Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

58. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Regijsko tekmovanje, 2. april 2014

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

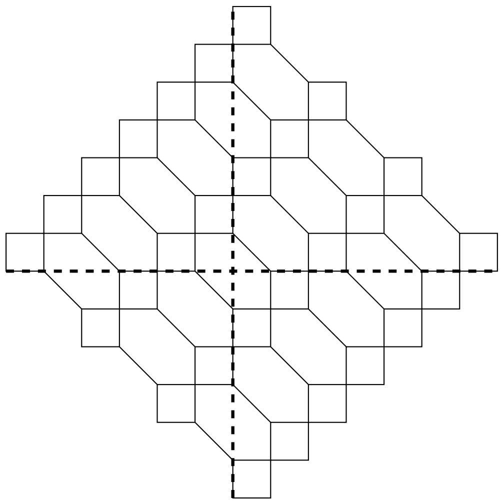
A1. Katero števko 7-mestnega števila 2345678 moramo izbrisati, da bo dobljeno 6-mestno število deljivo z 9?

(**A**) 8 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 5 (**E**) 4

A2. Na igrišču je bilo 17 deklet in 12 fantov. Najmanj koliko otrok bi moralo še priti na igrišče, da bi se lahko vsi skupaj razdelili na 2 enako veliki skupini, pri čemer bi bilo v vsaki skupini enako število deklet in fantov?

(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

A3. Janez je na list papirja narisal vzorec, sestavljen iz skladnih kvadratov in skladnih šestkotnikov, nato je na vzorec narisal še 2 pravokotni črtkani črti (glej sliko). Kolikšno je razmerje med ploščino območja, ki ga prekrivajo kvadrati, in ploščino območja, ki ga prekrivajo šestkotniki?



(**A**) $1 : 3$ (**B**) $1 : 2$ (**C**) $14 : 27$
(**D**) $4 : 7$ (**E**) $14 : 9$

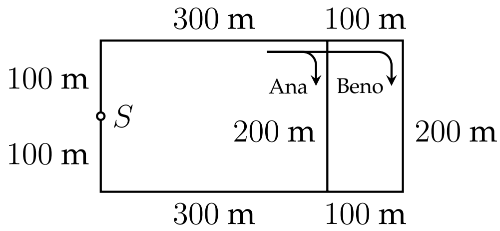
B1. Poišči vsa naravna števila n, za katera obstaja pravokotnik, katerega dolžine stranic so naravna števila, njegov obseg pa je enak n in je številsko enak ploščini.

(6 točk)

B2. Naj bo ABC pravokoten trikotnik s pravim kotom pri C, za katerega velja $|BC| = a$ in $|AC| = b$. Naj bo D taka točka, ki leži na nasprotnem bregu premice AC kot točka B, da je trikotnik ACD podoben trikotniku ABC. Naj bo E taka točka na premici CD, da je kot $\sphericalangle EBC$ pravi. Izrazi ploščino štirikotnika $ABED$ z a in b.

(6 točk)

B3. Ana in Beno kolesarita po pravokotni kolesarski stezi v smeri urnega kazalca. Ana kolesari po krajši kolesarski stezi, Beno pa po daljši. Hitrosti Ane in Bena sta v razmerju $v_{\text{Ana}} : v_{\text{Beno}} = 2 : 7$. Oba hkrati začneta v točki S (glej sliko, kjer so prikazane tudi dolžine posameznih odsekov steze). Koliko krogov prevozi Ana in koliko Beno, ko se prvič ponovno srečata v točki S?



(6 točk)

58. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Regijsko tekmovanje, 2. april 2014

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

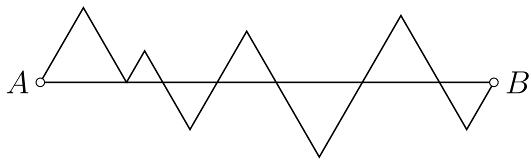
A1. V živalskem vrtu imajo zajci, papige in kače skupaj 24 glav, 14 kril in 62 nog. Koliko kač je v živalskem vrtu?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

A2. Naj bosta a in b različni realni števili. Za katero število x velja enakost $\frac{x-a}{x-b} = \frac{x-b}{x-a}$?

(**A**) $\frac{a-b}{2}$ (**B**) $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ (**C**) $\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$ (**D**) $a+b$ (**E**) $\frac{a+b}{2}$

A3. Daljica AB je dolga 20 cm. Lomljena črta, ki povezuje točki A in B, tvori z daljico AB 7 enakostraničnih trikotnikov. Noben odsek lomljene črte ne leži na daljici AB. Koliko centimetrov je dolga lomljena črta?



(**A**) $40\sqrt{3}$ (**B**) 40 (**C**) $20+20\sqrt{3}$ (**D**) $20+20\sqrt{2}$

(**E**) Nemogoče je določiti.

