**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Prilepi nalepko s šifro

N1	N2	N3	N4	N5

Naloge za 1. letnik

1. Če med števki dvomestnega števila vrinemo ničlo, dobimo devetkrat večje število. Zapiši vsa takšna dvomestna števila.

2. Prijatelja Miha in Blaž za nedeljsko potepanje najameta vsak svoje motorno kolo pri različnih ponudnikih. Miha mora plačati na začetku 100 evrov, ko pa motorno kolo vrne, še 4 evre za vsak prevoženi kilometer. Blaž na začetku plača 200 evrov, potem pa 3 evre za vsak prevoženi kilometer. Najmanj koliko kilometrov morata prijatelja prevoziti, da bo Miha plačal več kot Blaž?

3. Poenostavi izraz
$$(x-1)\left((x^{-3}+x^{-2}+x^{-1})(x^{-1}-1)-(x^{-2}-1)(x^{-2}+1)\right)^{-1}.$$

4. Miro, Aleš in Lovro so trikrat igrali poker. Prvič je izgubil Miro in je zato moral plačati Alešu in Lovru, vsakemu posebej toliko denarja, kot sta ga imela na začetku igre. Drugič je izgubil Aleš, zato je prav tako moral plačati Miru in Lovru, vsakemu posebej toliko, kot sta ga trenutno imela. Tretjič je izgubil Lovro in tudi on je na enak način plačal Miru in Alešu. Po odigranih treh igrah je imel vsak 24 evrov. Kdo od njih je izgubil največ in koliko?

5. V dveh sadovnjakih so prvo leto nabrali skupaj 315 ton sadja. Naslednje leto se je skupni pridelek povečal za 40%. V prvem sadovnjaku se je pridelek povečal za 25%, v drugem pa za 50%. Koliko ton sadja so v vsakem sadovnjaku nabrali prvo leto?

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

10. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Državno tekmovanje, 17. april 2010

Prilepi nalepko s šifro

N1	N2	N3	N4	N5

Naloge za 2. letnik

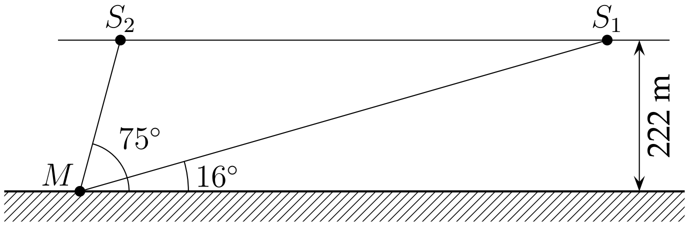
1. Tone je rezervoar za gorivo napolnil do vrha in se z avtom podal na dolgo pot. Podatki, ki jih je Tone razbral na elektronskem števcu avtomobila, so prikazani v tabeli.

število km	35824	36149	36449
podatki o gorivu	poraba $17{,}2\ \ell$	poraba $39{,}3\ \ell$	ostalo $5{,}3\ \ell$

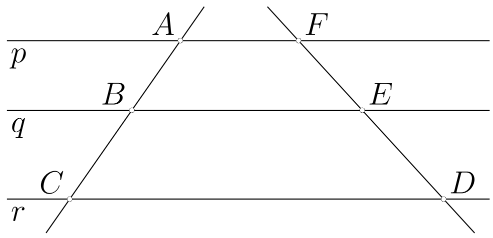
   Koliko litrov je prostornina rezervoarja tega avtomobila?
   OPOMBA: Upoštevajmo, da ima avtomobil konstantno porabo goriva na kilometer.

2. Ničla linearne funkcije je 2, začetna vrednost pa $\frac{5}{2}$. Zapiši enačbo premice, ki je vzporedna grafu dane funkcije in seka os x pri $\frac{4}{3}$, v implicitni obliki.

3. Sokol leti nad travnikom s konstantno hitrostjo naravnost in na stalni višini 222 m. Mirujoča miška je zagledala sokola, ko je bil kot med zemljo in sokolom $16°$. Minuto kasneje je bil kot med zemljo in sokolom $75°$. Podatki so prikazani na skici. Izračunaj dolžino poti, ki jo je sokol preletel v eni minuti.



4. Premice p, q in r so vzporedne. Izračunaj $|AC|$, če je $|AB| = 3, |ED| = 4\frac{1}{4}, |EF| = 3\frac{1}{3}$. Postopek utemelji.



