**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

3. matematično tekmovanje dijakov
srednjih tehniških in strokovnih šol
Ljubljana, 12. april 2003

NALOGE ZA 1. LETNIK

1. Vemo, da je $A = \dfrac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}}$
$$\text{in } B = \left(\frac{a^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} - \frac{b^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}}\right) \cdot (a^{-1} - b^{-1}) \cdot (a^{-2} + b^{-2})^{-1}.$$
Dokaži, da je $A = B^{-1}$.

2. Trije razredi so zbirali papir. Razred A je zbral 20 % več papirja kot razred B, razred B pa 20 % manj papirja kot razred C. Koliko kilogramov papirja so zbrali posamezni razredi, če je skupaj zbranih 759 kg papirja? Zapiši odgovor.

3. Točka $T(a + \sqrt{2}, \sqrt{2} - a)$ naj bo enako oddaljena od točk $A(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ in $B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.
   a) Določi vrednost parametra a.
   b) Izračunaj ploščino trikotnika ABT.

4. Naloga iz zbirke *LILAVATI*, indijskega matematika Bhaskare:

Za zmeraj isto sem ceno kupil zate
teh osem rubinov, zatem smaragdov deset
in nazadnje še biserov sto,
ki nosiš jih zdaj na uhanih.

Če zberem skupaj po enega
iz vrste vsake žlahtnih kamnov teh,
bo njih cena le za kovance tri manjša,
kot je polovica od sto.

O, vedro dekle,
če si v računanju spretna dovolj, le brž povej mi,
koliko je kovancev tedaj vsak od teh kamnov me stal.

5. Dokaži, da vsota petih zaporednih naravnih števil ne more biti praštevilo.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

3. matematično tekmovanje dijakov
srednjih tehniških in strokovnih šol
Ljubljana, 12. april 2003

NALOGE ZA 2. LETNIK

1. Poenostavi izraz

$$\left(x+\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{\frac{x^3-1}{9}+\frac{x-x^2}{3}}}\right)\cdot(x-\sqrt{x-1}).$$

2. Dani sta premici z enačbama $(1-a)x-2ay-2=0$ in $-2x+ay-1=0$. Določi a tako, da se bosta premici sekali na simetrali lihih kvadrantov.

3. V pravilnem šestkotniku $ABCDEF$ s stranico dolžine a se nosilki stranic AF in DE sekata v točki T. Natančno izračunaj dolžino daljice BT.

4. Dan je trapez s podatki $a=7$, $b=4$, $c=3$ in $\beta=90^0$. Izračunaj kot med diagonalama trapeza na stotinko stopinje natančno.

5. Dani funkciji $f(x)=\frac{3-2a}{a+5}x+\frac{2a-1}{3-a}$ določi parameter a tako, da bo graf funkcije sekal ordinatno os nad koordinatnim izhodiščem in da bo funkcija padajoča.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

3. matematično tekmovanje dijakov
srednjih tehniških in strokovnih šol
Ljubljana, 12. april 2003

NALOGE ZA 3. LETNIK

1. Poslovodja je nabavil puloverje in zanje plačal 960 tisočakov. V trgovini jih je prodajal po 12 tisočakov. Dobiček, ki ga je ustvaril pri prodaji vseh puloverjev, je bil enak znesku, ki ga je dal za 60 puloverjev. Koliko puloverjev je nabavil? Zapiši odgovor.

2. Reši sistem enačb $3^x \cdot 2^y = 648$ in $\log_3(x-y) = 0$.

3. Reši enačbo $\log_x(5 \cdot \sqrt{5}) - \frac{5}{4} = (\log_x \sqrt{5})^2$.

4. Zapiši enačbo polinoma 3. stopnje (lahko tudi v razstavljeni obliki), katerega graf poteka skozi točke $A(4,-5)$, $B(-1,0)$, $C(0,5)$ in $D(5,0)$. Skiciraj graf polinoma.

5. Poišči vse celoštevilske rešitve enačbe $x^2 + 73 = y^2$.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

3. matematično tekmovanje dijakov
srednjih tehniških in strokovnih šol
Ljubljana, 12. april 2003

NALOGE ZA 4. LETNIK

1. Dana je funkcija $f(x) = \cos x - \sin x$.

   a) Pokaži, da funkcija ni niti soda niti liha.

   b) Pokaži, da je $f(x) = -\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$, in zapiši zalogo vrednosti.