B1. Naj bodo a, b in c taka naravna števila, da je število $a^2 + b^2 + c^2$ deljivo s 7. Dokaži, da je tudi število $a^4 + b^4 + c^4$ deljivo s 7.

(6 točk)

B2. V krog s polmerom r včrtamo deltoid, ki ima eno stranico dvakrat toliko dolgo kot drugo. Izračunaj razmerje med ploščinama včrtanega deltoida in kroga.

(6 točk)

B3. V rombu, katerega stranice in ena izmed diagonal so dolge 60 cm, se nahaja 9 točk. Ali obstajata dve izmed teh točk, ki med seboj nista oddaljeni več kot 30 cm?

(6 točk)

58. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Regijsko tekmovanje, 2. april 2014

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

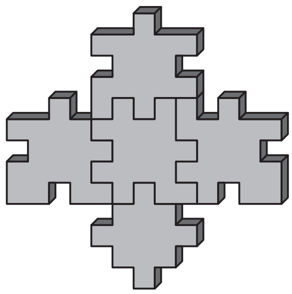
A1	A2	A3

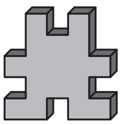
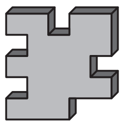
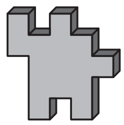
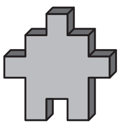
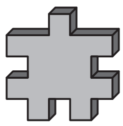
B1	B2	B3

A1. Samo je na list papirja napisal 3-mestno liho naravno število in Petru povedal samo zadnjo števko tega števila. Peter je takoj ugotovil, da število, ki ga je na list papirja napisal Samo, ni praštevilo. Katero števko je Samo povedal Petru?

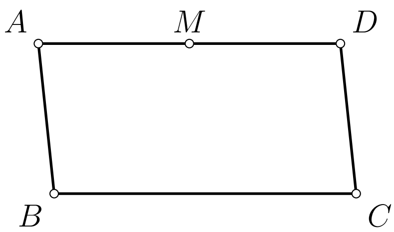
(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

A2. Karmen je na mizi zložila skupaj 5 koščkov (glej sliko). Nato je 4 zunanje koščke obrnila navpično. Kateri košček še potrebuje Karmen, da bo lahko sestavila kocko?



(**A**) 
(**B**) 
(**C**) 
(**D**) 
(**E**) 

A3. Točka M je razpolovišče stranice AD paralelograma $ABCD$ (glej sliko). Kot BAD je velik $84°$, kot AMB pa $48°$. Koliko stopinj je velik kot DCM?



(**A**) 36 (**B**) 42 (**C**) 44 (**D**) 45 (**E**) 48

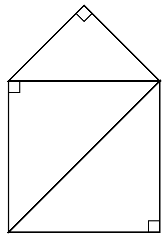
B1. Poišči vsa realna števila $a \geq 0$, za katera ima enačba $2|x-a|+3|x+a|=1$ vsaj eno realno rešitev.

(6 točk)

B2. Ali ima enačba $\cos(\sin x) = \sin(\cos x)$ vsaj eno realno rešitev?

(6 točk)

B3. Konveksen večkotnik imenujemo *enostaven*, če ga lahko razrežemo na končno mnogo enakokrakih pravokotnih trikotnikov. Na skici je prikazan enostaven 5-kotnik. Ali obstaja enostaven 7-kotnik? Kaj pa enostaven 9-kotnik?



(6 točk)

dMFA

58. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Regijsko tekmovanje, 2. april 2014

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Miha ima 4 predalčke. V enem predalčku so le kovanci za 20 centov, v enem predalčku le kovanci za 10 centov, v enem predalčku le kovanci za 2 centa in v enem predalčku le kovanci za 1 cent. Miha lahko vzame kovance iz treh različnih predalčkov, in sicer iz enega predalčka en kovanec, iz enega predalčka dva kovanca in iz enega predalčka tri kovance. Največ koliko centov lahko iz predalčkov vzame Miha?

(**A**) 61 (**B**) 62 (**C**) 82 (**D**) 92 (**E**) 96

A2. V okviru preiskave so aretirali štiri osumljence. Vsak je dal eno izjavo.
Žan: "Izmed osumljencev sem edini nedolžen."
Alen: "Izmed osumljencev sem edini kriv."
Zala: "Vsi osumljenci smo nedolžni."
Beno: "Vsaj dva izmed osumljencev sta kriva."
Nadaljnja preiskava je pokazala, da je bil vsaj eden izmed osumljencev kriv in da so nedolžni govorili resnico, krivi pa so lagali. Koliko osumljencev je bilo krivih?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4
(**E**) Nemogoče je določiti.

