**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

1. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Državno tekmovanje, 26. maj 2001

Naloge za 1. letnik

1. Podjetnik A ima na računu $8{,}6$ miljona tolarjev, ko se odloči, da ne bo več delal. Vsak mesec porabi za življenje $120\,000$ tolarjev. Podjetnik B pa ima na računu $1{,}2$ miljona tolarjev in še vedno ustvarja. Vsak mesec ima $250\,000$ dobička. Čez koliko časa bosta imela podjetnika enako denarja?
   Čez koliko časa bo podjetnik A ostal brez denarja?

2. Miha je zapisal ulomek $\frac{37}{13}$, Jaka pa ulomek $2+\frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}}$ in ukazal Mihi naj poišče naravna števila x, y ter z, da bosta ulomka enaka. Katera naravna števila so to?

3. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo premice $x+6y+9=0$, $4x-y-14=0$, $x+2y-8=0$, $x-2y+4=0$ in $2x-y+5=0$.

4. V šestmestnem številu z desetiškim zapisom $523abc$ določi neznane števke a, b, c tako, da bo število hkrati deljivo s 7, 8 in 9.

5. Dokaži, da za poljubna realna števila x, y, z velja $x^2+y^2+z^2 \geq xy+xz+yz$.

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

1. tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških
in strokovnih šol
Državno tekmovanje, 26. maj 2001

Naloge za 2. letnik

1. Z uporabo Pitagorovega izreka dokaži, da v poljubnem ostrokotnem trikotniku velja $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

2. Tetiva AB krožnice meri $10\sqrt{5}$ cm. Skozi njeno razpolovišče P poteka tetiva CD, ki jo točka P deli v razmerju $1 : 5$. Izračunaj dolžino tetive CD.

3. Dokaži enakost
$$\frac{(a+1)^2 - (a^2-1) + 2\sqrt{a^2-1}}{a^2 - 1 - (a-1)^2 + 2\sqrt{a^2-1}} = \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}.$$

4. Vsota števk dvomestnega števila je enaka 9, vsota kvadratov teh števk pa je za 1 manjša od dvakratnika števila. Katero število je to?

5. Določi naravno število m, da bo teme parabole $y = -x^2 + mx - 13$ ležalo na premici $y = x - 1$. Izračunaj razdaljo temena od koordinatnega izhodišča!

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

1. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Državno tekmovanje, 26. maj 2001

Naloge za 3. letnik

1. Reši enačbo $\log_2(2\log_9(1+\log_{0,5}(-\frac{3}{4}+\log_2 x)))=0$.

2. Pravilna štiristrana piramida z osnovnim robom a ima višino $\frac{a}{2}$. Natančno izračunaj kot φ med sosednjima stranskima ploskvama.

3. Izračunaj število stranic pravilnega večkotnika, če je število njegovih diagonal enako rešitvi enačbe $9^x+(2-3^{90})3^x-2\cdot 3^{90}=0$.

4. Dana je funkcija $f(x)=-\frac{1}{2}\sin x$.

   (A) Zapiši funkcijo $g(x)=2\cdot f(-2x)+1$.

   (B) Izračunaj ničle in točke, v katerih doseže funkcija $g(x)$ največjo oz. najmanjšo vrednost.

   (C) Nariši graf funkcije $g(x)$.

5. V trikotniku ABC izberemo poljubno notranjo točko D. Naj bodo T_1, T_2 in T_3 težišča trikotnikov ABD, BCD in CAD. Pokaži, da predstavlja ploščina trikotnika $T_1T_2T_3$ eno devetino ploščine trikotnika ABC.

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

**1. tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških
in strokovnih šol**
Državno tekmovanje, 26. maj 2001

Naloge za 4. letnik

1. Izračunaj vsoto vseh naravnih števil, ki so zapisana z največ dvema števkama ter dajo pri deljenju s 5 ostanek 1.

2. Škatlo lahko pošljemo kot paket le, če vsota dolžine, širine in višine ni večja kot 14 dm. Naj bo širina škatle enaka višini. Ugotovi največjo možno prostornino škatle, ki jo bo sprejela pošta.