2. Dokaži, da sestavljajo razlike kvadratov zaporednih naravnih števil aritmetično zaporedje.

3. Ženin in nevesta sta naročila trinadstropno torto iz treh enako visokih tort na med seboj povezanih in enako oddaljenih podstavkih. Razmik med sosednjima podstavkoma je bil 11 cm, trinadstropna torta pa je bila visoka 30 cm. Spodnja torta je bila največja, premer vsake naslednje pa je bil za 6 cm krajši od premera prejšnje.
   S trinadstropno torto sta nahranila sebe in še 28 svatov. Upoštevaj, da je vsak v povprečju pojedel 24 dag torte in da 77π cm^3 torte tehta 10 dag. Kolik je bil polmer spodnje (največje) torte?

4. Poišči ničle funkcije $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 2x}$ in nariši njen graf na intervalu $[-\pi, 2\pi]$.

5. (Naloga je na hrbtni strani tega lista.)

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

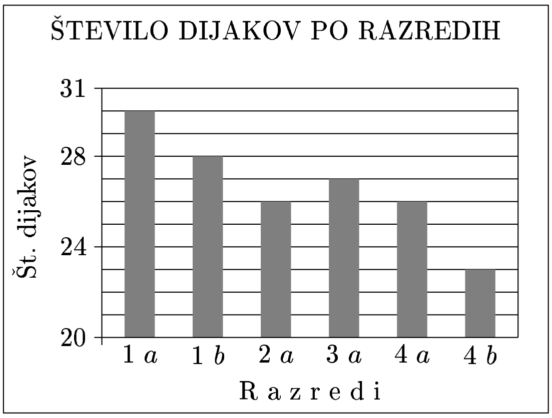
Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

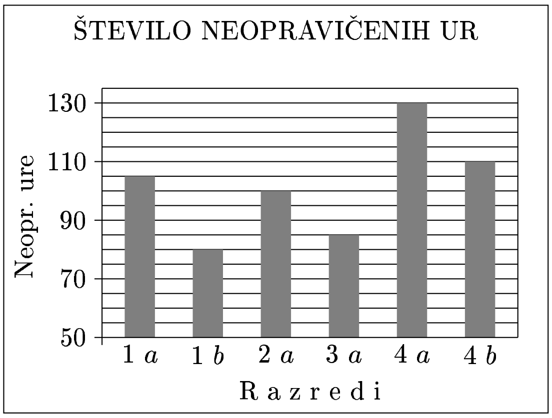
Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

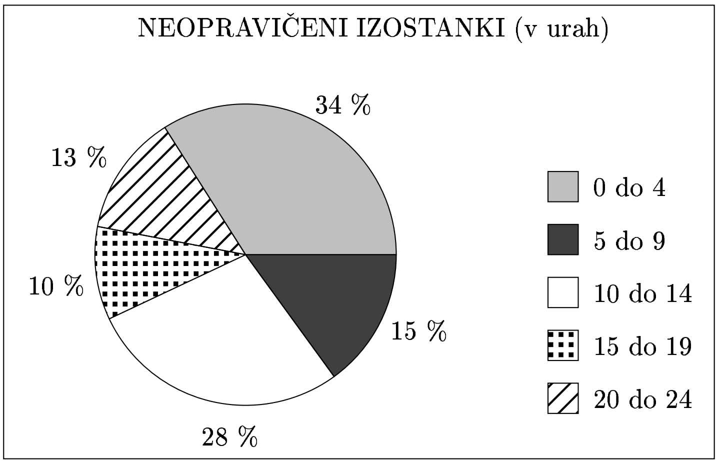
DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

5. Na dveh šolah so neopravičene izostanke prikazali z grafikoni. Na prvi šoli (šoli A) so podatke prikazali z dvema histogramoma:





Na drugi šoli (šoli B), na kateri je 200 dijakov, so podatke prikazali s strukturnim krogom:



a) Za vsako šolo razvrsti podatke v ustrezno preglednico.

Šola A:

Razred	Število dijakov	Neopr. ure
$1a$		
$1b$		
$2a$		
$3a$		
$4a$		
$4b$		

Šola B:

Frekvenčni razred	Odstotek	Število dijakov	Povprečje razreda	Zmnožek
$0 - 4$				
$5 - 9$				
$10 - 14$				
$15 - 19$				
$20 - 24$				

b) Koliko znaša povprečno število neopravičenih ur na dijaka na posamezni šoli? Zapiši odgovor.