A3. Koliko je takih dvomestnih števil, katerih predhodnik in naslednik sta praštevilo in popolni kvadrat, ne nujno v tem vrstnem redu?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

B1. Poišči vse pare naravnih števil (m, n), za katere velja

$$m + 3n - 5 = 2v - 11d,$$

kjer je v najmanjši skupni večkratnik števil m in n, d pa največji skupni delitelj števil m in n.

(6 točk)

B2. Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere velja

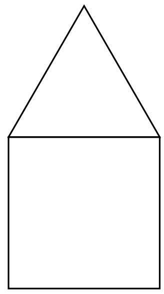
$$f(xy) = xf(y) + 3f(x) + 3$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}$.

(6 točk)

B3. Konveksen večkotnik imenujemo *preprost*, če ga lahko razrežemo na končno mnogo kvadratov in enakostraničnih trikotnikov. Na skici je prikazan preprost 5-kotnik. Ali obstaja preprost 7-kotnik? Kaj pa preprost 13-kotnik?

(6 točk)



58. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Regijsko tekmovanje, 2. april 2014

Rešitve za 1. letnik

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

1	2	3
A	D	C

Utemeljitve:

A1. Naravno število je deljivo z 9 natanko tedaj, ko je vsota njegovih števk deljiva z 9. Ker je vsota števk 7-mestnega števila 2345678 enaka $35 = 3 \cdot 9 + 8$, moramo izbrisati števko 8. S tem dobimo 6-mestno število 234567, katerega vsota števk je $27 = 3 \cdot 9$, in je zato deljivo z 9.

A2. Če se otroci na igrišču v nekem trenutku lahko rezdelijo v 2 enako veliki skupini, pri čemer je v vsaki skupini n fantov in n deklet, potem je skupno število deklet na igrišču enako $2n$, kar je sodo število in je enako skupnemu številu fantov na igrišču. Da bo število deklet na igrišču sodo in enako številu fantov, mora na igrišče priti vsaj 1 dekle in vsaj 6 fantov. Na igrišče bi torej moralo priti še najmanj 7 otrok.

A3. Označimo ploščino enega kvadrata s p. Ploščina območja, ki ga prekrivajo kvadrati, je potem enaka $28p$. Ker sta črtkani črti pravokotni, je iz slike razvidno, da lahko sredinski šestkotnik sestavimo iz dveh celih kvadratov in iz dveh polovičk kvadrata. Ploščina enega šestkotnika je torej enaka $3p$, ploščina območja, ki ga prekrivajo šestkotniki, pa $18 \cdot 3p = 54p$. Iskano razmerje je zato enako $28p : 54p = 14 : 27$.

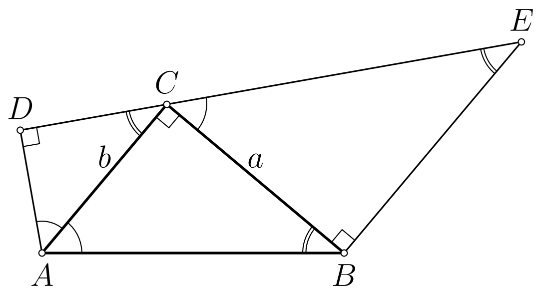
B1. Naj bosta a in b dolžini stranic takega pravokotnika. Iz navodil naloge sledi, da je $2(a+b) = n = ab$. To enakost med a in b preuredimo v $a(b-2) = 2b$ in od tod izrazimo

$$a = \frac{2b}{b-2} = \frac{2(b-2)}{b-2} + \frac{4}{b-2} = 2 + \frac{4}{b-2}.$$

Ker sta a in b naravni števili, mora število $b-2$ deliti 4. Ker je hkrati število $b-2$ večje od -2, je lahko enako le $-1, 1, 2$ ali 4. Torej je b zaporedoma enak $1, 3, 4$ ali 6 in a zaporedoma enak $-2, 6, 4$ ali 3. Prvi primer odpade, ker -2 ni naravno število. V drugem in četrtem primeru dobimo $n = 18$, v tretjem pa $n = 16$.

Zapis enačbe $2(a+b) = n = ab$ **.. 1 točka**
Preureditev enačbe in izražen a **(ali** b**) .... 1 točka**
Sklep, da $b-2$ **deli 4 .... 1 točka**
Ugotovitev, da je b **enak 1, 3, 4 ali 6 .... 2 točki**
Zapis obeh rešitev ($n = 16$ **ali** $n = 18$**) .... 1 točka**
(Če tekmovalec rešitev le zapiše, se mu prizna 1 točko.)