3. Napiši enačbo krožnice, ki leži simetrično krožnici $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ glede na premico $y=x-3$.

4. Dana je funkcija, ki je kvocient dveh polinomov druge stopnje, ima ničli v točkah -1 in 2. Njeno definicijsko območje je $\mathbb{R}\backslash\{1,-2\}$, graf pa seka ordinatno os v točki -2. Zapiši enačbo te funkcije.

5. Dano je aritmetično zaporedje. Razmerje vsot prvih m in prvih n členov za poljubni naravni števili m in n je $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m(m+1)}{n(n+1)}$. Zapiši prvih nekaj členov zaporedja.

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

1. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 26. maj 2001

Rešitve nalog

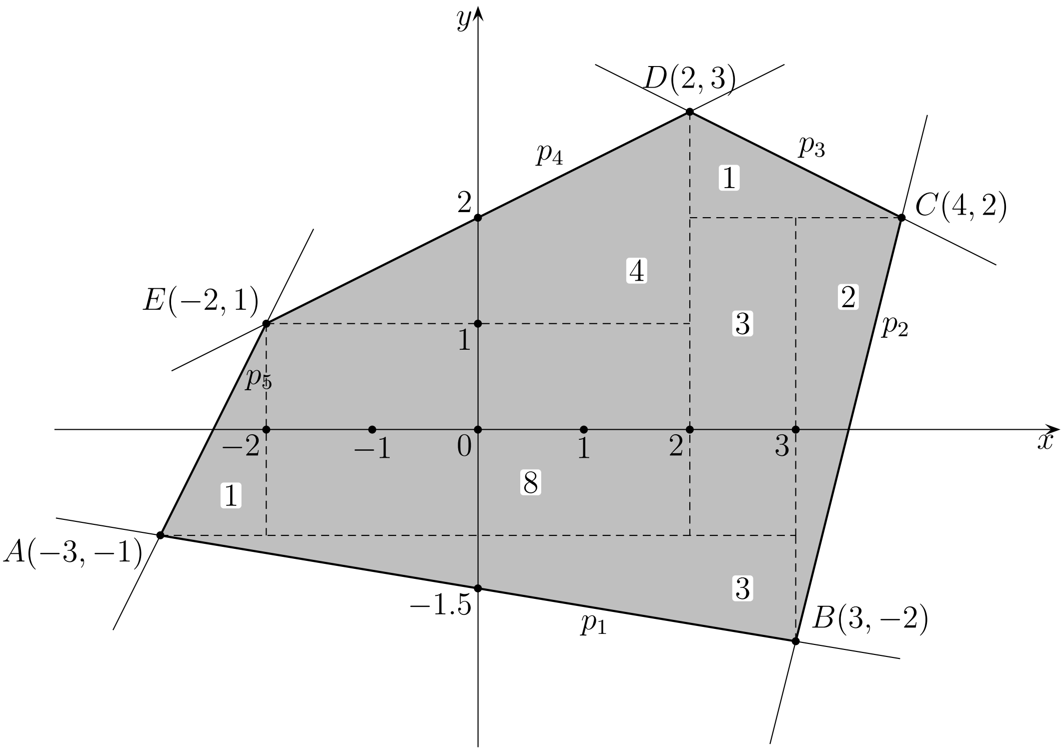
Prvi letnik

1. Podjetnik A bo imel čez k mesecev $8\,600\,000 - 120\,000k$ SIT, podjetnik B pa $1\,200\,000 + 250\,000k$. Enako denarja bosta imela, ko bo $8\,600\,000 - 120\,000k = 1\,200\,000 + 250\,000k$ to je pri $k = 20$. Podjetnik A bo bankrotiral, ko bo $8\,600\,000 - 120\,000k = 0$, to je pri $k \doteq 71{,}7$. Bankrotiral bo približno čez 71,7 mesecev.

2. Ker mora veljati $\frac{37}{13} = 2 + \frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}}$, je $\frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}} = \frac{11}{13}$. Sledi $x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{13}{11}$. Ker je $\frac{1}{y+\frac{1}{z}} > 0$, x naravno število in $1 < \frac{13}{11} < 2$, sledi $x = 1$ in $\frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{2}{11}$ oziroma $y + \frac{1}{z} = \frac{11}{2}$. Tej enačbi pa ustrezata naravni števili $z = 2$ in $y = 5$.