3. državno tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol — 12. april 2003

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

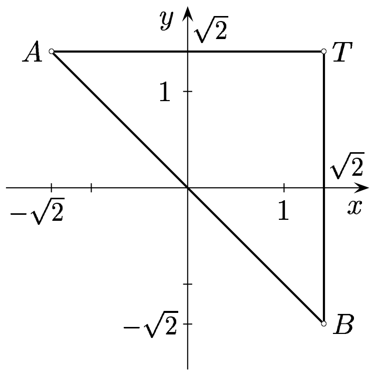
1. Najprej poenostavimo izraz A: $\frac{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}}{\frac{b-a}{ab}} = \frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)ab} = \frac{b+a}{ab}$, nato pa še izraz B: $\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{b-a}{ab}} - \frac{\frac{1}{b}}{\frac{b+a}{ab}}\right) \cdot \frac{b-a}{ab} \cdot \frac{1}{\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}} = \left(\frac{b}{b-a} - \frac{a}{b+a}\right) \cdot \frac{ab(b-a)}{b^2+a^2} = \frac{b^2+ab-ab+a^2}{(b-a)(b+a)} \cdot \frac{ab(b-a)}{b^2+a^2} = \frac{ab}{b+a}$. Vidimo, da res velja $A = B^{-1}$.

Zapis: $A = \frac{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}}{\frac{b-a}{ab}}$ .... 1 točka
Zapis: $A = \frac{b+a}{ab}$ .... 1 točka
Poenostavljanje prvega oklepaja do oblike: $\frac{b}{b-a} - \frac{a}{a+b}$ .... 1 točka
Zapis zveze: $(a^{-2}+b^{-2})^{-1} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ .... 1 točka
Zapis: $B = \frac{ab}{b+a}$ .... 1 točka
Sklep: $A = B^{-1}$ .... 1 točka

2. Denimo, da je razred C zbral x kg papirja. Tedaj je razred B zbral $0.8x$ kg papirja, razred A pa $1.2 \cdot 0.8 \cdot x = 0.96x$ kg papirja. Velja $x + 0.8x + 0.96x = 759$, od koder izračunamo $x = 275$, nato pa še $0.8x = 220$ in $0.96x = 264$. Razred A je zbral 264 kg papirja, razred B 220 kg in razred C 275 kg papirja.

Razred C: x, razred B: $0,8x$ .... 1 točka
Razred A: $1,2 \cdot 0,8x = 0,96x$ .... 1 točka
Zapis enačbe: $x + 0,8x + 1,2 \cdot 0,8x = 759$ .... 1 točka
Rešitev enačbe: $x = 275$ .... 1 točka
Razred C: 275 kg, razred B: 220 kg, razred A: 264 kg .... 1 točka
Odgovor .... 1 točka

3. Da bo točka T enako oddaljena od točk A in B, mora veljati $\sqrt{(a+\sqrt{2}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}-a-\sqrt{2})^2} = \sqrt{(a+\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}-a+\sqrt{2})^2}$, od koder dobimo $a^2+4a\sqrt{2}+8+a^2 = a^2+8-4a\sqrt{2}+a^2$ oziroma $8a\sqrt{2}=0$ in končno $a=0$.



Točke A, B in T so oglišča enakokrakega pravokotnega trikotnika s katetama dolžine $2\sqrt{2}$. Ploščina tega trikotnika je $\dfrac{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{2} = 4$.

(a) Zapis: $d(A,T) = d(B,T)$ .... 1 točka
Zapis $\sqrt{(a+\sqrt{2}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}-a-\sqrt{2})^2} =$
$\sqrt{(a+\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}-a+\sqrt{2})^2}$ .... 1 točka
Poenostavitev enakosti do oblike $8a\sqrt{2}=0$ .... 1 točka
Izračun $a=0$ .... 1 točka

(b) Zapis obrazca za računanje ploščine trikotnika .... 1 točka
Izračunana ploščina trikotnika: 4 .... 1 točka

4. Denimo, da je rubin stal x kovancev, smaragd y kovancev in biser z kovancev. Prvi del naloge pove, da je $8x = 10y = 100z$, od koder lahko izrazimo $x = \frac{25}{2}z$ in $y = 10z$. Besedilo drugega dela naloge prepišemo v enačbo $x+y+z = \frac{100}{2}-3$. Zapišemo torej lahko $\frac{25}{2}z+10z+z = 47$ in izrazimo $z=2$. Biser je stal 2 kovanca, smaragd 20 kovancev, rubin pa 25 kovancev.

