**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

4. državno tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Maribor, 17. april 2004

NALOGE ZA 1. LETNIK

1. Poenostavi:
$$\frac{a^3-1}{1+\cfrac{1}{a-\cfrac{a}{a+1}}}.$$

2. V trgovini *Moda* je stal moški suknjič po 30 % pocenitvi 24500 SIT. Pred koncem razprodaje so ga pocenili še za 20 %. Koliko tolarjev znaša razlika med začetno ceno in ceno po drugi pocenitvi?
V trgovini *Obleka* je imel tak suknjič enako začetno ceno kot v trgovini *Moda*. Pocenili so ga le enkrat in takoj prodajali po ceni, ki je veljala v trgovini *Moda* šele po drugi pocenitvi. Za koliko odstotkov so suknjič pocenili v trgovini *Obleka*?
Zapiši odgovora.

3. Reši sistem enačb:
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(y+\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{5}(x+2) &= 1{,}1 \\ x-2y+4 &= \frac{1}{4}\left(2x+3\left(y-\frac{1}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

4. Dan je pravokotnik $ABCD$ z oglišči $A(-2,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,3)$, $D(-2,3)$. Izračunaj koordinati središča S in polmer R pravokotniku očrtane krožnice. Nariši sliko.

5. Poišči največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik naslednjih izrazov:
$$4^x-9^x,\quad 4^x+2\cdot 6^x+9^x,\quad 4^x+3\cdot 6^x+2\cdot 9^x,\quad 8^x+27^x\,.$$

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

4. državno tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Maribor, 17. april 2004

NALOGE ZA 2. LETNIK

1. Določi parameter b tako, da bo linearna funkcija $3x + (b-2)y + 6 = 0$ naraščajoča.

2. Dani sta funkciji $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ in $g(x) = -2x + 6$.
   a) V kateri interval preslika funkcija f interval $[-2, 6]$?
   b) Na katerem intervalu zavzame funkcija f vrednosti od vključno -5 do vključno 0?
   c) Za katere x sta vrednosti $f(x)$ in $g(x)$ obe pozitivni?

3. Izračunaj vsoto kvadratov višin v trikotniku s podatki: $c = 6$ cm, $v_c = 4$ cm, $a = 5$ cm. Nariši sliko.

4. Če zmnožek treh zaporednih naravnih števil $n-1$, n in $n+1$ povečamo za srednje število, dobimo število med 3000 in 4000. Določi ta števila.

5. Poenostavi izraz
$$\frac{x^{0,5}+1}{x+x^{0,5}+1} : \frac{1}{x^{1,5}-1}\,.$$

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

4. državno tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Maribor, 17. april 2004

NALOGE ZA 3. LETNIK

1. Določi a tako, da bosta korena enačbe $ax^2 + x^2 + 9ax - x - 9a = 0$ obratni števili.

2. Del procesa priprave polizdelkov je ohlajanje posebne zmesi surovin. Zmes izdelajo pri temperaturi $180°C$ in jo takoj nato ohlajajo v prostoru, kjer je stalna temperatura $20°C$. Ugotovili so, da lahko s formulo $T = a \cdot b^t + c$ izračunajo trenutno temperaturo T zmesi po t urah od začetka hlajenja v prostoru s stalno temperaturo c.

   a) Določi konstanti a in b, če veš, da ima zmes na začetku ($t = 0$) temperaturo $180°C$ in da ima po 1 uri hlajenja temperaturo $160°C$.
   b) Koliko časa po izdelavi se zmes ohladi na $150°C$? Izračunaj do minute natančno. Zapiši odgovor.

3. V trikotniku je $\beta = 74°18'$ in $\gamma = 38°46'$ ter $|AC| - |AB| = 2{,}5$ cm. Izračunaj dolžini stranic $|AB|$ in $|AC|$ ter rezultat zaokroži na dve mesti natančno. Nariši skico.

4. Osnovna ploskev pokončne prizme je deltoid, ki ima krajšo diagonalo dolgo e. Notranja kota deltoida z vrhoma v krajiščih daljše diagonale merita $90°$ in $60°$. Višina prizme je enaka daljši diagonali deltoida. Izrazi prostornino prizme z e. Rezultat naj bo točen.