3. Poimenujmo premice v nalogi po vrsti z p_1, p_2, p_3, p_4 in p_5. Če jih narišemo vidimo, da omejujejo petkotnik $ABCDE$. Premici p_1 in p_5 se sekata v A, torej za koordinati točke A velja $x + 6y + 9 = 0$ in $2x - y + 5 = 0$. Sledi $A(-3, -1)$. Podobno dobimo še $B(3, -2)$, $C(4, 2)$, $D(2, 3)$ in $E(-2, 1)$.

   Ploščino lika lahko izračunamo na več načinov. Na sliki je narisano, kako lahko lik razdelimo na 5 pravokotnih trikotnikov in 2 pravokotnika, katerih ploščino zlahka izračunamo. Ploščina je torej $1 + 8 + 4 + 3 + 3 + 1 + 2 = 22$.



4. Ker mora biti število deljivo s 7, 8 in 9, je deljivo s $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. Pišemo lahko $\overline{523abc} = 523000 + \overline{abc} = 504 \cdot 1037 + 352 + \overline{abc}$. Zato mora biti $352 + \overline{abc}$ večkratnik števila 504. Ker pa je $352 + \overline{abc}$ največ 1351, je lahko enako 504 ali 1008. V prvem primeru dobimo $\overline{abc} = 152$, v drugem pa $\overline{abc} = 656$.

5. Če neenakost pomnožimo z 2, dobimo $2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2yz+2zx$ oziroma $x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2 \geq 0$. Slednjo lahko preoblikujemo v $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$, kar seveda velja.

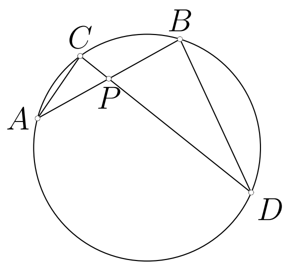
Drugi letnik

1. Naj bo C' nožišče višine iz C. Potem velja $|AC'| = b\cos\alpha$ in $|BC'| = c - b\cos\alpha$. Po Pitagorovem izreku lahko zapišemo višino na dva načina in sicer

$$b^2 - (b\cos\alpha)^2 = v^2 = a^2 - (c - b\cos\alpha)^2,$$

kar nam da $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

2. Ker sta obodna kota nad skupno tetivo enaka, velja $\angle ADC = \angle ABC$. Torej sta si trikotnika ADP in CBP podobna, zato je $\frac{|AP|}{|DP|} = \frac{|CP|}{|BP|}$. Vemo, da je $|AP| = |BP| = 5\sqrt{5}$ in $|CP| = t$, $|PD| = 5t$, od koder sledi $t = 5$ in zato je tetiva CD dolga $|CD| = 6t = 30$ cm.



3. Če v enačbi odpravimo ulomke, dobimo

$$\sqrt{a-1}((a+1)^2 - (a^2-1) + 2\sqrt{a^2-1}) = \sqrt{a+1}(a^2 - 1 - (a-1)^2 + 2\sqrt{a^2-1})$$

oziroma

$$\begin{aligned} &\sqrt{a-1}(a^2+2a+1-a^2+1+2\sqrt{(a-1)(a+1)}\,) = \\ &= \sqrt{a+1}(a^2-1-a^2+2a-1+2\sqrt{(a-1)(a+1)}\,) \end{aligned}$$

in naprej

$$\sqrt{a-1} \cdot 2(a+1) + 2\sqrt{(a-1)^2(a+1)} = \sqrt{a+1} \cdot 2(a-1) + 2\sqrt{(a-1)(a+1)^2},$$

kar očitno velja.