Vpeljava neznank: x-rubin, y-smaragd, z-biser .... 1 točka
Nastavitev enakosti $8x = 10y = 100z$ .... 1 točka
Nastavitev enačbe $x+y+z=47$ .... 1 točka
Izraženi dve neznanki z isto neznanko .... 1 točka
Vstavljanje izraženih neznank v enačbo .... 1 točka
Rešitve: $x=25$, $y=20$ in $z=2$ .... 1 točka

5. Če vzamemo pet zaporednih naravnih števil $n-2$, $n-1$, n, $n+1$ in $n+2$, je $n \geq 3$, vsota teh števil pa je $5n$. Število $5n$ je za $n \geq 3$ sestavljeno.

Če vzamemo pet zaporednih naravnih števil n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ in $n+4$, je $n \geq 1$, vsota teh števil pa je $5n+10 = 5(n+2)$. Število $5(n+2)$ je za $n \geq 1$ sestavljeno, saj je $n+2 \geq 3$.

Oznaka petih naravnih števil: $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ .... 1 točka
Zapis vsote $5n+10 = 5(n+2)$ .... 1 + 1 točka
Sklep: $n+2 \geq 3$ za vsako naravno število n .... 2 točki
Sklep: produkt $5(n+2)$ je sestavljeno število .... 1 točka
ALI
Zapis: $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ .... 1 točka
Sklep $n \geq 3$ za vsako naravno število n .... 2 točki
Zapis vsote $n-2+n-1+n+n+1+n+2$ .... 1 točka
Vsota: $5n$ .... 1 točka
Sklep: $5n$ je sestavljeno število .... 1 točka

Drugi letnik

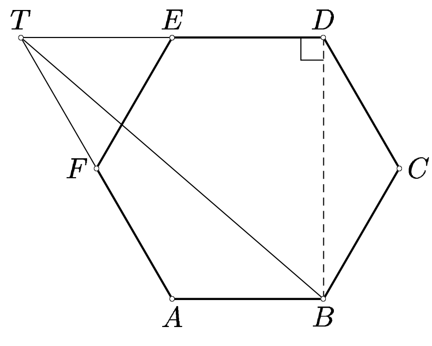
1. Izraz poenostavimo: $\left(x+\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{\frac{x^3-1}{9}+\frac{x-x^2}{3}}}\right)\cdot(x-\sqrt{x-1})=\left(x+\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{\frac{x^3-1+3x-3x^2}{9}}}\right)\cdot$ $(x-\sqrt{x-1})=\left(x+\sqrt[6]{(x-1)^3}\right)\cdot(x-\sqrt{x-1})=(x+\sqrt{x-1})\cdot(x-\sqrt{x-1})=x^2-x+1.$

Razširjanje na skupni imenovalec $\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{\frac{x^3-1+3x-3x^2}{9}}}$ .... 1 točka
Sklep $\sqrt[6]{3^2\cdot\frac{x^3-1+3x-3x^2}{9}}$ .... 1 točka
Zapis $\sqrt[6]{(x-1)^3}$ .... 1 točka
Sklep $\sqrt[6]{(x-1)^3}=\sqrt{x-1}$ .... 1 točka
Množenje oklepajev .... 1 točka
Rezultat x^2-x+1 .... 1 točka

2. Če je $a=0$, sta premici med seboj vzporedni (njuni enačbi sta tedaj $x-2=0$ in $2x+1=0$), zato privzemimo, da $a\neq 0$. Izrazimo $y=\dfrac{(1-a)x-2}{2a}$ iz prve in $y=\dfrac{2x+1}{a}$ iz druge enačbe. Izenačimo dobljeni desni strani $\dfrac{(1-a)x-2}{2a}=\dfrac{2x+1}{a}$ in enačbo preuredimo v $(-a-3)x=4$, od koder izrazimo $x=-\dfrac{4}{a+3}$, če je $a\neq-3$ (prepričamo se lahko, da predstavljata dani enačbi dve vzporedni premici, če upoštevamo $a=-3$). Izrazimo še ordinato presečišča: $y=\dfrac{a-5}{a(a+3)}$. Vsaka točka na simetrali lihih kvadrantov ima absciso enako ordinati, zato mora veljati $-\dfrac{4}{a+3}=\dfrac{a-5}{a(a+3)}$, od tod pa končno dobimo $a=1$.

