Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

6. državno tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Kranj, 22. april 2006

NALOGE ZA 1. LETNIK

1. Brez uporabe žepnega računala izračunaj vrednost izraza $2^3 \cdot 3^{-9} \cdot 6^6 \cdot 8^{-8} \cdot 1728$. Rezultat naj bo zapisan v obliki potence.

2. Poenostavi izraz
$$\Big(\frac{2}{5}x^2 - \Big(\frac{5}{2xy}\Big)^{-1}\Big)(x^2-y^2)^{-1}\frac{1}{0,3\overline{9}}\,.$$

3. Dan je trikotnik ABC z oglišči $A(-1,2), B(-2,-3)$ in $C(2,-1)$. Iz točke A konstruiramo pravokotnico na stranico BC. Pravokotnica seka BC v točki E. Natančno izračunaj dolžino daljice AE.

4. Dani sta števili $a=-8$ in $b=36$.
   a) Izračunaj vrednost izraza $\Big||a|-2\sqrt{b}\Big|-\frac{1}{2}|\sqrt[3]{a}|$.
   b) Reši enačbo $|x-\sqrt[3]{a}|=\sqrt{b}$.

5. Mojster in njegov pomočnik sta prejela za opravljeno delo 197 200 SIT. Mojstrova dnevnica je za $56,5\%$ večja od pomočnikove dnevnice. Koliko je zaslužil vsak, če je mojster delal 20 dni, pomočnik pa 18 dni? Zapiši odgovor.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

6. državno tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Kranj, 22. april 2006

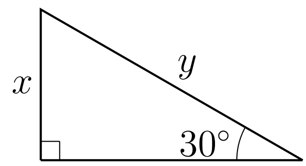
NALOGE ZA 2. LETNIK

1. Na naš računalnik se je naselil virus SEM LAČEN. Ob vsakem kliku miške virus zasede novih 0,5 MB prostora. Zapiši funkcijo, ki ponazarja širjenje virusa. Po kolikih klikih z miško bo virus zasedel $2{,}5 \cdot 10^3$ MB prostora? Zapiši odgovor.

2. Dana je funkcija $f(x) = mx - (3m - 20)$, kjer je m rešitev enačbe

   $\frac{(\sqrt[3]{2})^6 \cdot 2^{-6}}{0{,}5^2 \cdot 8^{-\frac{2}{3}}} = m \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^9}$. Nariši graf funkcije f.

3. Ograditi želimo vrt trikotne oblike, kot kaže slika. Koliko metrov lesene ograje potrebujemo, če vemo, da je $x + y = 15$ m? Rezultat naj bo natančen. Zapiši odgovor.



4. Na krožnico s premerom 10 cm sta narisani obe tangenti iz točke A izven krožnice. Točka A je od središča krožnice oddaljena 1,3 dm. Izračunaj razdaljo med dotikališčema tangent na krožnico in jo izrazi v centimetrih. Rezultat zaokroži na eno decimalno mesto natančno.

5. Poenostavi izraz $\left((1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 1 - x\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1\right)$, če je $-1 \leq x < 1$.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

6. državno tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Kranj, 22. april 2006

NALOGE ZA 3. LETNIK

1. Dana je funkcija $f(x) = 3^x$. Določi funkciji $g(x) = f(x+1)$ in $h(x) = 4f(x) - 3$ ter izračunaj presečišče njunih grafov.

2. S pomočjo desetiških logaritmov reši dano enačbo $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$.

3. Razlika obsegov dveh kvadratov je 8 cm, razlika ploščin pa 16 cm^2. Koliko je vsota njunih ploščin? Zapiši odgovor.

4. Izračunaj površino in prostornino pokončne tristrane prizme, ki ima za osnovno ploskev pravokotni trikotnik, katerega dolžini katet sta rešitvi enačbe $\log_{x-2}(10x - 44) = 2$. Višina prizme je enaka dolžini hipotenuze osnovne ploskve.