5. Poenostavi

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \cfrac{2}{2 - \sqrt{3} + \cfrac{1}{2 - \sqrt{3}}}}.$$

   Rezultat naj bo oblike $\dfrac{a\sqrt{3} + b}{c}$, kjer so a, b in c cela števila.

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

10. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 17. april 2010

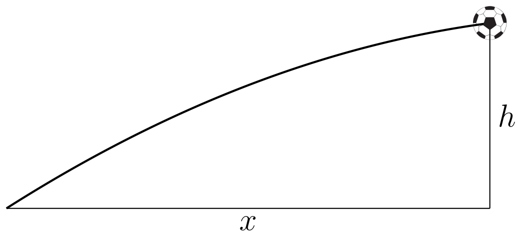
Prilepi nalepko s šifro

N1	N2	N3	N4	N5

Naloge za 3. letnik

1. Ploščina romba meri 120 cm^2. Razlika dolžin njegovih diagonal je 14 cm. Kolikšna je dolžina stranice romba?

2. Na nogometni tekmi vratar brcne žogo. Pot žoge je opisana s funkcijo



$$h(x) = -0{,}0126x^2 + 0{,}635x,$$

kjer je h višina žoge nad zemljo in x vodoravna oddaljenost od mesta udarca (količini sta izraženi v merskih številih).

   a) Na kolikšni višini je žoga, ko je njena vodoravna oddaljenost od mesta udarca 15 m?

   b) Koliko metrov od mesta udarca pade na zemljo?

   c) Kolikšna je največja višina, ki jo doseže žoga?

3. Reši enačbo $\log_4 \left(1 + \log_4 \left(3^x - \sqrt{(5^0 + 4^2)^2}\right)\right) = e^0$

4. Prezračevalne naprave v lokalu čistijo zrak. Pretok zraka v odvisnosti od časa se za prvo napravo spreminja po formuli $f(t) = 2^t$, za drugo pa $f(t) = 2^{t+3}$. V lokalu imajo štiri naprave prvega tipa in eno drugega tipa. S koliko napravami za prezračevanje s pretokom $f(t) = 2^{t+2}$ bi lahko zamenjali obstoječe?

5. Kovinsko kocko s površino 72 cm^2 pretopimo v pravilno štiristrano piramido enake prostornine, katere dolžina osnovnega roba je enak tretjini dolžine telesne diagonale kocke. Kolikšna je višina piramide?

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

10. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 17. april 2010

Prilepi nalepko s šifro

N1	N2	N3	N4	N5

Naloge za 4. letnik

1. Izkopali so jamo v obliki kvadra. Njena globina je 12 krat večja od dolžine. Dolžina jame je $\frac{3}{2}$ njene širine. Vsota merskega števila prostornine jame in ploščine njenega dna je $\frac{7}{6}$. Izračunaj globino jame.

2. Zapiši definicijsko območje funkcije $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}$.

3. Družina je naredila sneženega moža iz treh delov, ki so imeli obliko krogle. Polmeri teh krogel so tvorili geometrijsko zaporedje. Polmer najmajše krogle na vrhu snežaka je bil 8 dm, polmer največje krogle pa 18 dm. Koliko kubičnih metrov snega je bilo v tem sneženem možu?

4. Izračunaj $\cos(\pi + 2x)$, če je $\cos x = \frac{1}{4}$.

5. Oskrbnik planinske koče je več let spremljal, koliko časa porabijo planinci za pot od vznožja v dolini do planinske koče tik pod vrhom gore. Pohodniki so sami zapisovali porabljen čas, oskrbnik pa je podatke zbral in uredil frekvenčno tabelo, kjer je zapisal relativne frekvence.

porabljen čas v minutah	**relativna frekvenca (v %)**
$90 - 105$	7,9
$105 - 120$	19,4
$120 - 135$	37,2
$135 - 150$	16,3
$150 - 165$	12,7
$165 - 180$	?

Določi neznano relativno frekvenco in izračunaj povprečni čas.