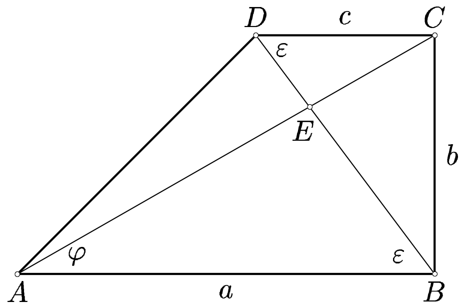
Enačba simetrale $y=x$ .... 1 točka
Pretvorba na sistem dveh enačb z dvema neznankama .... 1 točka
Pravilno reševanje sistama dveh enačb z dvema neznankama .... 3 točke
Rešitev $a=1$ .... 1 točka

3. S skice razberemo, da je $|DT|=2a$, $|BD|$ pa je enaka dolžini dveh višin enakostraničnega trikotnika s stranico a, torej $|BD|=a\sqrt{3}$. Dolžino daljice BT izračunamo po Pitagorovem izreku: $|BT|=\sqrt{|DT|^2+|BD|^2}=\sqrt{4a^2+3a^2}=a\sqrt{7}$.



Skica .... 1 točka
Zapis $d(B,T)^2=d(B,D)^2+d(D,T)^2$ .... 1 točka
Sklep $d(B,D)=2v_a, v_a=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .... 1 točka
Sklep $d(D,T)=2a$ .... 1 točka
Pravilno kvadriranje zveze $|BT|^2=(a\sqrt{3})^2+(2a)^2$ .... 1 točka
Rezultat $d(B,T)=a\sqrt{7}$ .... 1 točka

4. Označimo $\varphi = \angle BAC$ in $\varepsilon = \angle ABD = \angle BDC$. V pravokotnih trikotnikih ABC in BCD dobimo $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{7}$ oziroma $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{4}{3}$, tako da je $\varphi = 29.74°$ in $\varepsilon = 53.13°$ ter $\angle AEB = 97.13°$. Kot med diagonalama je $82.87°$.



Skica z označenim presečiščem diagonal E ter
kotoma $\varphi = \angle BAC$ in $\varepsilon = \angle ABD$ .... 1 točka
Sklep $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{7}$ in $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{4}{3}$ .... 1 točka
Izračun $\varphi = 29,74^0$ .... 1 točka
Izračun $\varepsilon = 53,13^0$ .... 1 točka
Sklep $\angle AEB = 97,13^0$ .... 1 točka
Razultat: Vmesni kot je $82,87^0$ .... 1 točka

5. Dana funkcija je padajoča, če velja $\frac{3-2a}{a+5} < 0$. Njen graf seka ordinatno os nad koordinatnim izhodiščem, če velja $\frac{2a-1}{3-a} > 0$. Prva neenačba je izpolnjena, če imata števec in imenovalec ulomka $\frac{3-2a}{a+5}$ različna predznaka, to je za $a < -5$ ali za $a > \frac{3}{2}$. Druga neenačba je izpolnjena, če imata števec in imenovalec ulomka $\frac{2a-1}{3-a}$ enaka predznaka, to je za $\frac{1}{2} < a < 3$. Obe neenačbi sta izpolnjeni, če je $\frac{3}{2} < a < 3$

Zapis $\frac{3-2a}{a+5} < 0 \quad \wedge \quad \frac{2a-1}{3-a} > 0$ .... $1+1$ točka
Rešitev prve neenačbe $a < -5 \quad \vee \quad a > \frac{3}{2}$ .... 1 točka
Rešitev druge neenačbe $\frac{1}{2} < a < 3$ .... 1 točka
Rešitev $\frac{3}{2} < a < 3$ .... 2 točki

Tretji letnik

1. Denimo, da je poslovodja nabavil x puloverjev po nabavni ceni c. Tedaj velja $x \cdot c = 960000$ in $x \cdot 12000 = 960000 + 60c$. Iz druge enačbe izrazimo $c = 200x - 16000$ in vstavimo v prvo, ki jo preuredimo v kvadratno enačbo $200x^2 - 16000x - 960000 = 0$, poenostavimo v $x^2 - 80x - 4800 = 0$ in razstavimo $(x-120)(x+40) = 0$. Edina smiselna rešitev enačbe je $x = 120$. Poslovodja je nabavil 120 puloverjev.