5. Če bi se zavojček žvečilnih gumijev podražil za toliko odstotkov, kolikor znaša njegova sedanja cena, bi morali za štiri zavojčke plačati 429 tolarjev. Koliko nas ti štirje zavojčki stanejo sedaj? Zapiši odgovor.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

6. državno tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Kranj, 22. april 2006

NALOGE ZA 4. LETNIK

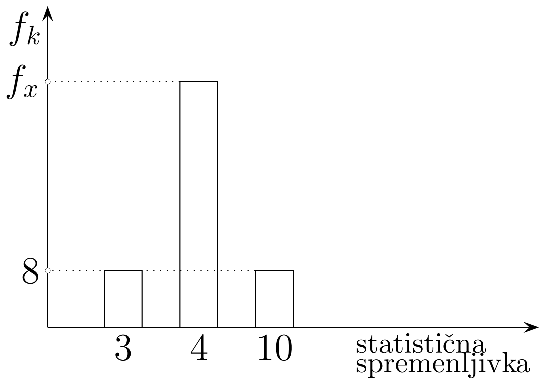
1. Dani sta enačbi $2\log_3(x+2) - \log_3 x = 2$ in $25^x = 0,008$.

   a) Reši enačbi.

   b) Rešitve enačb so ničle polinoma p tretje stopnje. Graf tega polinoma poteka tudi skozi točko $(2,7)$. Zapiši predpis polinoma p v ničelni obliki.

2. Določi presečišče grafa funkcije $f(x) = \frac{2x^3+x+1}{x^3+1}$ z njegovo vodoravno asimptoto.

3. Povprečna vrednost statistične spremenljivke, ki jo opisuje stolpični diagram, je 4,5. Izračunaj neznano frekvenco f_x.



4. Na grafu funkcije $f(x) = \sin x$ sta točki $A(\frac{\pi}{3}, f(\frac{\pi}{3}))$ in $B(\frac{\pi}{6}, f(\frac{\pi}{6}))$. Zapiši enačbo premice, ki poteka skozi točki A in B. Koeficienti naj bodo določeni natančno (brez uporabe žepnega računala).

5. Površine petih kock so členi geometrijskega zaporedja s količnikom 4. Rob najmanjše kocke je dolg 5 cm. Kolikšna je vsota površin vseh petih kock? Koliko meri površina največje kocke?

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran.

Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro.

Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Za reševanje imaš na voljo 120 min.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

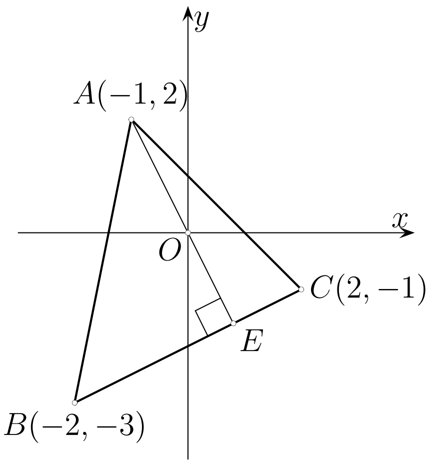
1. Število 1728 v izrazu $2^3 \cdot 3^{-9} \cdot 6^6 \cdot 8^{-8} \cdot 1728$ razcepimo na prafaktorje $1728 = 2^6 \cdot 3^3$. Zapišemo $6^6 = (2 \cdot 3)^6 = 2^6 \cdot 3^6$ in $8^{-8} = 2^{-24}$. Upoštevamo pravila za množenje potenc z enako osnovo: osnovo prepišemo, eksponente seštejemo in dobimo rezultat 2^{-9}.