5. Reši enačbo:
$$\log\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \log\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{3}{4} \cdot (\log 4)^2.$$

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

4. državno tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Maribor, 17. april 2004

NALOGE ZA 4. LETNIK

1. V razredu je 25 dijakov. Rok je računal, koliko točk je v povprečju dosegel posamezen dijak pri šolski nalogi. Najprej je izračunal povprečje 74,5 točk, a se je spomnil, da je pozabil upoštevati svoj dosežek. Ko ga je upošteval, je izračunal povprečje 75 točk. Koliko točk je dosegel Rok pri šolski nalogi? Zapiši odgovor.

2. Dana sta polinom $p(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2$ in premica $y = bx + 20$. Grafa obeh funkcij se sekata v točkah z abscisama $x = 5$ in $x = -2$. Določi koeficienta a in b in zapiši obe funkciji.

3. Janez in Peter, ki sta drug od drugega oddaljena 450 m, istočasno kreneta drug proti drugemu. Janez si je zakril oči in se premika počasi – v prvi minuti prehodi 5 m, v vsaki naslednji minuti pa 15 m več kot v prejšnji. Peter prehodi v prvi minuti 100 m, v vsaki naslednji minuti pa 10 m manj kot v predhodni. Čez koliko časa se bosta srečala? Zapiši odgovor.

4. Za racionalno funkcijo $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+1}$ velja: $f(1) = \dfrac{3}{4}$, $f(2) = 1$ in $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$. Določi realne parametre a, b in c ter zapiši funkcijo $f(x)$. Zapis funkcije poenostavi.

5. Pokaži, da velja
$$\frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin^2(\pi + x)}{\cos 6\pi + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = -\cos x\,,$$
kjer je $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

4. državno tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

17. april 2004

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

1. Izraz poenostavimo:

$$\frac{a^3-1}{1+\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{a+1}}}=\frac{a^3-1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{a^2}{a+1}}}=\frac{a^3-1}{\dfrac{a^2+a+1}{a^2}}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)a^2}{a^2+a+1}=a^2(a-1)\,.$$

Poenostavljeno do oblike: $\dfrac{a^3-1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{a^2}{a+1}}}$ .... 1 točka

Poenostavljeno do oblike: $\dfrac{a^3-1}{\dfrac{a^2+a+1}{a^2}}$ .... 1 točka

Odprava dvojnih ulomkov: $\dfrac{(a^3-1)a^2}{a^2+a+1}$ .... 1 točka

Razstavljanje števca: $\dfrac{(a-1)(a^2+a+1)a^2}{(a^2+a+1)}$ .... 1 točka

Krajšanje .... 1 točka

Rezultat: $a^2(a-1)$ .... 1 točka

2. Če označimo začetno ceno suknjiča z x, velja $0{,}7x=24500$, od koder izračunamo $x=35000$. Po drugi pocenitvi je suknjič stal $0{,}8\cdot 24500=19600$ SIT. Razlika med začetno ceno in ceno po drugi pocenitvi je $35000-19600=15400$ SIT.
V trgovini *Obleka* so pocenili suknjič, ki je stal 35000 SIT, za 15400 SIT, to je za $\frac{15400}{35000}=44\ \%$.

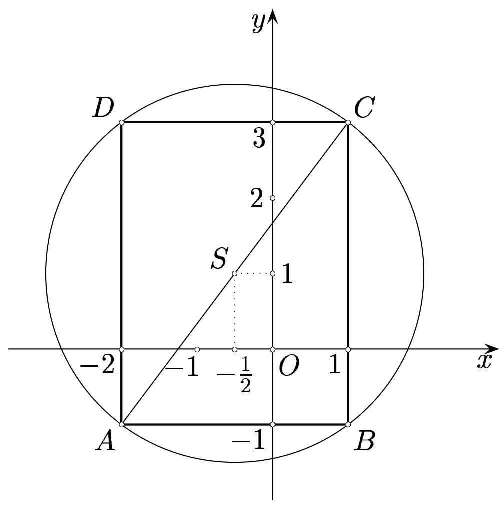
Nastavljena enačba: $0{,}7x=24500$ SIT .... 1 točka
Izračun: $x=35000$ SIT .... 1 točka