Izbira neznank: x – št. puloverjev, c – nabavna cena,
d – dobiček pri prodaji enega puloverja .... 1 točka
Enačbe: $960000 = xc, \quad 12000 = c + d, \quad dx = 60c$ .... 1 točka
Pravilno reševanje sistema enačb .... 2 točki
Rešitve $x = 120, \quad c = 8000, \quad d = 4000$ .... 1 točka
Odgovor: Poslovodja je nabavil 120 puloverjev .... 1 točka

2. Najprej iz $\log_3(x-y) = 0$ sklepamo, da je $x - y = 3^0 = 1$ oziroma $x = y + 1$. Nato drugo enačbo zapišemo $3^{y+1} \cdot 2^y = 648$ oziroma v obliki $3 \cdot 3^y \cdot 2^y = 648$ in poenostavimo v

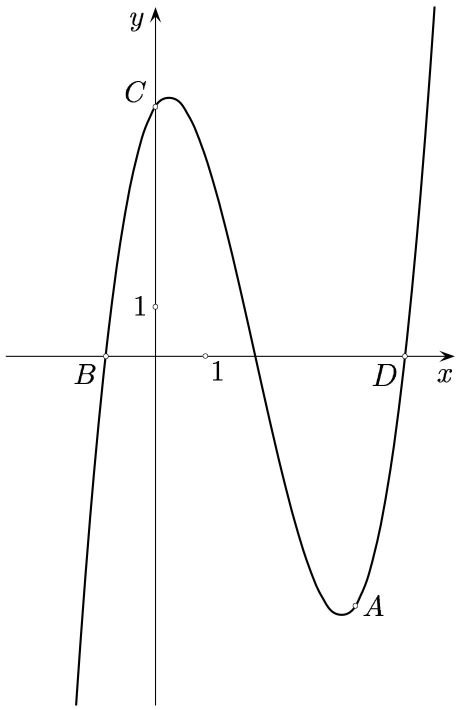
$6^y = 216 = 6^3$, od koder preberemo $y = 3$ ter izračunamo še $x = 4$.

Poenostavitev logaritemske enačbe $3^0 = x - y \Rightarrow x = y + 1$ .... $1 + 1$ točka
Vstavljanje v drugo enačbo $3^{y+1} \cdot 2^y = 648$ .... 1 točka
Sklep: $3^y \cdot 2^y = 216$ .... 1 točka
Rešitvi: $y = 3 \Rightarrow x = 4$ .... $1 + 1$ točka

3. Enačbo lahko poenostavimo v $\frac{3}{2} \log_x 5 - \frac{5}{4} = (\frac{1}{2} \log_x 5)^2$. Če označimo $\log_x 5 = t$ in enačbo poenostavimo, dobimo $t^2 - 6t + 5 = 0$, ki ima rešitvi $t_1 = 1$ in $t_2 = 5$. Iz $\log_x 5 = 1$ dobimo $x_1 = 5$, iz $\log_x 5 = 5$ pa $x^5 = 5$ oziroma $x_2 = \sqrt[5]{5}$.

Poenostavitev $\frac{3}{2} \log_x 5 - \frac{5}{4} = (\frac{1}{2} \log_x 5)^2$ .... 1 točka
Uvedba nove neznanke $\log_x 5 = t$ .... 1 točka
Enačba $t^2 - 6t + 5 = 0$ .... 1 točka
Rešitvi kvadratne enačbe: $t_1 = 1,\ t_2 = 5$ .... 1 točka
Rešitvi: $x_1 = \sqrt[5]{5}$ in $x_2 = 5$ .... $1 + 1$ točka

4. Točki B in D sta ničli polinoma, zato lahko zapišemo $y = a(x+1)(x-5)(x-x_3)$. Polinom seka ordinatno os v točki $C(0,5)$, torej je $5 = a \cdot 1 \cdot (-5) \cdot (-x_3)$ oziroma $5ax_3 = 5$, od koder dobimo $x_3 = \frac{1}{a}$, saj je $a \neq 0$. Končno upoštevamo, da gre polinom skozi točko A, pa imamo $-5 = a \cdot 5 \cdot (-1) \cdot (4 - \frac{1}{a})$ oziroma $a \cdot (4 - \frac{1}{a}) = 1$, od koder izrazimo $a = \frac{1}{2}$. Polinom ima enačbo $y = \frac{1}{2}(x+1)(x-5)(x-2)$.