Razcep števila 1728 na prafaktorje .... 1 + 1 točka
Zapis števila $6^6 = (2 \cdot 3)^6$ ali $2^6 \cdot 3^6$ .... 1 točka
Zapis števila $8^{-8} = 2^{-24}$ .... 1 točka
Poenostavitev izraza do $2^{-9} \cdot 3^0$ .... 1 točka
Rezultat .... 1 točka

2. V danem izrazu zapišemo število $0,3\overline{9}$ z ulomkom $\frac{2}{5}$. Poenostavimo izraz v prvem oklepaju $\frac{2x^2-2xy}{5} = \frac{2x(x-y)}{5}$ in pišemo $(x^2 - y^2)^{-1}$ v obliki $\frac{1}{(x+y)(x-y)}$. Po krajšanju dobimo $\frac{x}{x+y}$.

Zapis $0,3\overline{9} = \frac{2}{5}$ .... 1 točka
Zapis ulomka $\frac{1}{0,3\overline{9}}$ s $\frac{5}{2}$ .... 1 točka
Potenciranje z -1 v prvem oklepaju .... 1 točka
Odprava prvega oklepaja do $\frac{2x(x-y)}{5}$ .... 1 točki
Odprava drugega oklepaja do $\frac{1}{(x+y(x-y)}$ .... 1 točka
Rezultat $\frac{x}{x+y}$ .... 1 točka

3. Ugotovimo, da je v danem trikotniku $v_a = d(A,E)$. Izračunamo ploščino trikotnika ABC: $S = 9$. Dolžina stranice a je enaka $d(B,C) = 2\sqrt{5}$. Nato izrazimo v_a iz ploščine $v_a = \frac{2\cdot S}{a} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$. Dolžina $v_a = \frac{9\sqrt{5}}{5}$.



Ugotovitev, da je $d(A,E) = v_a$ .... 1 točka
Uporaba ustreznega obrazca za ploščino .... 1 točka
Izračun $S = 9$ .... 1 točka
Izračunana $a = d(B,C) = 2\sqrt{5}$ .... 1 točka
Pravilno vstavljeni podatki v obrazec $S = \frac{av_a}{2}$ ..... 1 točka
Rezultat $v_a = \frac{9\sqrt{5}}{5}$ .... 1 točka

4. a) V dani izraz vstavimo ustrezni števili: $||-8|-2\sqrt{36}|-\frac{1}{2}\sqrt[3]{-8}| = |8-12|-\frac{1}{2}\cdot 2 = 4-1 = 3$.

   b) Enačbo $|x - \sqrt[3]{-8}| = \sqrt{36}$ poenostavimo: $|x+2| = 6$. Odtod sklepamo $x + 2 = \pm 6$ ter dobimo rešitvi $x_1 = 4$ in $x_2 = -8$.

a) Upoštevanje prve absolutne vrednosti $\left||a| - 2\sqrt{b}\right| = 4$ .... 1 točka
Upoštevanje $|\sqrt[3]{-8}| = 2$ .... 1 točka
Rezultat 3 .... 1 točka

b) Zapis enačbe $|x+2| = 6$ .... 1 točka
Rešitvi: $x_1 = 4$ in $x_2 = -8$ .... 1 + 1 točka

5. Naj bo x dnevnica pomočnika. Tedaj je dnevnica mojstra enaka $1,565x$. Po besedilu naloge nastavimo enačbo $20 \cdot 1,565x + 18x = 197\,200$. Rešitev enačbe je $x = 4000$. Prejeto plačilo za opravljeno delo pomočnika je 72 000 SIT, za mojstra pa 125 200 SIT.