Izračunana cena po ponovni pocenitvi: $24500 \cdot 0{,}8 = 19600$ SIT .... 1 točka
Razlika med začetno in končno ceno: $35000 - 19600 = 15400$ SIT .... 1 točka
Izračunan odstotek pocenitve v trgovini *Obleka*: $p = \frac{15400}{35000} = 44\%$ .... 1 točka
Odgovora .... 1 točka

3. Najprej poenostavimo obe enačbi. Prvo preoblikujemo v $10y + 5x - 4x - 8 = 22$ oziroma $10y + x = 30$, drugo pa v $8x - 16y + 32 = 4x + 6y - 3$ oziroma $4x - 22y = -35$. Sistem rešimo po eni izmed metod. Če uporabimo zamenjalni način, iz prve izrazimo $x = 30 - 10y$ in vstavimo v drugo enačbo: $4(30 - 10y) - 22y = -35$. Odtod izrazimo $y = \frac{5}{2}$. Nato izračunamo $x = 5$.

Poenostavitev prve enačbe: $10y + x = 30$ .... 1 točka
Poenostavitev druge enačbe: $4x - 22y = -35$ .... 1 točka
Pravilno reševanje sistema .... 2 točki
Rešitev sistema: $x = 5$, $y = \frac{5}{2}$ .... 1 + 1 točka

4. Središče S pravokotniku očrtane krožnice je hkrati razpolovišče diagonale AC, zato je $S(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2})$ oziroma $S(-\frac{1}{2}, 1)$. S skice je razvidno, da je polmer R enak polovici dolžine diagonale AC. Ker je $|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$, je $R = \frac{5}{2}$.



Skica .... 1 točka
Izračunani koordinati središča: $S(-\frac{1}{2}, 1)$ .... 1 točka
Sklep $R = \frac{1}{2} \cdot d(A, C)$ oziroma $R = \frac{1}{2} \cdot |AC|$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba obrazca za razdaljo med točkama .... 1 točka
Pravilno vstavljeni podatki v obrazec .... 1 točka
Rešitev: $R = \frac{5}{2}$ .... 1 točka

5. Najprej razcepimo posamezne izraze: $4^x - 9^x = (2^x + 3^x)(2^x - 3^x)$, $4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x = (2^x + 3^x)^2$, $4^x + 3 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = (2^x + 3^x)(2^x + 2 \cdot 3^x)$ in $8^x + 27^x = (2^x + 3^x)(4^x - 6^x + 9^x)$. Vidimo, da je največji skupni delitelj $2^x + 3^x$, najmanjši skupni večkratnik pa $(2^x + 3^x)^2(2^x - 3^x)(2^x + 2 \cdot 3^x)(4^x - 6^x + 9^x)$.

Razcep: $4^x - 9^x = (2^x + 3^x)(2^x - 3^x)$ .... 1 točka
Razcep: $4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x = (2^x + 3^x)^2$ .... 1 točka
Razcep: $4^x + 3 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = (2^x + 3^x)(2^x + 2 \cdot 3^x)$ .... 1 točki

Razcep: $8^x + 27^x = (2^x + 3^x)(4^x - 6^x + 9^x)$ .... 1 točka
Pravilen zapis D in v .... $1 + 1$ točka

Drugi letnik

1. Parameter b ne sme biti enak 2, sicer zapis $3x + (b-2)y + 6 = 0$ ne predstavlja funkcije. Za $b \neq 2$ lahko enačbo premice zapišemo v eksplicitni obliki: $y = \dfrac{-3}{b-2}x - \dfrac{6}{b-2}$. Linearna funkcija je naraščajoča, če je smerni koeficient pozitiven: $\dfrac{-3}{b-2} > 0$. Števec ulomka $\dfrac{-3}{b-2}$ je negativen, zato bo vrednost ulomka pozitivna, če bo imenovalec negativen, torej $b - 2 < 0$. Od tod dobimo rešitev $b < 2$.