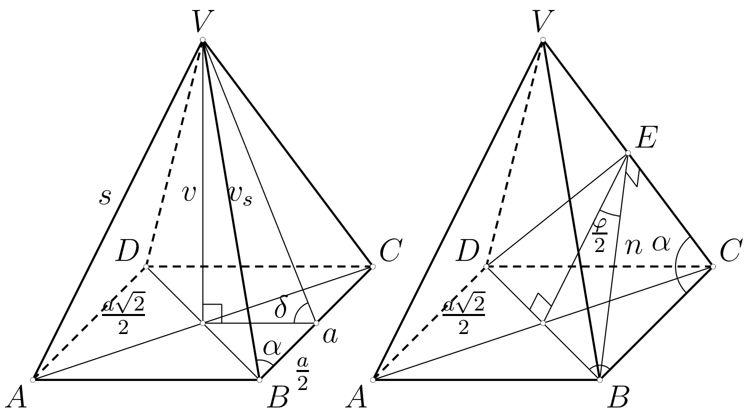
4. Iz $x + y = 9$ in $x^2 + y^2 = 2(10x + y) - 1$ sledi $x^2 + (9-x)^2 = 2(10x + 9 - x) - 1$, to je $x^2 - 18x + 32 = 0$. Od rešitev $x_1 = 2$, $x_2 = 16$ je lahko števka le $x_1 = 2$, zato je iskano število 27.

5. Če koordinati temena $p = \frac{m}{2}$, $q = \frac{m^2-52}{4}$ vstavimo v enačbo premice, dobimo enačbo $m^2 - 2m - 4800$, ki ima rešitvi $m_1 = 8$, $m_2 = -6$. Prva parabola ima teme v točki $T_1(4,3)$, druga v $T_2(-3,-4)$. Vsako od temen je za 5 enot oddaljeno od izhodišča.

Tretji letnik

1. Enačba je ekvivalentna $2\log_9(1 + \log_{0,5}(-\frac{3}{4} + \log_2 x)) = 1$ oziroma $\log_9(1 + \log_{0,5}(-\frac{3}{4} + \log_2 x)) = \frac{1}{2}$. To pomeni $1 + \log_{0,5}(-\frac{3}{4} + \log_2 x) = 9^{\frac{1}{2}} = 3$ in $-\frac{3}{4} + \log_2 x = (\frac{1}{2})^2$. Sledi $\log_2 x = 1$ torej je $x = 2$.

2. Pomagajmo si s skico. Ker je osenčeni trikotnik na prvi sliki enakokrak pravokotni trikotnik, po Pitagorovem izreku sledi $v_s = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ in $s^2 = (\frac{a}{2})^2 + v_s^2 = \frac{3a^2}{4}$, torej $s = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Nadalje je $n = a\sin\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ in zato $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Sledi $\frac{\varphi}{2} = 60°$ in $\varphi = 120°$. Možnost $\frac{\varphi}{2} = 120°$ oziroma $\varphi = 240°$ odpade, ker je očitno $\varphi < 180°$.

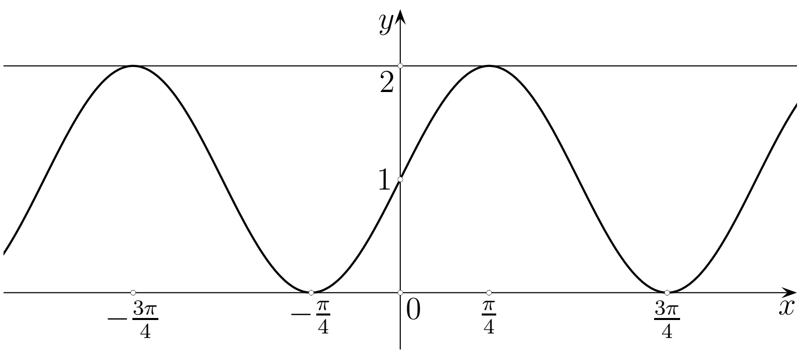


3. Enačbo prepišemo v $3^{2x} + 2\cdot 3^x - 3^{90}\cdot 3^x - 2\cdot 3^{90} = 0$ in razcepimo $(3^x + 2)(3^x - 3^{90}) = 0$. Očitno je $3^x \neq -2$, zato je $3^x = 3^{90}$, torej $x = 90$. Rezultat vstavimo v fomulo za število diagonal n-kotnika $\frac{n(n-3)}{2} = 90$, od koder sledi $n = 15$.