B2. Zaradi podobnosti trikotnikov ACD in ABC velja $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAC$. Opazimo, da točka E leži na drugem bregu premice BC kot točka A, zato velja $\sphericalangle BCE = 180° - \sphericalangle ACB - \sphericalangle DCA = 90° - \sphericalangle DCA = \sphericalangle CAD = \sphericalangle BAC$. Torej sta si tudi trikotnika ABC in CEB podobna, saj imata dva enaka kota. Po pitagorovem izreku velja $|AB| = \sqrt{a^2+b^2}$. Iz podobnosti trikotnikov ABC in ACD sledi



$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|} \qquad \text{in} \qquad \frac{|DC|}{|AC|} = \frac{|CB|}{|AB|}.$$

Iz prve enakosti izrazimo $|AD| = \frac{|AC|^2}{|AB|} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, iz druge pa $|DC| = \frac{|AC|\cdot|CB|}{|AB|} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Ker sta si tudi trikotnika ABC in CEB podobna, velja

$$\frac{|BE|}{|BC|} = \frac{|CB|}{|CA|},$$

od koder izrazimo $|BE| = \frac{|CB|^2}{|CA|} = \frac{a^2}{b}$. Ploščina štirikotnika $ABED$ je torej enaka

$$\begin{aligned} p &= \frac{|AD|\cdot|DC|}{2} + \frac{|AC|\cdot|CB|}{2} + \frac{|CB|\cdot|BE|}{2} = \\ &= \frac{ab^3}{2(a^2+b^2)} + \frac{ab}{2} + \frac{a^3}{2b} = \frac{ab^4 + ab^2(a^2+b^2) + a^3(a^2+b^2)}{2b(a^2+b^2)} = \\ &= \frac{2ab^4 + 2a^3b^2 + a^5}{2b(a^2+b^2)}. \end{aligned}$$

Pregledno narisana in označena skica .... 1 točka
Utemeljena ugotovitev, da sta si trikotnika ABC in CEB podobna .... 1 točka
Uporaba podobnosti trikotnikov ABC in ACD ter izraženi stranici $|AD|$ in $|DC|$ 1 točka
Uporaba podobnosti trikotnikov ABC in CEB ter izražena stranica $|BE|$ 1 točka
Zapis ploščine štirikotnika $ABED$ kot vsote ploščin treh pravokotnih trikotnikov 1 točka
Izračun ploščine štirikotnika $ABED$ .... 1 točka

B3. Anin krog je dolg 1000 m, Benov pa 1200 m. Denimo, da se v točki S spet srečata po tem, ko je Ana prevozila n krogov, Beno pa k krogov. Ana prevozi n krogov v času $n \cdot \frac{1000 \text{ m}}{v_{\text{Ana}}}$, Beno pa k krogov v času $k \cdot \frac{1200 \text{ m}}{v_{\text{Beno}}}$. Ta dva časa morata biti enaka, torej je

$$n \cdot \frac{1000 \text{ m}}{v_{\text{Ana}}} = k \cdot \frac{1200 \text{ m}}{v_{\text{Beno}}}.$$

Iz te enačbe izrazimo

$$\frac{n}{k} = \frac{1200 \text{ m}}{1000 \text{ m}} \cdot \frac{v_{\text{Ana}}}{v_{\text{Beno}}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{12}{35}.$$

Ker iščemo najmanjša možna n in k, ulomek $\frac{12}{35}$ pa je okrajšan, sledi $n = 12$ in $k = 35$. Torej, ko se prvič ponovno srečata v točki S, Ana prevozi 12 krogov, Beno pa 35 krogov.

Zapis ali uporaba dolžine Anine poti (n·1000 m) in dolžine Benove poti (k·1200 m) od starta do prvega srečanja .... 1 točka
Zapis enačbe $n \cdot \frac{1000 \text{ m}}{v_{\text{Ana}}} = k \cdot \frac{1200 \text{ m}}{v_{\text{Beno}}}$ .... 2 točki
Izraženo razmerje $\frac{n}{k} = \frac{12}{35}$ .... 1 točka
Argumentiran sklep, da je $n = 12$ in $k = 35$ .... 2 točki
(Če tekmovalec rešitev le zapiše, se mu prizna 1 točka.)

Rešitve za 2. letnik

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

1	2	3
A	E	B

Utemeljitve:

A1. Zajci in kače nimajo kril, papige pa imajo po dve krili, zato je v živalskem vrtu $14 : 2 = 7$ papig. Papige imajo torej skupaj $7 \cdot 2 = 14$ nog. Ker kače nimajo nog, imajo zajci skupaj $62 - 14 = 48$ nog. Vsak zajec ima 4 noge, zato je v živalskem vrtu $48 : 4 = 12$ zajcev. Torej je v živalskem vrtu $24 - 12 - 7 = 5$ kač.

A2. Dano enačbo pomnožimo z $(x-a)(x-b)$, da dobimo $(x-a)^2 = (x-b)^2$. Po kvadriranju odštejemo x^2 in dobimo $-2ax + a^2 = -2bx + b^2$, kar lahko preuredimo do $2(b-a)x = (b-a)(b+a)$. Ker $b - a \neq 0$, lahko enačbo delimo z $b - a$, da dobimo $2x = b + a$, od koder izrazimo $x = \frac{a+b}{2}$.