   Zapis enačbe premice v eksplicitni obliki $y = \dfrac{-3}{b-2}x - \dfrac{6}{b-2}$ .... 1 točka
   Zapis ali uporaba pogoja $k > 0$ .... 1 točka
   Zapis $\dfrac{-3}{b-2} > 0$ .... 1 točka
   Pravilno reševanje neenačbe .... 1 točka
   Zapis $b - 2 < 0$ .... 1 točka
   Rešitev $b < 2$ .... 1 točka

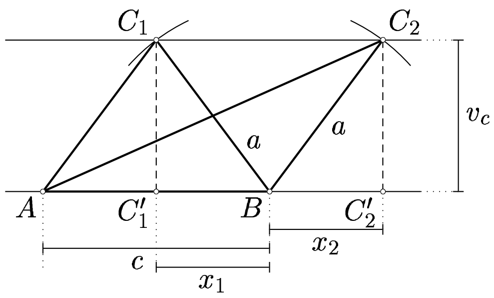
2. Funkcija f je linearna naraščajoča. Izračunamo vrednost funkcije pri -2 in pri 6, ki sta krajišči danega intervala. Dobljeni vrednosti $f(-2) = 0$ in $f(6) = 4$ sta krajišči intervala $[0, 4]$, v katerega se preslika dani interval.
   Da bi ugotovili, na katerem intervalu zavzame funkcija f vrednosti od -5 do 0, rešimo enačbi $\dfrac{1}{2}x + 1 = -5$ in $\dfrac{1}{2}x + 1 = 0$. Rešitev prve je $x = -12$, rešitev druge pa $x = -2$. Iskani interval je $[-12, -2]$.
   Vrednost $f(x)$ je pozitivna, če velja $\dfrac{1}{2}x + 1 > 0$ oziroma $x > -2$, vrednost $g(x)$ pa je pozitivna, če velja $-2x + 6 > 0$ oziroma $x < 3$. Obe sta pozitivni za $x \in (-2, 3)$.

a) Izračunani vrednosti $f(-2) = 0$ in $f(6) = 4$ .... 1 točka
   Zapis intervala $[0, 4]$ .... 1 točka

b) Zapis dveh enačb: $\dfrac{1}{2}x + 1 = -5$ in $\dfrac{1}{2}x + 1 = 0$ .... 1 točka
   Zapis rešitve (intervala): $[-12, -2]$ .... 1 točka

c) Zapis dveh neenačb: $\frac{1}{2}x + 1 > 0$ in $-2x + 6 > 0$ .... 1 točka
   Zapis rešitve (intervala): $(-2, 3)$ .... 1 točka

3. Ko narišemo sliko, opazimo, da imamo dva trikotnika z danimi podatki: $\triangle ABC_1$ in $\triangle ABC_2$. Oglejmo si najprej $\triangle ABC_1$. Iz $S = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{a \cdot v_a}{2}$ sledi $v_a = \frac{c \cdot v_c}{a} = 4{,}8$ cm. Naj bo x_1 dolžina pravokotne projekcije stranice a na stranico c. Izračunamo jo po Pitagorovem izreku: $x_1 = 3$ cm. Ker je stranica c dolga 6 cm, je tudi $c - x_1 = 3$ cm. Trikotnik ABC_1 je enakokrak in zato je $v_b = v_a = 4{,}8$ cm. Vsota kvadratov višin je $v_a^2 + v_b^2 + v_c^2 = 62{,}08\ \mathrm{cm}^2$.



Oglejmo si še $\triangle ABC_2$. Ker so dolžini stranic c in a ter višina v_c enake kot v trikotniku $\triangle ABC_1$, je tudi $v_a = 4{,}8$ cm. Naj bo x_2 dolžina pravokotne projekcije stranice a na podaljšek stranice c. Izračunamo jo po Pitagorovem izreku: $x_2 = 3$ cm. Dolžino stranice b prav tako izračunamo po Pitagorovem izreku: $b = \sqrt{(c + x_2)^2 + v_c^2} = \sqrt{81 + 16} = \sqrt{97}$. Nato iz $S = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2}$ izračunamo $v_b = \frac{c \cdot v_c}{b} = \frac{24}{\sqrt{97}}$ cm. Končno imamo $v_a^2 + v_b^2 + v_c^2 = 44{,}98\ \mathrm{cm}^2$.