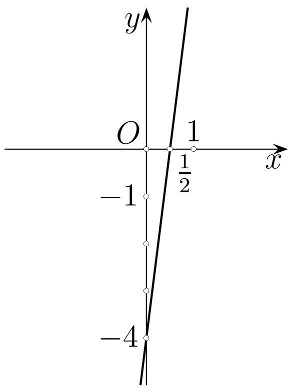
Zapis dnevnice mojstra $x + 0,565x = 1,565x$ .... 1 točka
Zapis enačbe $20 \cdot 1,565x + 18x = 197\,200$ .... 2 točki
Rešitev $x = 4000$ .... 1 točka
Odgovora .... 1 + 1 točka

Drugi letnik

1. Ugotovimo, da širjenje virusa predstavlja linearno funkcijo za naravna števila, pri čemer je $k = 0,5$. Tako je enačba funkcije enaka $y = 0,5x$. Odgovor na drugo vprašanje dobimo iz sklepnega računa:
1 klik...........$0,5$ MB
x klikov...........$2,5 \cdot 10^3$ MB.
Izračunamo $x = \frac{1 \cdot 2,5 \cdot 10^3}{0,5} = 5 \cdot 10^3$.

Zapis enačbe linearne funkcije za linearno naraščanje $y = kx + n$ .... 1 točka
Ugotovitev $k = 0,5$ MB .... 1 točka
Zapis enačbe $y = 0,5x$ .... 1 točka
Nastavitev sklepnega računa:
1 klik...........$0,5$ MB
x klikov...........$2,5 \cdot 10^3$ MB .... 1 točka
Izračun $x = \frac{1 \cdot 2,5 \cdot 10^3}{0,5} = 5 \cdot 10^3$ .... 1 točka
Zapis odgovora .... 1 točka

2. Najprej rešimo enačbo $\frac{(\sqrt[3]{2})^6 \cdot 2^{-6}}{0,5^2 \cdot 8^{-\frac{2}{3}}} = m \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^9}$. Leva stran enačbe je enaka $\frac{2^2 \cdot 2^{-6}}{2^{-2} \cdot 2^{-2}} = 1$, desna stran pa $m \cdot 2^{-3}$. Iz enakosti $1 = m \cdot 2^{-3}$ izračunamo $m = 8$. Vstavimo m v predpis za funkcijo in dobimo enačbo premice $y = 8x - 4$. Narišemo njen graf.

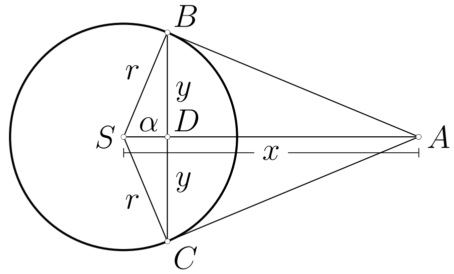


Izračunana leva stran enačbe $\frac{2^2 \cdot 2^{-6}}{2^{-2} \cdot 2^{-2}} = 1$ .... 2 točki
Izračunana desna stran enačbe $m \cdot 2^{-3}$ .... 1 točka
Izračun $m = 8$ .... 1 točka
Zapis enačbe premice $y = 8x - 4$ .... 1 točka
Narisan graf .... 1 točka

3. Iz podatka $x+y = 15$ izrazimo na primer $y = 15-x$. Uporabimo kotno funkcijo $\sin 30^0 = \frac{x}{y}$. Vstavimo y in dobimo $\frac{1}{2} = \frac{x}{15-x}$. Iz te enakosti izračunamo $x = 5$ m. Izračunamo še $y = 10$ m. Nato z uporabo Pitagorovega izreka izračunamo manjkajočo kateto $z^2 = y^2 - x^2$, katere dolžina je $z = 5\sqrt{3}$. Nato izračunamo obseg $o = x + y + z = 15 + 5\sqrt{3}$.