A3. Označimo dolžine stranic teh 7 enakostraničnih trikotnikov po vrsti z $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Dolžina daljice AB je potem enaka $a_1 + a_2 + \ldots + a_7$, dolžina lomljene črte od A do B pa $2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_7 = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_7)$. Dolžina lomljene črte je torej dvakratnik dolžine daljice in je zato enaka 40 cm.

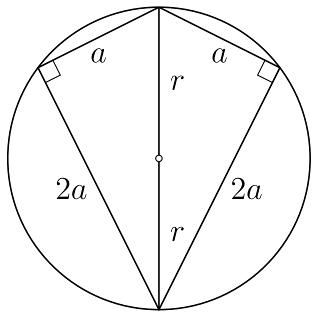
B1. Pri deljenju s 7 ima popoln kvadrat lahko ostanek 0, 1, 2 ali 4. Ker je število $a^2+b^2+c^2$ deljivo s 7, morajo imeti števila a^2, b^2 in c^2 pri deljenju s 7 ali vsa ostanek 0 ali tri različne ostanke enake 1, 2 in 4. V prvem primeru so števila a, b in c deljiva s 7 in zato je tudi število $a^4+b^4+c^4$ deljivo s 7. V drugem primeru lahko predpostavimo, da je $a^2=7k+1$, $b^2=7m+2$ in $c^2=7n+4$ za neka cela števila k,m in n. Tedaj velja

$$a^4+b^4+c^4=(7k+1)^2+(7m+2)^2+(7n+4)^2=49(k^2+m^2+n^2)+14(k+m+n)+21,$$

kar je spet deljivo s 7.

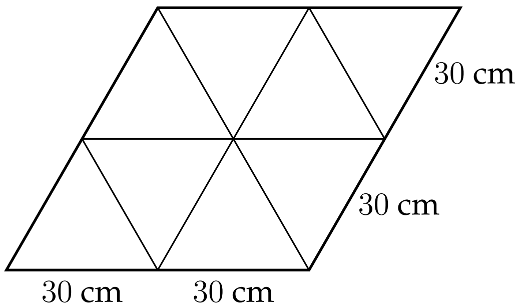
Ugotovitev, da ima lahko popoln kvadrat pri deljenju s 7 **ostanek** $0,1,2$ **ali** 4 **... 1 točka**
Sklep, da morajo imeti števila a^2,b^2 **in** c^2 **pri deljenju s** 7 **bodisi vsa ostanek** 0 **bodisi tri različne ostanke** $1,2$ **in** 4 **.. 2 točki**
Ugotovitev, da je v primeru, ko so a^2,b^2 **in** c^2 **deljiva s 7, tudi** $a^4+b^4+c^4$ **deljiv s 7 1 točka**
Zapis $a^2=7k+1$**,** $b^2=7m+2$ **in** $c^2=7n+4$ **............................... 1 točka**
Utemeljen sklep, da je v tem primeru $a^4+b^4+c^4$ **deljiv s 7 .... 1 točka**

B2. Označimo dolžini stranic včrtanega deltoida z a in $2a$. Zaradi simetrije poteka daljša izmed diagonal deltoida skozi središče kroga. Po izreku o kotu v polkrogu je torej kot med stranicama dolžin a in $2a$ pravi. Po Pitagorovem izreku je dolžina daljše diagonale enaka $\sqrt{a^2+(2a)^2} = \sqrt{5}a$, kar pomeni, da je $r = \frac{\sqrt{5}a}{2}$. Ploščina deltoida je enaka $2 \cdot \frac{a \cdot 2a}{2} = 2a^2$, ploščina kroga pa $\pi r^2 = \frac{5\pi a^2}{4}$. Iskano razmerje ploščin je $\frac{8}{5\pi}$.

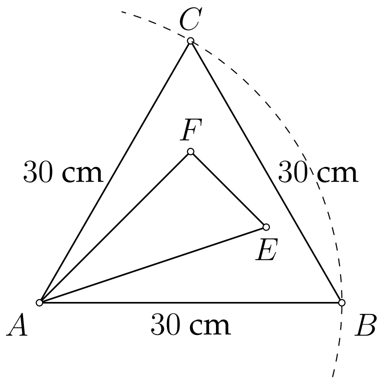


Pregledno narisana in označena skica (vključno z ugotovitvijo, da je daljša diagonala romba premer kroga) .... 1 točka
Utemeljena ugotovitev, da je kot med stranicama z dolžino a in $2a$ pravi 1 točka
Izračun $r = \frac{\sqrt{5}a}{2}$ ali upoštevanje izračuna pri izračunu ploščine kroga .... 2 točki
Izračun ploščine deltoida .... 1 točka
Izračunano razmerje .... 1 točka

B3. Odgovor je da. Krajša diagonala razdeli romb na dva enakostranična trikotnika s stranico 60 cm. Vsakega od njiju lahko razdelimo še na 4 enakostranične trikotnike s stranico 30 cm. S tem smo romb razdelili na 8 enakostraničnih trikotnikov s stranico 30 cm. Ker v rombu leži 9 točk, obstaja enakostraničen trikotnik, v katerem ležita vsaj dve točki.