Skica z označenimi podatki .... 1 točka
Izračunana $v_a = \frac{2S}{a} = 4{,}8$ cm .... 1 točka
Izračun x_1 (del stranice c) $x_1 = 3$ cm in sklep $v_b = v_a = 4{,}8$ cm .... 1 točka
Rezultat: $v_a^2 + v_b^2 + v_c^2 = 62{,}08\ \mathrm{cm}^2$ .... 1 točka
Izračun dolžine b in v_b za drugi trikotnik .... 1 točka
Rezultat: $v_a^2 + v_b^2 + v_c^2 = 44{,}98\ \mathrm{cm}^2$ .... 1 točka

4. Najprej ugotovimo, da je $(n-1)n(n+1) + n = n^3$. Zapišemo neenačbo $3000 < n^3 < 4000$. Sklepamo, da je $\sqrt[3]{3000} < n$ oziroma $14{,}42 < n$ in da je $n^3 < 4000$ oziroma $n < 15{,}87$. Tako je $n = 15$. Iskana zaporedna naravna števila so 14, 15 in 16.

Zapis $(n-1)n(n+1) + n$ .... 1 točka
Ureditev zgornjega izraza do $= n^3$ .... 1 točka
Zapis neenačbe $3000 < n^3 < 4000$ .... 1 točka
Sklepanje: $14{,}42 < n < 15{,}87$ .... 1 točka
Rešitev $n = 15$ .... 1 točka
Odgovor: *Iskana števila so* 14, 15, 16. .... 1 točka

5. Potence z racionalnimi eksponenti zapišemo s koreni. Tako je $\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} : \frac{1}{\sqrt{x^3}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x^3}-1}{1}$. Ulomka množimo in dobimo $\frac{\sqrt{x^4}+\sqrt{x^3}-\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1}$. Števec poenostavimo $\frac{x^2+x\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1}$, nato pa preoblikujemo v $\frac{(x-1)(x+1)+\sqrt{x}(x-1)}{x+\sqrt{x}+1}$ in izpostavimo skupni faktor v števcu: $\frac{(x-1)(x+1+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}+1}$. Po krajšanju dobimo $x - 1$.

Zapis izraza s koreni $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} : \dfrac{1}{\sqrt{x^3}-1}$ .... 1 točka
Pravilno množenje števca $\sqrt{x^4}+\sqrt{x^3}-\sqrt{x}-1$ .... 1 točka
Poenostavitev števca: $x^2+x\sqrt{x}-\sqrt{x}-1$ .... 1 točka
Izpostavljanje skupnega faktorja v števcu: $(x-1)(x+1)+\sqrt{x}(x-1)$ .... 1 točka
Izpostavljanje $\dfrac{(x-1)(x+1+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}+1}$ .... 1 točka
Rezultat $x-1$ .... 1 točka

Tretji letnik

1. Enačbo uredimo do oblike $x^2(a+1)+x(9a-1)-9a=0$. Korena enačbe x_1 in x_2 sta obratni števili, če velja $x_1=\frac{1}{x_2}$ ali $x_1\cdot x_2=1$. Upoštevamo obrazec $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, pa imamo $\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=1$. Enačbo uredimo do oblike $b^2-D=4a^2$ in uporabimo zvezo $D=b^2-4ac$. Dobimo $a=c$, torej mora biti vodilni koeficient enak stalnemu členu. To za dano enačbo pomeni $a+1=-9a$, kar prinese rešitev $a=-\dfrac{1}{10}$.