Izražen $y = 15 - x$ .... 1 točka
Zapis $\sin 30^0 = \frac{x}{y}$ .... 1 točka
Izračun ene neznanke iz $\frac{1}{2} = \frac{x}{15-x}$
$x = 5$ m .... 1 točka
Izračun druge katete iz $z^2 = y^2 - x^2$ .... 1 točka
Izračun obsega $o = x + y + z = 15 + 5\sqrt{3}$ .... 1 točka
Odgovor .... 1 točka

4. Narišemo skico: središče krožnice S, točka A izven krožnice, dotikališči B in C. Označimo kot $\angle BSA$ z α, razdaljo od S do A z x in razdaljo od B do C z $2y$. Ker je trikotnik ASB pravokoten, uporabimo kotno funkcijo $\cos\alpha = \frac{r}{x}$, iz česar izračunamo $\alpha = 67,38^0$. Tudi trikotnik DSB je pravokoten (D je presečišče daljic SA in BC). Z uporabo kotne funkcije $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, izračunamo $y = r\cdot\sin\alpha = 4,6$. Nato izračunamo razdaljo $2y = 9,2$.



Nalogo lahko rešimo drugače: ploščina pravokotnega trikotnika ASC je enaka $\frac{1}{2}|CS|\cdot|CA| = \frac{1}{2}|AS|\cdot|CD|$, od koder izrazimo $|BC| = 2|CD| = \frac{2\cdot|SC|\cdot\sqrt{|SA|^2-|SC|^2}}{|SA|} = \frac{2r\sqrt{x^2-r^2}}{x} = \frac{2\cdot5\cdot12}{13} \approx 9,2$.

Narisana skica .... 1 točka
Zapis $\cos\alpha = \frac{r}{x} = \frac{5}{13}$ .... 1 točka
Izračuna kot $\alpha = 67,38^0$ .... 1 točka
Zapis $\sin\alpha = \frac{y}{r}$ .... 1 točka
Izračun $y = 4,6$ .... 1 točka
Izračunana razdalja $2y = 9,2$ .... 1 točka

5. Če uporabimo v prvem oklepaju pravilo $a\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$, ki velja za $a \geq 0$, dobimo $\left((1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1-x\right) = \left(\sqrt{\frac{(1-x)^2(1+x)}{1-x}}+1-x\right)$, krajšamo in dobimo $\left(\sqrt{(1-x)(1+x)}+1-x\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1\right)$. Nato odpravimo oklepaja $\sqrt{\frac{(1-x)(1+x)(1+x)}{1-x}}+\sqrt{\frac{(1-x)(1+x)}{1-x}}-\sqrt{(1-x)(1+x)}-(1-x)$, zopet krajšamo ter dobimo $\sqrt{(1+x)^2}-1+x$. Upoštevamo pogoj $\sqrt{a^2} = |a|, a \in \Re$. Ker pa je $1+x \geq 0$, imamo rešitev: $1+x-1+x = 2x$.

Nalogo lahko rešimo drugače: ker je $\left((1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1-x\right) = (1-x)\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1\right)$, lahko zapišemo $\left((1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1-x\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1\right) = (1-x)\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}^2-1\right) = (1-x)\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-1\right) = (1-x)\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right) = 2x$, kjer smo lahko opustili absolutno vrednost zaradi predpostavke $-1 \leq x < 1$.

1. način: Ureditev izraza v prvem oklepaju $\left((1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1-x\right) = \left(\sqrt{\frac{(1-x)^2(1+x)}{1-x}}+1-x\right)$ in krajšanje .... 1 točka
Pravilna odprava oklepaja
$\sqrt{\frac{(1-x)(1+x)(1+x)}{1-x}}+\sqrt{\frac{(1-x)(1+x)}{1-x}}-\sqrt{(1-x)(1+x)}-(1-x)$ .... 1 točka
Ureditev izraza do $\sqrt{(1+x)^2}-1+x\left((1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1-x\right)$ .... 1 točka
Uporaba pogoja $|1+x|$ .... 1 točka
Zapisana rešitev: $1+x-1+x = 2x$, ker je $1+x \geq 0$ .... 1 točka
Utemeljitev, da druge rešitve ni, saj $1+x$ ne more biti negativen .... 1 točka
2. način:
Izpostavljen skupni faktor $(1-x)\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1\right)\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1\right)$ .... 1 točka