Dokažimo, da sta ti dve točki med seboj oddaljeni največ 30 cm. Točki označimo z E in F, oglišča enakostraničnega trikotnika, v katerem ležita, pa z A, B in C. Oglejmo si trikotnik AEF. Notranji kot tega trikotnika pri oglišču A je velik največ $60°$, torej mora biti eden od preostalih dveh notranjih kotov velik vsaj $60°$. To pomeni, da stranica EF ni najdaljša stranica trikotnika AEF. Toda preostali dve stranici sta dolgi največ 30 cm, saj točki E in F ležita znotraj kroga s središčem v A in polmerom 30 cm. Torej je tudi razdalja med točkama E in F največ 30 cm.



Ugotovitev, da razdeli diagonala romb na dva enakostranična trikotnika 1 točka
Ugotovitev, da lahko romb razdelimo na osem enakostraničnih trikotnikov s stranico 30 cm .... 1 točka
Sklep, da obstaja enakostranični trikotnik s stranico 30 cm, v katerem ležita vsaj dve točki .... 1 točka
Utemeljen sklep, da sta točki, ki ležita znotraj tega trikotnika med seboj oddaljeni največ 30 cm .... 2 točki
Odgovor .... 1 točka

Rešitve za 3. letnik

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

1	2	3
C	A	B

Utemeljitve:

A1. Iz zadnje števke trimestnega naravnega števila lahko ugotovimo, da le to ni praštevilo le, če je zadnja števka soda (in je zato število deljivo z 2) ali pa enaka 5 (in je zato število deljivo s 5). Vse ostale števke so lahko zadnje števke trimestnega praštevila, npr. števila 101, 103, 107 in 109 so vsa praštevila. Ker je bilo Samovo število liho, je bila njegova zadnja števka enaka 5.

A2. Levi rob levega koščka in desni rob desnega koščka imata zarezi navznoter, zgornji rob zgornjega koščka in spodnji rob spodnjega koščka pa imata zarezi navzven. Torej mora imeti zadnji košček na dveh nasprotnih robovih zarezi navzven, na preostalih dveh nasprotnih robovih pa zarezi navznoter. Temu pogoju usteza le košček (A), ki ima na levem in desnem robu zarezi navzven, na spodnjem in zgornjem robu pa zarezi navznoter. Karmen torej potrebuje še košček (A).

A3. S pomočjo kotov trikotnika ABM izračunamo $\sphericalangle MBA = 180° - 84° - 48° = 48°$, torej je trikotnik ABM enakokrak z vrhom pri A. Sledi $|AB| = |AM|$. Ker je M razpolovišče stranice AD, velja $|AM| = |MD|$, ker pa je $ABCD$ paralelogram, je $|AB| = |CD|$. Torej je $|CD| = |MD|$ in tudi trikotnik MCD je enakokrak z vrhom pri D. Od tod izračunamo $\sphericalangle DCM = \frac{180° - \sphericalangle MDC}{2} = \frac{\sphericalangle BAD}{2} = 42°$.

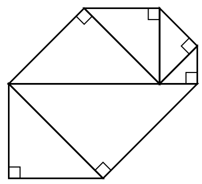
B1. Obravnavajmo več možnosti. Če je $x < -a$, dobimo enačbo $-2(x-a)-3(x+a)=1$, od koder izračunamo $x = -\frac{a+1}{5}$. Da bo to res rešitev, mora veljati $-\frac{a+1}{5} < -a$ oziroma $a < \frac{1}{4}$. Če je $-a \leq x \leq a$, dobimo enačbo $-2(x-a)+3(x+a)=1$, torej je $x = 1-5a$. To je rešitev, le takrat, ko je $-a \leq 1-5a \leq a$, kar je ekvivalentno pogoju $\frac{1}{6} \leq a \leq \frac{1}{4}$. Če je $x > a$, dobimo $2(x-a)+3(x+a)=1$ oziroma $x = \frac{1-a}{5}$. Da bo to rešitev, mora veljati $\frac{1-a}{5} > a$ oziroma $a < \frac{1}{6}$. Enačba ima torej vsaj eno realno rešitev natanko tedaj, ko je $a \leq \frac{1}{4}$.

