strani, ostalo pa mu je še $630-210-20 = 400$ strani.

A3.

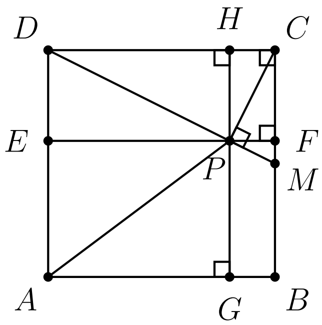


B1.

Naj bo N razpolovišče stranice CD in R presečišče premic DP in AN. Potem je $\sphericalangle DRA = 180° - \sphericalangle ADR - \sphericalangle NAD = 180° - \sphericalangle ADR - \sphericalangle MDC = 180° - 90° = 90°$. Torej je premica RN vzporedna premici PC in ker je $|DN| = |NC|$, sledi $|DR| = |RP|$. Torej sta trikotnika DRA in PRA skladna, saj se ujemata v dveh stranicah in vmesnem kotu. Torej je $|DA| = |AP|$.

Velja $\sphericalangle DRA = 90°$ .... 2 točki
Ugotovitev in utemeljitev, da je $|DR| = |RP|$ .... 2 točki
Skladnost trikotnikov DRA in PRA .... 1 točka
Sklep, da je $|DA| = |AP|$ .... 1 točka

2. način.



Naj premica skozi P vzporedna stranici AB seka stranici AD in BC v točkah E in F, premica skozi P vzporedna stranici AD pa naj seka stranici AB in CD v točkah G in H. Naj bo dolžina stranice kvadrata enaka a. Potem je ploščina trikotnika DMC enaka $\frac{1}{2}a\frac{a}{2} = \frac{1}{2}|DM||CP|$. Po Pitagorovem izreku je $|DM| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$, torej je $|CP| = \frac{a^2}{2|DM|} = \frac{a}{\sqrt{5}}$. Po Pitagorovem izreku je $|DP| = \sqrt{a^2 - |CP|^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$ in $|PM| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - |CP|^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{5}} = \frac{a}{2\sqrt{5}}$. Ploščina trikotnika DPC je torej enaka $\frac{1}{2}a|HP| = \frac{1}{2}|DP||PC| = \frac{a^2}{5}$, zato je $|HP| = \frac{2}{5}a$ oziroma $|PG| = a - |HP| = \frac{3}{5}a$. Podobno je ploščina trikotnika CPM enaka $\frac{1}{2}\frac{a}{2}|PF| = \frac{1}{2}|PM||PC| = \frac{a^2}{20}$, zato je

$|PF| = \frac{1}{5}a$ oziroma $|AG| = |PE| = a - |PF| = \frac{4}{5}a$. Po Pitagorovem izreku sledi $|AP| = \sqrt{|AG|^2 + |PG|^2} = a = |AD|$. Torej je trikotnik DAP enakokrak z vrhom pri A.

Izračun $|DM| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$ in $|CP| = \frac{a}{\sqrt{5}}$ ....2 točki
Izračun $|DP| = \frac{2a}{\sqrt{5}}$ in $|PM| = \frac{a}{2\sqrt{5}}$ .... 1 točka
Izračun $|HP| = \frac{2}{5}a$ in $|PG| = \frac{3}{5}a$ .... 1 točka
Izračun $|PF| = \frac{a}{5}$ in $|AG| = \frac{4}{5}a$ ....1 točka
Sklep $|AP| = a = |AD|$ .... 1 točka

B2. Označimo $\sqrt[3]{n} + \frac{p}{\sqrt[3]{n}} = k^2$, kjer je k naravno število. Enačbo potenciramo na 3, da dobimo $n + 3p\sqrt[3]{n} + 3\frac{p^2}{\sqrt[3]{n}} + \frac{p^3}{n} = k^6$, kar lahko prepišemo v $n + 3pk^2 + \frac{p^3}{n} = k^6$. Od tod sledi, da n deli p^3. Ker je p praštevilo, mora biti $n = 1$, $n = p$, $n = p^2$ ali $n = p^3$. Če je $n = p$ ali $n = p^2$, dobimo enačbo $p + 3pk^2 + p^2 = k^6$. Od tod sledi, da mora biti k deljiv s p, zato je desna stran deljiva s p^2, leva pa ne. Ostaneta nam še možnosti $n = 1$ in $n = p^3$, ki ju vstavimo v začetno enačbo in dobimo $1 + p = k^2$, torej $p = (k-1)(k+1)$. Od tod sledi, da mora biti $k = 2$, torej $p = 3$. Dobimo rešitvi $n = 1$, $p = 3$ in $n = 27$, $p = 3$.