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

dMFA

10. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Državno tekmovanje, 17. april 2010

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, tako rešitev točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

1. Naj bosta a in b števki iskanega dvomestnega števila. Nastavimo enačbo $100a + b = 9(10a + b)$. Odpravimo oklepaj in dobimo zvezo $4b = 5a$.Upoševamo, da sta a in b števki, kar pomeni, da je edina možna rešitev $a = 4$ in $b = 5$. Iskano število je 45.

   Zapis zveze $100a + b = 9(10a + b)$ . . . . 1 + 1 točka
   Ureditev enačbe $100a + b = 90a + 9b$ . . . . 1 točka
   Upoštevana zveza $4b = 5a$ . . . . 1 točka
   Rešitev $a = 4$ in $b = 5$ . . . . 1 točka
   Rešitev 45 . . . . 1 točka

2. Naj bo x število prevoženih kilometrov in $m(x)$ ter $b(x)$ zneska, ki sta odvisna od x. Znesek za Mihovo kolo je $m(x) = 4x + 100$, znesek za Blaževo kolo pa $b(x) = 3x + 200$. Miha bo plačal več kot Blaž, ko bo veljlo $4x + 100 > 3x + 200$. Rešimo neenačbo in dobimo rešitev $x > 100$. Prevoziti morata najmanj 101 kilometer.

   Zapis ali uporaba zveze $m(x) = 4x + 100$ . . . . 1 točka
   Zapis ali uporaba zveze $b(x) = 3x + 200$ . . . . 1 točka
   zapisana neenačba $4x + 100 > 3x + 200$ . . . . 1 točka
   Reševanje neenačbe . . . . 1 točka
   Rešitev neenačbe $x > 100$ . . . . 1 točka
   Odgovor: Prevoziti morata najmanj 101 kilometer. . . . . 1 točka

3. Potence z negativnim eksponentom v oklepajih zapišemo z ulomki $(x-1)\left((\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x})(\frac{1}{x}-1)-(\frac{1}{x^2}-1)(\frac{1}{x^2}+1)\right)^{-1}$. Vsote oziroma razlike razširimo na skupni imenovalec $(x-1)\left((\frac{1+x+x^2}{x^3})(\frac{1-x}{x})-(\frac{1-x^2}{x^2})(\frac{1+x^2}{x^2})\right)^{-1}$, opravimo množenje $(x-1)\left(\frac{1+x+x^2-x-x^2-x^3}{x^4}-\frac{1-x^4}{x^4}\right)^{-1}$. Dobljena ulomka v oklepaju odštejemo $(x-1)(\frac{x^4-x^3}{x^4})^{-1}$. Zapišemo obratno vrednost $(x-1)(\frac{x^4}{x^3(x-1)})$, okrajšamo in dobimo rezultat x.

Zapis potenc z ulomki $(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x})(\frac{1}{x}-1)-(\frac{1}{x^2}-1)(\frac{1}{x^2}+1)$ .... 1 točka
Razširitev ulomkov na skupni imenovalec $(\frac{1+x+x^2}{x^3})(\frac{1-x}{x})-(\frac{1-x^2}{x^2})(\frac{1+x^2}{x^2})$ .... 1 točka
Opravljeno množenje $\frac{1+x+x^2-x-x^2-x^3}{x^4}-\frac{1-x^4}{x^4}$ .... 1 točka
Opravljeno odštevanje $\frac{x^4-x^3}{x^4}$ .... 1 točka
Zapisan obratni ulomek $\frac{x^4}{x^3(x-1)}$ .... 1 točka
Rezultat x .... 1 točka

4. Naj bo x začetni znesek Aleša, y začetni znesek Lovra in z začetni znesek Mira. Tabeliramo časovni potek spreminjanja količine denarja pri posameznikih:

Igra	**Miro**	**Aleš**	**Lovro**
pred igro	x	y	z
po 1. igri	$x-y-z$	$2y$	$2z$
po 2. igri	$2x-2y-2z$	$2y-(x-y-z)-2z=$ $=-x+3y-z$	$4z$
po 3. igri	$4x-4y-4z$	$-2x+6y-2z$	$4x-(2x-2y-2z)-(-x+3y-z)=$ $=-x-y+7z$

Zapišemo sistem enačb:

$4x-4y-4z=24$
$-2x+6y-2z=24$
$-x-y+7z=24,$

ki ga rešimo. Rešitev je $x=39, y=21$ in $z=12$. Ugotovimo, da je največ izgubil Miro in sicer 15 evrov.