Izračun $x = -\frac{a+1}{5}$ **pri možnosti** $x < -a$ **.......................................1 točka**
Zapis rešitve $-\frac{a+1}{5} < -a$ **oziroma** $a < \frac{1}{4}$ **....................................1 točka**
Izračun $x = 1-5a$ **pri možnosti** $-a \leq x \leq a$ **.................................1 točka**
Zapis rešitve $-a \leq 1-5a \leq a$ **oziroma** $\frac{1}{6} \leq a \leq \frac{1}{4}$ **...........................1 točka**
Izračun $x = \frac{1-a}{5}$ **pri možnosti** $x > a$ **in zapis rešitve** $a < \frac{1}{6}$ **.................1 točka**
Zapis končne rešitve $a \leq \frac{1}{4}$ **...1 točka**

B2. Enačbo prepišemo v $\cos(\sin x) = \cos(\frac{\pi}{2} - \cos x)$. Od tod sledi, da mora veljati $\frac{\pi}{2} - \cos x = \pm \sin x + 2k\pi$ za nek $k \in \mathbb{Z}$, torej $\cos x \pm \sin x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$. Ker je $|\cos x \pm \sin x| \leq |\cos x| + |\sin x| \leq 2$, mora biti $k = 0$, torej je $\cos x \pm \sin x = \frac{\pi}{2}$. Če to enačbo kvadriramo, dobimo $\cos^2 x \pm 2 \cos x \sin x + \sin^2 x = \frac{\pi^2}{4}$ oziroma $\pm \sin 2x = \frac{\pi^2}{4} - 1$. Ker je $\frac{\pi^2}{4} - 1 > \frac{9}{4} - 1 > 1$, ta enačba nima realnih rešitev, torej tudi začetna enačba nima nobene realne rešitve.

Zapis enačbe $\cos(\sin x) = \cos(\frac{\pi}{2} - \cos x)$ **.................................... 1 točka**
Ugotovitev, da je $\frac{\pi}{2} - \cos x = \pm \sin x + 2k\pi$ **................................ 1 točka**
Zapis ekvivalentne enačbe $\cos x \pm \sin x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$ **........................ 1 točka**
Utemeljen sklep, da je $k = 0$ **.. 1 točka**
Izračun $\pm \sin 2x = \frac{\pi^2}{4} - 1$ **.. 1 točka**
Sklep, da je $\frac{\pi^2}{4} - 1 > 1$ **in odgovor .... 1 točka**

B3. Na skici je prikazan enostaven 7-kotnik. Dokažimo, da enostaven 9-kotnik ne obstaja. Notranji koti enakokrakega pravokotnega trikotnika so enaki 45° in 90°. Torej je vsak notranji kot enostavnega večkotnika lahko enak le 45°, 90° ali 135°. Če bi enostaven 9-kotnik obstajal, bi bila vsota njegovih notranjih kotov največ $9 \cdot 135^\circ = 1215^\circ$. Toda vsota notranjih kotov vsakega 9-kotnika je enaka $(9-2) \cdot 180^\circ = 1260^\circ$. Torej enostaven 9-kotnik ne obstaja.



Odgovor, da enostaven 7-kotnik obstaja .... 1 točka
Skica enostavnega 7-kotnika .... 2 točki
Odgovor, da enostaven 9-kotnik ne obstaja .... 1 točka
Ugotovitev, da lahko notranji kot enostavnega večkotnika meri 45°, 90° ali 135° 1 točka
Utemeljen sklep, da enostavnega 9-kotnika ni .... 1 točka

Rešitve za 4. letnik

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor eno točko odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

1	2	3
C	C	E

Utemeljitve:

A1. Miha dobi največji znesek, če iz predalčkov vzame tri kovance po 20 centov, dva kovanca po 10 centov in en kovanec po 2 centa. Znesek je v tem primeru enak 82 centov.

A2. Alen ne more biti nedolžen, saj bi sicer govoril resnico, toda potem bi moral biti po svojih besedah kriv. Alen je zato kriv. To pomeni, da je Zala lagala, torej je tudi ona kriva. Sledi, da je Beno govoril resnico, torej je nedolžen. To pa pomeni, da je Žan lagal, zato je tudi on kriv. Krivi so torej natanko trije osumljenci, to so Žan, Alen in Zala.

A3. Popolni kvadrati, ki so predhodnik ali naslednik dvomestnega števila, so natanko $9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$ in 100. Dvomestna števila, katerih predhodnik oziroma naslednik je popoln kvadrat so torej le števila $10, 15, 17, 24, 26, 35, 37, 48, 50, 63, 65, 80, 82$ in 99. Toda dvomestno število, katerega predhodnik oziroma naslednik je praštevilo, mora biti sodo, zato nam ostanejo le števila $10, 24, 26, 48, 50, 80$ in 82. Od teh pa imajo za predhodnik oziroma naslednik praštevilo le števila $10, 24, 48, 80$ in 82. Vsa ta števila res ustrezajo pogoju. Pravilen odgovor je torej 5.