Zapis: $y = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$
ali $y = a(x+1)(x-5)(x-x_3)$ .... 1 točka
Točka C – zapisana enačba $a \cdot x_3 = 1$ .... 1 točka
Točka A – zapisana enačba $1 = 4a - ax_3$ .... 1 točka
Rešitvi $a = \frac{1}{2}, x = 2$ .... 1 točka
Zapis polinoma: $y = \frac{1}{2}(x+1)(x-5)(x-2)$ .... 1 točka
Skiciran graf .... 1 točka

5. Enačbo preoblikujemo v $y^2 - x^2 = 73$ oziroma v $(y+x)(y-x) = 73$. Število 73 je praštevilo, zato ga lahko razcepimo le na štiri načine: $73 \cdot 1$, $1 \cdot 73$, $-73 \cdot (-1)$ in $-1 \cdot (-73)$. Tako pridemo do štirih sistemov enačb, ki jih rešimo:

$$\begin{array}{r} y + x = 73 \\ \underline{y - x = 1} \\ y = 37 \\ x = 36 \end{array} \qquad \begin{array}{r} y + x = -73 \\ \underline{y - x = -1} \\ y = 37 \\ x = -36 \end{array} \qquad \begin{array}{r} y + x = 1 \\ \underline{y - x = 73} \\ y = -37 \\ x = -36 \end{array} \qquad \begin{array}{r} y + x = -1 \\ \underline{y - x = -73} \\ y = -37 \\ x = 36 \end{array}$$

Preoblikovanje enačbe $(y+x)(y-x)=73$ .... 1 točka
Ugotovitev: število 73 je praštevilo .... 1 točka
Sklepanje: x in y morata zadoščati enemu od štirih sistemov: .... 1 točka

$$\begin{array}{llll} y+x=73 & y+x=-73 & y+x=1 & y+x=-1 \\ y-x=1 & y-x=-1 & y-x=73 & y-x=-73 \end{array}$$

Rešitve sistemov $(36,37),(-36,-37),(-36,37)$ in $(36,-37)$ .... 3 točke

OPOMBA: zapisani samo trije pari .... 2 točki
zapisan en ali dva para .... 1 točka

Četrti letnik

1. Ker se $f(-x)=\cos(-x)-\sin(-x)=\cos x+\sin x$ razlikuje od $f(x)$ in od $-f(-x)$, funkcija $f(x)$ ni niti soda niti liha.
   Pišimo: $-\sqrt{2}\,\sin(x-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4})=\cos x-\sin x=f(x)$. Ker je zaloga vrednosti funkcije $g(x)=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ enaka $[-1,1]$, je zaloga vrednosti funkcije $f(x)$ enaka $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

   (a) Dokaz in pravilen sklep .... 2 točki

   (b) Uporaba adicijskega izreka, pravilen izračun in zapis funkcije .... $1+1+1$ točka
   Zapis zaloge vrednosti $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$) .... 1 točka

2. Vzemimo zaporedni naravni števili n in $n+1$. Razlika njunih kvadratov je enaka $(n+1)^2-n^2=2n+1$. Če n povečamo za 1 (vzamemo naslednji zaporedni naravni števili), dobimo $((n+1)+1)^2-(n+1)^2=2(n+1)+1=2n+3$ – razlika kvadratov dveh zaporednih naravnih števil se torej poveča za 2. Ker to velja za katerakoli dva zaporedna para po dveh zaporednih naravnih števil, tvorijo dobljena števila aritmetično zaporedje.

   Zapis zaporednih naravnih števil $n,n+1,n+2,n+3$ .... 1 točka
   Zapis razlike kvadratov .... 1 točka
   Poenostavitev prve razlike:
   $(n+1)^2-n^2=(n+1+n)(n+1-n)=2n+1$ .... 1 točka
   Poenostavitev naslednjih dveh razlik:
   $(n+2)^2-(n+1)^2=(n+2+n+1)(n+2-n-1)=2n+3$
   $(n+3)^2-(n+2)^2=(n+3+n+2)(n+3-n-2)=2n+5$ .... 1 točka
   Zapis zaporedja: $2n+1,2n+3,2n+5,$ .... 1 točka
   Sklep:Aritmetično zaporedje z $d=2$ .... 1 točka

3. Torto je pojedlo 30 ljudi. Ker je vsak v povprečju pojedel 24 dag, je trinadstropna torta tehtala $30\cdot 24=720$ dag. Njena prostornina je bila $\frac{77\pi\cdot 720}{10}=5544\pi$ cm^3.
   Če je višina posamezne torte enaka v, razmik med posamezno torto in podstavkom nad njo pa x, velja $v+x=11$ in $3v+2x=30$. Iz teh dveh enačb izračunamo $v=8$ cm.
   Polmere posameznih tort označimo z r, $r-3$ in $r-6$. Tedaj je $\pi r^2\cdot v+\pi(r-3)^2\cdot v+\pi(r-6)^2\cdot$

$v = 5544\pi$. Enačbo lahko poenostavimo (upoštevamo, da je $v = 8$ cm) v $3r^2 - 18r + 45 = 693$ oziroma $r^2 - 6r - 216 = 0$ in razstavimo $(r-18)(r+12) = 0$. Edina smiselna rešitev enačbe je $r = 18$. Polmer spodnje (največje torte) je bil 18 cm.