   Ureditev enačbe: $x^2(a+1)+x(9a-1)-9a=0$ .... 1 točka
   Upoštevanje obrazca: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ .... 1 točka
   Nastavljena enačba iz $x_1=\dfrac{1}{x_2}\Rightarrow\dfrac{2a}{-b-\sqrt{D}}=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ .... 1 točka
   Ureditev enačbe in uporabljena zveza $D=b^2-4ac$ v $4a^2=b^2-D$ .... 1 točka
   Sklep: $a=c$ .... 1 točka
   Rešitev $a=-\dfrac{1}{10}$ .... 1 točka

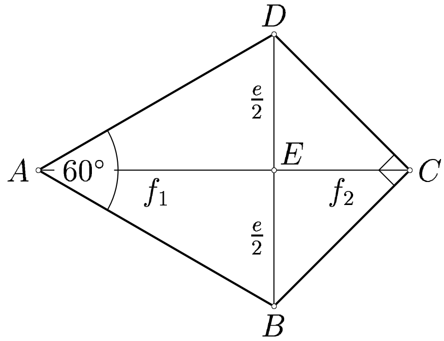
2. Ker ima zmes na začetku temperaturo 180°, velja $180=a\cdot b^0+20$, od koder izračunamo $a=160$. Po 1 uri hlajenja ima zmes temperaturo 160°, zato velja $160=a\cdot b+20$, od tod pa dobimo $b=\frac{7}{8}$, če upoštevamo, da je $a=160$. Velja torej formula $T=160\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^t+20$. Iz enačbe $150=160\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^t+20$ sledi $\frac{13}{16}=\left(\frac{7}{8}\right)^t$, odtod pa dobimo $t=\dfrac{\log\frac{13}{16}}{\log\frac{7}{8}}=1{,}555$, kar je 1 ura in 33 minut.

   Pravilno vstavljanje podatkov v formulo pri $t=0$ in $t=1$ .... 1 točka
   Izračunan $a=160$ .... 1 točka
   Izračunan $b=\dfrac{7}{8}$ .... 1 točka
   Zapis enačbe za $T=150$, $150=160\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^t+20$ .... 1 točka
   Izražen $t=\dfrac{\log\frac{13}{16}}{\log\frac{7}{8}}$ .... 1 točka
   Odgovor: *Zmes se ohladi na* $150°C$ 1 *uro in* 33 *minut po izdelavi.* .... 1 točka

3. Zvezo $c=b-2{,}5$ vstavimo v obrazec za sinusni izrek. Izrazimo $b=-\dfrac{2{,}5\sin\beta}{\sin\gamma-\sin\beta}$ in izračunamo $b=7{,}1$ cm ter $c=4{,}6$ cm.

Skica .... 1 točka
Zapis ali uporaba sinusnega izreka .... 1 točka
Zveza $c = b - 2{,}5$ vstavljena v sinusni izrek .... 1 točka
Izražen $b = -\dfrac{2,5\sin\beta}{\sin\gamma - \sin\beta}$ .... 1 točka
Pravilen izračun $b = 7{,}1$ cm .... 1 točka
Izračunan $c = 4{,}6$ cm .... 1 točka

4. Prostornina prizme je $V = \dfrac{e\cdot f}{2}\cdot f$. Daljša diagonala je razdeljena na dela f_1 in f_2. Oba dela izrazimo z dolžino e krajše diagonale. Pravokotni trikotnik DBC je enakokrak, zato je $f_2 = \frac{e}{2}$. Trikotnik BDA je enakostraničen, zato je $f_1 = \dfrac{e\sqrt{3}}{2}$, saj je to višina enakostraničnega trikotnika. Torej je dolžina diagonale f enaka $\dfrac{e\sqrt{3}}{2} + \dfrac{e}{2} = \dfrac{e}{2}(\sqrt{3}+1)$. Prostornina prizme je $\dfrac{e\cdot\frac{e}{2}(\sqrt{3}+1)}{2}\cdot\dfrac{e}{2}(\sqrt{3}+1) = \dfrac{e^3(2+\sqrt{3})}{4}$.