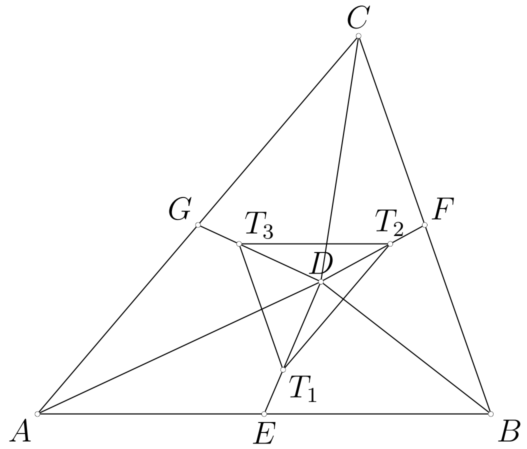
4. **(A)** Velja $g(x) = 2(-\frac{1}{2}\sin 2x) + 1 = \sin 2x + 1$.

   (B) Iz $\sin 2x + 1 = 0$ sledi, da ima $g(x)$ ničle v točkah $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Podobno vidimo, da so največje vrednosti v $T(\frac{\pi}{4} + k\pi\,, 2)$ in najmanjše v $T(-\frac{\pi}{4} + k\pi\,, 2)$ za $k \in \mathbb{Z}$.

   (C)



5. Očitno so E, F, G razpolovišča stranic trikotnika ABC in je zato trikotnik AEG podoben trikotniku ABC. Nadalje je $|ET_1| = \frac{1}{3}|ED|$, $|GT_3| = \frac{1}{3}|GD|$, torej sta si trikotnika T_1DT_3 in EDG podobna. Zato je $|T_1T_3| = \frac{2}{3}|EG| = \frac{1}{3}|BC|$. Analogno je $|T_1T_2| = \frac{1}{3}|AC|$ in $T_2T_3 = \frac{1}{3}|AB|$. Sledi, da je ploščina trikotnika $T_1T_2T_3$ devetina ploščine trikotnika ABC.



Četrti letnik

1. Najmanjše tako število je 1, največje pa 96. Vsota $1+6+11+\ldots+96$ je vsota aritmetičnega zaporedja z diferenco $d = 5$, seštevamo pa prvih 20 členov, zato je enaka $20\cdot 1+5\cdot\frac{19\cdot 20}{2} = 700$.

2. Iz $a+b+c = 14$ in $b = c$ sledi $a = 14-2b$. Torej je $V = (14-2b)b^2$. Odvod $V' = -6b^2+28b$ izenačimo z nič in dobimo rešitvi $b_1 = 0$ (ki ni smiselna) in $b_2 = \frac{14}{3}$. Sledi $a = b = c = \frac{14}{3}$ in $V = (\frac{14}{3})^3$.

3. Dana krožnica ima središče $S_1(1, 2)$ in polmer $r = 1$. Tudi polmer iskane krožnice je 1. Središče iskane krožnice leži na premici, ki je pravokotna na $y = x - 3$ in gre skozi središče S_1, torej na premici $y = -x+3$. Upoštevamo še, da sta S_1 in S_2 enako oddaljena od premice $y = x - 3$ in dobimo $S_2(5, -2)$. Iskana krožnica ima enačbo $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1$.

4. Zaradi pogojev o ničlah in polih takoj vidimo, da je $f(x) = \frac{a(x+1)(x-2)}{b(x-1)(x+2)}$, zaradi $f(0) = -2$ pa dobimo $-2 = \frac{-2a}{-2b}$ torej $a = -2b$. Sledi $f(x) = \frac{-2(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$.

5. Veljati mora
$$\frac{m(m+1)}{n(n+1)} = \frac{S_m}{S_n} = \frac{\frac{m}{2}(2a_1 + (m-1)d)}{\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)},$$
od koder sledi $2a_1(m - n) = 2d(m - n)$. Torej je $a_1 = d$ in $a_n = nd$, se pravi zaporedje je $d, 2d, 3d, 4d, \ldots$.