Zapisan sistem enačb .... 2 točki
Reševanje sistema .... 1 točka
Rešitev sistema $x=39, y=21$ in $z=12$ .... 2 točki
Zapisan odgovor .... 1 točka

OPOMBA: Tekmovalec dobi 1 točko, če napiše dve enačbi sistema in 0 točk, če napiše le eno enačbo sistema.
Tekmovalec dobi 1 točko za pravilni dve rešitvi in 0 točk, če je pravilna samo ena rešitev.

5. Zapišemo zvezo 315+40% od 315 in izračunamo, da je to 441. Upoštevamo pridelek v 1. sadovnjaku $x+\frac{25}{100}x=x+\frac{x}{4}=\frac{5x}{4}$, ter pridelek v drugem sadovnjaku $(315-x)+\frac{50}{100}(315-x)=472,5-1,5x$. Seštejemo pridelek v obeh sadovnajkih $\frac{5x}{4}+472,5-1,5x=441$. Rešimo enačbo in dobimo rešitev $x=126$. V prvem sadovnjaku je zraslo 126 ton sadja, v drugem pa 189 ton.

Izračun $315+40\%$ od $315=441$ .... 1 točka
Izračun za 1. sadovnjak $x+\frac{25}{100}x=x+\frac{x}{4}=\frac{5x}{4}$ .... 1 točka
Izračun za 2. sadovnjak $(315-x)+\frac{50}{100}(315-x)=472,5-1,5x$ .... 1 točka

Zapis enačbe $\frac{5x}{4} + 472,5 - 1,5x = 441$ . . . . 1 točka
Rešitev $x = 126$ . . . . 1 točka
Odgovor . . . . 1 točka

Drugi letnik

1. I. način:
   Ugotovimo, da poraba goriva predstavlja linearno funkcijo odvisno od prevoženih kilometrov $f(x)=k\cdot x$. Izračunamo $k=\frac{39{,}3-17{,}2}{36149-35824}=\frac{22{,}1}{325}=6,8$ litrov na 100 kilometrov. Za nadaljnih 300 kilometrov potrebuje $f(300)=0{,}068\cdot 300=20{,}4\ \ell$. Seštejemo $39,3+20,4+5,3=65\ \ell$.

   Ugotovitev linearne odvisnosti .... 1 točka
   Izračun $k=\frac{39{,}3-17{,}2}{36149-35824}=\frac{22{,}1}{325}=6,8$ .... 2 točki
   Izračun porabe goriva za 300 km $f(300)=0,068\cdot 300=20,4\ \ell$ .... 1 točka
   Izračun prostornine rezervoarja $39,3+20,4+5,3=65\ \ell$ .... 1 točka
   Odgovor .... 1 točka

   II. način:
   Upoštevamo premo sorazmerje.

začetna količina x	$x-17,2$	$x-39,3$	$5,3$
stanje km	35824	36149	36449

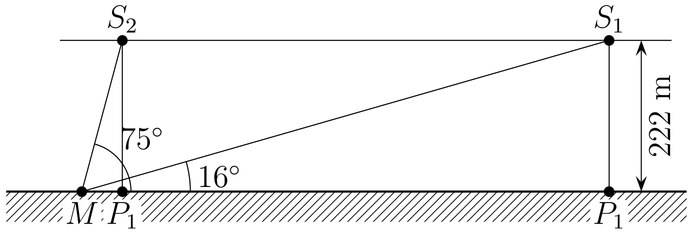
   Zapišemo sklepni račun $\begin{array}{l} 22,1\cdots\cdots\cdots 325 \\ x-44,6\cdots\cdots 300 \end{array}$
   Izračunamo $x=65\ \ell$.

   Ugotovitev preme sorazmernosti .... 1 točka
   Zapis tabele .... 2 točki
   Zapis sklepnega računa .... 1 točka
   Izračun $x=65\ \ell$ .... 1 točka
   Odgovor .... 1 točka

2. Upoštevamo, da je $n=\frac{5}{2}$ in $f(2)=0$, kar vstavimo v predpis za linearno funkcijo $f(x)=k\cdot x+n$. Dobimo $k\cdot 2+\frac{5}{2}=0$ n izračunamo $k=-\frac{5}{4}$. Upoštevamo lastnost vzporednih premic, torej da imata enak smerni koeficint. Enačba premice je $y=-\frac{5}{4}x+n_1$. Upoštevamo, da leži na tej premici točka $M(\frac{4}{3},0)$ in izračunamo $n_1=\frac{5}{3}$. Enačbo premice $y=-\frac{5}{4}x+\frac{5}{3}$ zapišemo še v implicitni obliki $15x+12y-20=0$ ali njej ekvivalentni.