Poenostavitev do $(1-x)\left(\sqrt{(\frac{1+x}{1-x})^2}-1\right)$ .... 1 točka
Upoštevanje $\sqrt{a^2}=|a|, a \in \Re$ .... 1 točka
Zapis pogoja in izračun:
$(1-x)\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)=1+x-1+x=2x$, ker je $1+x \geq 0$ .... 1 točka
Utemeljitev, da druge rešitve ni, saj $1+x$ ne more biti negativen .... 1 točka
Odprava ulomka pri katerem koli pogoju .... 1^* točka

Tretji letnik

1. Ker je $g(x) = f(x+1)$, dobimo $g(x)$ tako, da v $f(x)$ vstavimo $x+1$ namesto x. Tako dobimo $g(x) = 3^{x+1}$. Podobno dobimo $h(x) = 4 \cdot 3^x - 3$. Presečišča grafov funkcij $g(x)$ in$h(x)$ dobimo tako, da enačimo enačbi obeh funkcij. Dobimo enačbo $3^{x+1} = 4 \cdot 3^x - 3$. Enačbo uredimo in dobimo rešitev $x = 1$. Nato izračunamo še y. Dobimo presečišče $P(1, 9)$.

Zapis funkcije $g(x) = 3^{x+1}$ .... 1 točka
Zapis funkcije $h(x) = 4 \cdot 3^x - 3$ .... 1 točka
Nastavitev enačbe $3^{x+1} = 4 \cdot 3^x - 3$ .... 1 točka
Poenostavitev enačbe $3 = 3^x$ .... 1 točka
Rešitev: $x = 1$ .... 1 točka
Zapis presečišča $P(1, 9)$ .... 1 točka

2. Enačbo najpraj kvadriramo, pa dobimo $x^{\log\sqrt{x}} = 100$. Nato jo še logaritmiramo $\log\sqrt{x} \cdot \log x = \log 100$. Enačbo uredimo, dobimo $\frac{1}{2}(\log x)^2 = 2$. Ugotovimo, da je $\log x = \pm 2$, in dobimo rešitvi $x_1 = 100$, $x_2 = \frac{1}{100}$.

Kvadriranje prvotne enčbe $x^{\log\sqrt{x}} = 100$. .... 1 točka
Logaritmiranje $\log\sqrt{x} \cdot \log x = \log 100$ .... 1 točka
Preureditev enačbe v obliko $\frac{1}{2}(\log x)^2 = 2$ .... 1 točka
Ugotovitev $\log x = \pm 2$ .... 1 točka
Rešitvi $x_1 = 100$, $x_2 = \frac{1}{100}$ .... $1+1$ točka

3. Iz razlike obsegov kvadratov ugotovimo $a_1 - a_2 = 2$. Iz razlike ploščin kvadratov, dobimo $a_1^2 - a_2^2 = 16$, kar lahko razstavimo v $(a_1 + a_2)(a_1 - a_2) = 16$. Ker je $a_1 - a_2 = 2$, sledi da je $a_1 + a_2 = 8$. Iz sistema enačb $a_1 - a_2 = 2$, $a_1 + a_2 = 8$, dobimo rešitvi $a_1 = 3$ cm in $a_2 = 5$ cm. Izračunamo ploščini obeh kvadratov $a_1^2 = 9\ \text{cm}^2$ in $a_2^2 = 25\ \text{cm}^2$. Vsota ploščin je 34 cm^2.