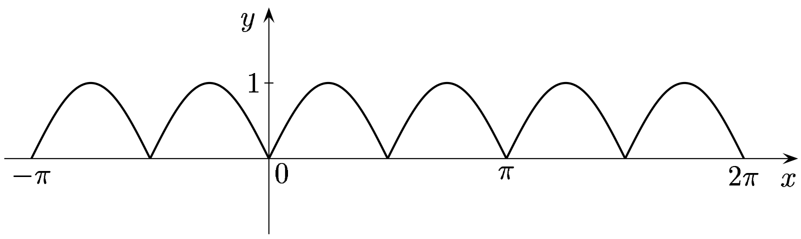
Masa torte: $T = n \cdot 24$ dag$= 30 \cdot 24 = 720$dag .... 1 točka
Prostornina torte:

$$10dag..........77\pi cm^3$$

$$720dag..........xcm^3$$

$x = 77\pi \cdot \frac{720}{10} = 5544\pi cm^3$ .... 1 točka
Višina posamezne oblate: $v = \frac{30-2\cdot3}{3} = 8$ cm .... 1 točka
Prostornina spodnje oblate: $V_1 = \pi r^2 v$
Prostornina druge oblate: $V_2 = \pi(r-3)^2 v$
Prostornina tretje oblate: $V_3 = \pi(r-6)^2 v$ .... 1 točka
Skupaj:
$V = V_1 + V_2 + V_3$
$V = \pi v(r^2 + (r-3)^2 + (r-6)^2)$
$V = \pi \cdot 8 \cdot (3r^2 - 18r + 45)$
$V = \pi \cdot 8 \cdot 3 \cdot (r^2 - 6r + 15)$
$5544\pi = \pi \cdot 24(r^2 - 6r + 15)$ .... 1 točka
$231 = r^2 - 6r + 15$
$r^2 - 6r - 216 = 0$
Rešitev $(r-18)(r+12) = 0 \Rightarrow r = 18$ cm .... 1 točka

4. Najprej zapišemo $f(x) = \sqrt{1-\cos^2 2x} = \sqrt{\sin^2 2x} = |\sin 2x|$. Ničle funkcije so $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.



Upoštevamo: $f(x) = \sqrt{1-\cos^2 2x} = \sqrt{\sin^2 2x}$ .... 1 točka
Sklep $f(x) = |\sin 2x|$ .... 1 točka
Ničle $x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z$ .... 1 točka
Narisane ničle na grafu .... 1 točka
Graf $g(x) = \sin 2x$ .... 1 točka
Graf $f(x) = |g(x)|$ .... 1 točka

5. Najprej izpolnimo preglednici.

Šola A:

Razred	Število dijakov	Neopr. ure
1a	30	105
1b	28	80
2a	26	100
3a	27	85
4a	26	130
4b	23	110
	160	610

Šola B:

Frekvenčni razred	Odstotek	Število dijakov	Povprečje razreda	Zmnožek
$0-4$	34	68	2	136
$5-9$	15	30	7	210
$10-14$	28	56	12	672
$15-19$	10	20	17	340
$20-24$	13	26	22	572
		200		1930

Povprečno število neopravičenih ur na dijaka na šoli A je $\overline{x} = \frac{105+80+100+85+130+110}{30+28+26+27+26+23} = \frac{610}{160} = 3.81$, na šoli B pa $\overline{y} = \frac{68\cdot2+30\cdot7+56\cdot12+20\cdot17+26\cdot22}{200} = \frac{1930}{200} = 9.65$.

Zapis tabele za šolo A: .... 1 točka
Povprečje za šolo A: $\overline{x} = \frac{105+80+100+85+130+110}{30+28+26+27+26+23} = \frac{610}{160} = 3,81$ .... 1 točka
Izračunano število dijakov za šolo B .... 1 točka
Povprečje za šolo B:
račun $68\cdot2+30\cdot7+56\cdot12+20\cdot17+26\cdot22 = 1930$ .... 1 točka
$\overline{y} = \frac{1930}{200}$=9,65.. 1 točka
Odgovor:
Na šoli A je povprečno število neopravičenih ur na dijaka 3,81,
na šoli B pa 9,65... 1 točka