Kubiranje začetne enačbe ....1 točka
Zapis kubirane enačbe kot $n + 3pk^2 + \frac{p^3}{n} = k^6$ in ugotovitev, da n deli p^3 ..1 točka
Zapis vseh možnosti za n .... 1 točka
Ugotovitev, da pri $n = p$ ali $n = p^2$ ne dobimo rešitve .... 1 točka
Zapis obeh rešitev, ko je $n = 1$ ali $n = p^3$ ....2 točki
(Če tekmovalec samo zapiše obe rešitvi, mu priznajte 1 točko.)

2. način. Označimo $\sqrt[3]{n} + \frac{p}{\sqrt[3]{n}} = k^2$, kjer je k naravno število. Enačbo pomnožimo s $k^2\sqrt[3]{n}$ oziroma $\sqrt[3]{n^2}$, da dobimo enačbi $k^2\sqrt[3]{n^2} + k^2p = k^4\sqrt[3]{n}$ in $n + p\sqrt[3]{n} = k^2\sqrt[3]{n^2}$. Ti dve enačbi seštejemo in nekoliko preuredimo, da dobimo $n + k^2p = (k^4 - p)\sqrt[3]{n}$. Od tod sledi, da mora biti n kub naravnega števila. V začetno enačbo vstavimo $n = m^3$, kjer je m naravno število, da dobimo $m + \frac{p}{m} = k^2$. Od tod sledi, da m deli p. Ker je p praštevilo, mora biti $m = 1$ ali $m = p$. V obeh primerih dobimo enačbo $1 + p = k^2$, torej $p = (k-1)(k+1)$. Od tod sledi, da mora biti $k = 2$, torej $p = 3$. Dobimo rešitvi $n = 1$, $p = 3$ in $n = 27$, $p = 3$.

Množenje enačbe s $k^2\sqrt[3]{n}$ oz. $\sqrt[3]{n^2}$ .... 1 točka
Preureditev v $n + k^2p = (k^4 - p)\sqrt[3]{n}$ .... 1 točka
Sklep, da je n kub naravnega števila ....1 točka
Zapis enačbe $m + \frac{p}{m} = k^2$ in ugotovitev, da m deli p ....1 točka
Zapis obeh možnosti za m in zapis obeh rešitev ....2 točki
(Če tekmovalec samo zapiše obe rešitvi, mu priznajte 1 točko.)

B3. Velja

$$a^{\ln \frac{1}{a}} = (e^{\ln a})^{-\ln a} = \left(\frac{1}{e}\right)^{(\ln a)^2}.$$

Ker je $a \neq 1$, je $\ln a \neq 0$, torej $(\ln a)^2 > 0$. Zato je $(\frac{1}{e})^{(\ln a)^2} < 1$, saj je $\frac{1}{e} < 1$, torej $a^{\ln \frac{1}{a}} < 1$. Velja $a^{\ln \frac{1}{a^n}} = a^{n \ln \frac{1}{a}} = (a^{\ln \frac{1}{a}})^n$. Torej je dana vsota vsota geometrijskega zaporedja z začetnim členom 1 in koeficientom $a^{\ln \frac{1}{a}} < 1$. Zato je ta vsota enaka $\frac{1}{1-a^{\ln \frac{1}{a}}}$.

Velja $a^{\ln \frac{1}{a}} = (\frac{1}{e})^{(\ln a)^2}$ **.......... 2 točki**
Ugotovitev, da je $a^{\ln \frac{1}{a}} < 1$ **.......... 1 točka**
Velja $a^{\ln \frac{1}{a^n}} = (a^{\ln \frac{1}{a}})^n$ **.......... 1 točka**
Ugotovitev, da je dana vsota vsota geom. zaporedja .... 1 točka
Izračun vsote .... 1 točka