Ugotovitev $4a_1 - 4a_2 = 8 \Rightarrow a_1 - a_2 = 2$. .... 1 točka
Upoštevanje razlike kvadratov ploščin
$a_1^2 - a_2^2 = 16 \Rightarrow (a_1 + a_2)(a_1 - a_2) = 16$. .... 1 točka
Zapis $a_1 + a_2 = 8$ .... 1 točka
Izračun:
$a_1 = 3$ cm. .... 1 točka
$a_2 = 5$ cm. .... 1 točka
Odgovor: Vsota njunih ploščin je 34 cm^2. .... 1 točka

4. Rešimo enačbo $\log_{x-2}(10x - 44) = 2$. Upoštevamo definicijo logaritma in dobimo $(x-2)^2 = 10x - 44$. Enačbo uredimo in dobimo $x^2 - 14x + 48 = 0$. Rešitvi enačbe sta $x = 6$ in $x = 8$. Tako sta dolžini katet trikotnika enaki $a = 6$ cm in $b = 8$ cm. Po Pitagorovem izreku izračunamo dolžino hipotenuze, ki meri $c = 10$ cm. Višina prizme je enaka c. Prostornina prizme je $V = S \cdot v = \frac{a \cdot b}{2} \cdot c = 240\ \text{cm}^3$. Površina prizme je $P = 2S + S_{pl} = 288\ \text{cm}^2$.

Zapis enačbe $(x-2)^2 = 10x - 44$ .... 1 točka
Urejena enačba $x^2 - 14x + 48 = 0$. .... 1 točka

Zapis npr. $a = 6$ cm in $b = 8$ cm . . . 1 točka
Izračunana hipotenuza $c = 10$ cm . . . 1 točka
Izračuna prostornina 240 cm^2 . . . 1 točka
Izračunana površina 288 cm^2 . . . 1 točka

5. Sedanja cena naj bo x. Nastavimo enačbo $4 \cdot (x + x \cdot \frac{x}{100}) = 429$. Enačbo poenostavimo in dobimo $x^2 + 100x - 10725 = 0$. Rešitvi enačbe sta $x = 65$ in $x = -165$. Upoštevamo pozitivno rešitev. Štirje paketi sztanejo $4 \cdot 65 = 260$ tolarjev.

Nastavitev enačbe $4 \cdot (x + x \cdot \frac{x}{100}) = 429$ . . . 2 točki
Odprava ulomka in oklepaja $400x + 4x^2 = 42900$ . . . 1 točka
Ureditev enačbe $x^2 + 100x - 10725 = 0$ . . . 1 točka
Rešitev $x = 65$ . . . 1 točka
Odgovor . . . 1 točka

Četrti letnik

1. Logaritemsko enačbo preoblikujemo v $\frac{(x+2)^2}{x} = 3^2$, preuredimo v $\frac{x^2+4x+4}{x} = 9$ oziroma $x^2-5x+4=0$ in razstavimo $(x-4)(x-1)=0$. Dobimo rešitvi $x_1 = 4$ in $x_2 = 1$. Nato še eksponentno enačbo preuredimo v $5^{2x} = 5^{-3}$. Rešitev te enačbe je $x = -\frac{3}{2}$. Iz vseh rešitev danih enačb zapišemo polinom $p(x) = a(x-4)(x-1)(x+\frac{3}{2})$. Uporabimo koordinate točke $(2,7)$ in izračunamo vodilni koeficient $a = -1$. Nato polinom zapišemo v ničelni obliki $p(x) = -(x-4)(x-1)(x+\frac{3}{2})$.

   Preoblikovanje logaritemske enačbe do $x^2-5x+4=0$ .... 1 točka
   Rešitvi enačbe $x_1 = 4$ in $x_2 = 1$ .... 1 točka
   Preoblikovanje eksponentne enačbe $5^{2x} = 5^{-3}$ .... 1 točka
   Rešitev $x = -\frac{3}{2}$ .... 1 točka
   Zapis polinoma $p(x) = a(x-4)(x-1)(x+\frac{3}{2})$ .... 1 točka
   Zapis polinoma $p(x) = -(x-4)(x-1)(x+\frac{3}{2})$ .... 1 točka

2. Vodoravna asimptota dane funkcije je $y = 2$. Da dobimo presečišče, moramo enačiti $f(x)$ z asimptoto. Dobimo enačbo $\frac{2x^3+x+1}{x^3+1} = 2$. Enačbo rešimo tako, da odpravimo ulomek in upoštevamo pogoj $x \neq -1$. Dobimo enačbo $2x^3+x+1 = 2x^3+2$, ki jo rešimo. Rešitev je $x = 1$. Ordinata presečišča je kar vrednost asimptote, tako je $P(1,2)$.