Izražena prostornina $V = \dfrac{e\cdot f}{2}\cdot f$ .... 1 točka
Izražena $f_1 = \dfrac{e\sqrt{3}}{2}$ .... 1 točka
$f_2 = \dfrac{e}{2}$ .... 1 točka
Izražen $f = \dfrac{e\sqrt{3}}{2} + \dfrac{e}{2} = \dfrac{e}{2}(\sqrt{3}+1)$ .... 1 točka
Izračun $V = \dfrac{e\cdot\frac{e}{2}(\sqrt{3}+1)}{2}\cdot\dfrac{e}{2}(\sqrt{3}+1) = \dfrac{e^3(3+2\sqrt{3}+1)}{8}$ .... 1 točka
Rezultat $V = \dfrac{e^3(2+\sqrt{3})}{4}$ .... 1 točka

5. Najprej uporabimo pravilo za logaritmiranje količnika: $(\log 1 - \log x)\cdot(\log 4 - \log x) = \frac{3}{4}(\log 4)^2$. Enačbo preuredimo v $(\log x)^2 - \log x\cdot\log 4 - \dfrac{3}{4}(\log 4)^2 = 0$. Izračunamo diskriminanto kvadratne enačbe $D = 4(\log 4)^2$, ki ima rešitvi $(\log x)_1 = \frac{3}{2}\log 4 = \log 8$ in $(\log x)_2 = -\frac{1}{2}\log 4 = \log\frac{1}{2}$. Iz teh rešitev dobimo rešitvi dane enačbe: $x_1 = 8$ in $x_2 = \frac{1}{2}$.

Uporaba pravila za logaritmiranje količnika .... 1 točka
Urejena kvadratna enačba: $(\log x)^2 - \log x\cdot\log 4 - \dfrac{3}{4}(\log 4)^2 = 0$ .... 1 točka
Izračunana diskriminanta $D = 4(\log 4)^2$ .... 1 točka
Rešitvi kvadratne enačbe: $(\log x)_1 = \log 8$, $(\log x)_2 = \log\frac{1}{2}$ .... 1 točka
Rešitvi $x_1 = 8$ in $x_2 = \frac{1}{2}$ .... 1 + 1 točka

Četrti letnik

1. Ker je vsak izmed 24 dijakov dosegel v povprečju 74,5 točke, so vsi skupaj dosegli $24 \cdot 74{,}5 = 1788$ točk. Ko je Rok upošteval tudi svoje točke, je izračunal povprečje 75 točk, zato je 25 dijakov doseglo skupaj $25 \cdot 75 = 1875$ točk. Razlika $1875 - 1788$ predstavlja število točk, ki jih je dosegel Rok. Rok je dosegel 87 točk.

   Pri upoštevanju 24 nalog je vsota vseh točk $24 \cdot 74{,}5 = 1788$ .... 2 točki
   Pri upoštevanju 25 nalog je vsota vseh točk $25 \cdot 75 = 1875$ .... 2 točki
   Razlika je 87 točk .... 1 točka
   Odgovor .... 1 točka

2. Abscise presečišč grafov obeh funkcij dobimo z rešitvijo enačbe $x^4 - 3x^3 + ax^2 = bx + 20$ oziroma $x^4 - 3x^3 + ax^2 - bx - 20 = 0$. Ker vemo, da sta rešitvi $x = 5$ in $x = -2$, velja $625 - 375 + 25a - 5b - 20 = 0$ in $16 + 24 + 4a + 2b - 20 = 0$. Enačbi preuredimo v $25a - 5b + 230 = 0$ in $4a + 2b + 20 = 0$. Sistem ima rešitev $a = -8$ in $b = 6$. Funkciji sta torej $p(x) = x^4 - 3x^3 - 8x^2$ in $y = 6x + 20$.

   Zapisana enačba $x^4 - 3x^3 + ax^2 = bx + 20$ .... 1 točka
   Zapisana enačba za $x = 5$: $25a - 5b + 230 = 0$ .... 1 točka
   Zapisana enačba za $x = -2$: $4a + 2b + 20 = 0$ .... 1 točka
   Pravilno reševanje sistema .... 1 točka
   Rešitev sistema $a = -8$ in $b = 6$ .... 1 točka
   Zapisani funkciji $p(x) = x^4 - 3x^3 - 8x^2$ in $y = 6x + 20$ .... 1 točka

3. Sestavimo preglednico, v kateri zapisujemo prehojeno pot v metrih.

	Janez	Peter	Oba skupaj v zadnji minuti	Oba skupaj v celoti
1. minuta	5	100	105	105
2. minuta	20	90	110	215
3. minuta	35	80	115	330
4. minuta	50	70	120	450

   Janez in Peter se bosta srečala čez 4 minute.