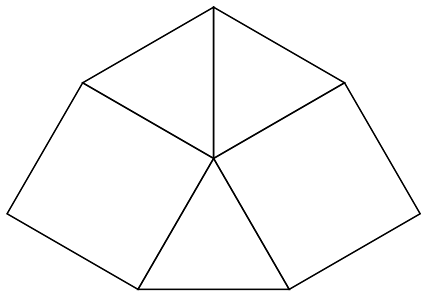
B1. Pišimo $m = da$ in $n = db$. Torej sta a in b tuji naravni števili in velja $v = dab$. Če to vstavimo v enačbo dobimo $da + 3db - 5 = 2dab - 11d$, torej mora d deliti 5. Denimo najprej, da je $d = 1$. Tedaj lahko enačbo preuredimo v $a(2b-1) = 3b+6$. Od tod sledi, da $2b-1$ deli $3b+6$, torej deli tudi $2(3b+6) - 3(2b-1) = 15$. Ker je $2b-1$ naravno število, imamo štiri možnosti. Če je $2b-1 = 1$, je $b = 1$ in $a = 9$. Če je $2b-1 = 3$, je $b = 2$ in $a = 4$, kar pa je protislovje, saj si a in b nista tuji. Če je $2b-1 = 5$, je $b = 3$ in $a = 3$, kar je spet protislovje. Če pa je $2b-1 = 15$, je $b = 8$ in $a = 2$, kar je spet protislovje. V tem primeru imamo torej rešitev $(9, 1)$. Naj bo sedaj $d = 5$. Tedaj lahko enačbo delimo s 5 in preuredimo v $a(2b-1) = 3b+10$. Od tod sledi, da $2b-1$ deli $3b+10$, torej deli tudi $2(3b+10) - 3(2b-1) = 23$. Imamo dve možnosti. Če je $2b-1 = 1$, je $b = 1$ in $a = 13$. Če pa je $2b-1 = 23$, je $b = 12$ in $a = 2$, kar je protislovje, saj si a in b nista tuja. Tako dobimo še rešitev $(65, 5)$.

Zapis $m = d \cdot a$ in $n = d \cdot b$ za tuji naravni števili a in b .... 1 točka
Ugotovitev, da d deli 5 .... 1 točka
Zapis rešitve $(9, 1)$ in utemeljitev, da drugih rešitev v primeru, ko je $d = 1$ ni ... 2 točki
Zapis rešitve $(65, 5)$ in utemeljitev, da drugih rešitev v primeru, ko je $d = 5$ ni .. 2 točki

B2. V funkcijsko enačbo vstavimo $x = 0$, da dobimo $f(0) = 3f(0)+3$, od koder izračunamo $f(0) = -\frac{3}{2}$. Sedaj v funkcijsko enačbo vstavimo $y = 0$, da dobimo $f(0) = xf(0) + 3f(x) + 3$, od koder izrazimo $f(x) = -\frac{1}{3}xf(0) + \frac{1}{3}f(0) - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$. Preverimo lahko, da funkcija $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ res ustreza dani funkcijski enačbi, torej je to edina rešitev.

Zapis funkcijske enačbe v primeru, ko je $x = 0$ **.......................... 1 točka**
Izračun $f(0) = -\frac{3}{2}$ **.. 1 točka**
Zapis funkcijske enačbe v primeru, ko je $y = 0$ **.......................... 1 točka**
Zapis funkcije f**:** $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ **... 2 točki**
Sklep, da je to edina rešitev .... 1 točka

B3. Na skici je prikazan preprost 7-kotnik. Dokažimo, da preprost 13-kotnik ne obstaja. Notranji koti kvadratov in enakostraničnih trikotnikov so enaki $90°$ in $60°$. Torej je vsak notranji kot preprostega večkotnika lahko enak le $60°$, $90°$, $120°$ ali $150°$. Če bi preprost 13-kotnik obstajal, bi bila vsota njegovih notranjih kotov največ $13 \cdot 150° = 1950°$. Toda vsota notranjih kotov vsakega 13-kotnika je enaka $(13-2) \cdot 180° = 1980°$. Torej preprost 13-kotnik ne obstaja.



Odgovor, da preprost 7-kotnik obstaja .... **1 točka**
Skica enostavnega 7-kotnika .... **2 točki**
Odgovor, da enostaven 13-kotnik ne obstaja .... **1 točka**
Ugotovitev, da lahko notranji kot enostavnega večkotnika meri $60°$, $90°$, $120°$ ali $150°$ .... **1 točka**
Utemeljen sklep, da preprostega 13-kotnika ni .... **1 točka**