   Zapis enačbe asimptote $y = 2$ .... 1 točka
   Zapisana enačba $f(x) = 2$ ali $\frac{2x^3+x+1}{x^3+1} = 2$ .... 1 točka
   Pravilna odprava ulomka in zapis pogoja $x \neq -1$ .... 1 + 1 točka
   Rešitev enačbe $x = 1$ .... 1 točka
   Zapisano presečišče $P(1,2)$ .... 1 točka

3. Najprej uporabimo obrazec za izračun povprečne vrednosti statistične spremenljivke $\overline{x} = \frac{x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3}{f_+f_2+f_3}$. Vstavimo dane podatke in upoštevamo, da je $f_2 = f_x$. Odpravimo ulomek in dobimo $72+4,5f_x = 104+4f_x$. Rešitev enačbe je $f_x = 64$.

   Zapis obrazca $\overline{x} = \frac{x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3}{f_+f_2+f_3}$ .... 1 točka
   Zapis enačbe $4,5 = \frac{3\cdot 8+4\cdot f_x+10\cdot 8}{8+f_x+8}$ .... 2 točki
   Odprava ulomka $72+4,5\cdot f_x = 104+4\cdot f_x$ .... 1 točka
   Zapis $0,5\cdot f_x = 32$ .... 1 točka
   Rešitev $f_x = 64$ .... 1 točka

4. Najprej izračunamo ordinati danih točk: $f(\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ in $f(\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Nato izračunamo smerni koeficient $k = \frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}}$. Zapis poenostavimo $k = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\pi}$. Nato v enačbo premice vstavimo ustrezne podatke $y = k(x-x_1)+y_1 = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\pi}(x-\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$. Zapis poenostavimo in dobimo $y = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\pi}x+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Določitev ordinate točke A: $f(\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .... 1 točka
   Določitev ordinate točke B: $f(\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ .... 1 točka
   Izračun smernega koeficienta $k = \frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}}$ .... 1 točka

Poenostavljen zapis smernega koeficienta $k = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\pi}$ .... 1 točka
Vstavljeni podatki v enačbo premice .... 1 točka
Poenostavitev enačbe $y = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\pi}x + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ .... 1 točka

5. Uporabimo obrazec za površino kocke $P = 6a^2$. Ugotovimo, da je površina najmanjše kocke prvi člen geometrijskega zaporedja $a_1 = 6 \cdot 5^2$. V obrazec za vsoto prvih petih površin kock vstavimo podatke $S_5 = \frac{6 \cdot 5^2(4^5-1)}{4-1}$. Izračunamo vsoto $S_5 = 51150\ \text{cm}^2$. Nato v obrazec za peti člen zaporedja vstavimo ustrezne podatke $a_5 = 6 \cdot 5^2 \cdot 4^4$. Nato izračunamo površine $P_5 = 38400\ \text{cm}^2$.

Uporaba obrazca za površino kocke $P = 6a^2$ .... 1 točka
Zapis prvega člena geometrijskega zaporedja $a_1 = 6 \cdot 5^2$ .... 1 točka
Vstavljeni podatki v obrazec za vsoto $S_5 = \frac{6 \cdot 5^2(4^5-1)}{4-1}$ .... 1 točka
Izračun vsote $S_5 = 51150\ \text{cm}^2$ .... 1 točka
Vstavljeni podatki v obrazec za peti člen $a_5 = 6 \cdot 5^2 \cdot 4^4$ .... 1 točka
Izračun površine $P_5 = 38400\ \text{cm}^2$ .... 1 točka