   Nalogo lahko rešimo tudi drugače. Dolžine poti, ki jih prehodi Janez v zaporednih minutah, predstavljajo člene aritmetičnega zaporedja z $a_1 = 5$ in $d = 15$. Podobno velja za Petrovo pot: $a_1 = 100$, $d = -10$. Vsota dolžin poti, ki jih prehodi Janez v času t minut, je enaka $\frac{t}{2}(10+15(t-1))$, vsota dolžin poti, ki jih prehodi Peter, pa $\frac{t}{2}(200-(t-1)\cdot 10)$. Ker skupaj prehodita 450 m, zapišemo enačbo $450 = \dfrac{t}{2}(10 + 15(t-1)) + \dfrac{t}{2}(200 - (t-1) \cdot 10)$, ki jo uredimo v $t^2 + 41t - 180 = 0$. Pozitivna rešitev enačbe je $t = 4$, kar pomeni, da se srečata čez 4 minute.

   Sklep za Janeza: $a_1 = 5,\ d = 15$ .... 1 točka
   Sklep za Petra: $a_1 = 100,\ d = -10$ .... 1 točka
   Zapisana zveza: $450 = \dfrac{t}{2}(10 + 15(t-1)) + \dfrac{t}{2}(200 - (t-1) \cdot 10)$ .... 1 točka
   Urejena enačba: $t^2 + 41t - 180 = 0$ .... 1 točka
   Rešitev $t = 4$ .... 1 točka
   Odgovor .... 1 točka

4. Upoštevamo zapisane pogoje in zapišemo enačbe $\dfrac{a+b}{c+1}=\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{2a+b}{2c+1}=1$ in $\dfrac{-a+b}{-c+1}=-\dfrac{1}{2}$. Odpravimo ulomke in rešimo sistem treh enačb s tremi neznankami. Dobimo rešitev $a=\frac{2}{3}$, $b=c=\dfrac{1}{3}$. Zapišemo funkcijo $f(x)=\dfrac{\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}x+1}$ in zapis poenostavimo $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}$.

Nastavljene enačbe: $\dfrac{a+b}{c+1}=\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{2a+b}{2c+1}=1$, $\dfrac{-a+b}{-c+1}=-\dfrac{1}{2}$ .... 1 točka
Pravilno reševanje sistema .... 1 točka
Rešitev: $a=\frac{2}{3}$, $b=c=\dfrac{1}{3}$ .... $1+1+1$ točka
Zapisana funkcija: $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}$ .... 1 točka

5. Najprej poenostavimo posamezne člene: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\sin(\pi+x)=-\sin x$ in z uporabo adicijskega izreka še $\sin(\dfrac{3\pi}{2}-x)=-\cos x$. Ulomek zapišemo v obliki $\dfrac{1-\cos x-\sin^2 x}{1-\cos x}$. Upoštevamo zvezo $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ in dobimo $\dfrac{\cos^2 x-\cos x}{1-\cos x}$, nato pa v števcu izpostavimo skupni faktor in krajšamo: $\dfrac{-\cos x(1-\cos x)}{1-\cos x}=-\cos x$.

Uporabljena zveza: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ .... 1 točka
Uporabljena zveza: $\sin(\pi+x)=-\sin x$ .... 1 točka
Uporabljen adicijski izrek: $\sin(\dfrac{3\pi}{2}-x)=-\cos x$ .... 1 točka
Upoštevanje zveze $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ .... 1 točka
Izpostavljanje skupnega faktorja in krajšanje: $\dfrac{-\cos x(1-\cos x)}{1-\cos x}$ .... 1 točka
Rezultat: $-\cos x$ .... 1 točka