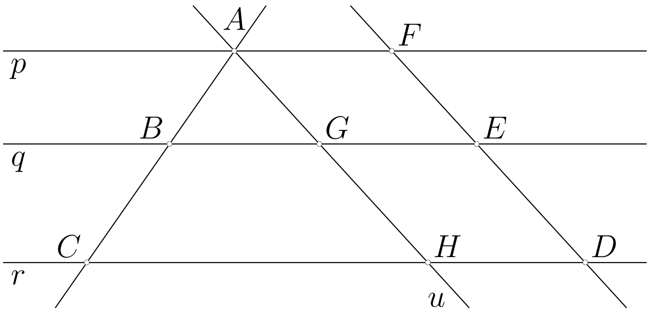
   Zapis $k\cdot 2+\frac{5}{2}=0$ .... 1 točka
   Izračun $k=-\frac{5}{4}$ .... 1 točka
   Upoštevanje enakosti smernih koeficientov $y=-\frac{5}{4}x+n_1$ .... 1 točka
   Določitev točke $M(\frac{4}{3},0)$ .... 1 točka
   Zapis enačbe $y=-\frac{5}{4}x+\frac{5}{3}$ ali izračun $n_1=\frac{5}{3}$ .... 1 točka
   Zapis implicitne oblike $15x+12y-20=0$ .... 1 točka

3. Skico dopolnimo tako, da vrišemo navpičnico, da dobimo pravokotni trikotnik.



Uporabimo kotne funkcije za ostra kota $16°$ in $75°$ in sicer $\tan 16° = \frac{|P_1S_1|}{|MP_1|}$ ter $\tan 75° = \frac{|P_1S_2|}{|MP_2|}$. Iz prve zveze izračunamo $|MP_1| = \frac{222}{\tan 6°} \doteq 774{,}2$ m, iz druge pa $|MP_2| = \frac{222}{\tan 75°} \doteq 59{,}5$ m. Glede na oznake na skici, upoštevamo da je $|S_1S_2| = |P_1P_2| = |MP_2| - |MP_1| \doteq 714{,}7$ m.

Dopolnjena skica, ki omogoča uporabo kotnih funkcij .... 1 točka
Uporaba $\tan 16° = \frac{|P_1S_1|}{|MP_1|}$ .... 1 točka
Izračun $|PG| = \frac{222}{\tan 16°} = 774,2$ m .... 1 točka
Uporaba $\tan 75° = \frac{|P_1S_2|}{|MP_2|}$ .... 1 točka
Izračun $|MP_2| = \frac{222}{\tan 75°} \doteq 59{,}5$ m .... 1 točka
Izračun razdalje $|S_1S_2| = |MP_2| - |MP_1| \doteq 714{,}7$ m .... 1 točka



4. Ugotovimo, da sta trikotnika ABG in ACH podobna in velja $|AG| = |FE|$ ter $|GH| = |ED|$. Upoštevamo, da je razmerje istoležnih stranic konstantno $|AG| : |AB| = |AH| : |AC|$. Iz tega izračunamo $|AC| = \frac{|AB| \cdot |AH|}{|AG|} = \frac{3 \cdot \frac{91}{12}}{\frac{10}{3}} = 6\frac{33}{40}$.

Dopolnitev skice npr s premico u .... 1 točka
Ugotovitev ali upoštevanje, da sta trikotnika ABG in ACH podobna .... 1 točka
Zapis ali upoštevanje $|AG| = |FE|$ ter $|GH| = |ED|$ .... 1 točka

Zapis ustreznega sorazmerja $|AG| : |AB| = |AH| : |AC|$ .... 1 točka

Izražen $|AH| = |AG| + |GH| = 3\frac{1}{3} + 4\frac{1}{4} = 7\frac{7}{12}$ .... 1 točka
Izračun $|AC| = \frac{|AB| \cdot |AH|}{|AG|} = \frac{3 \cdot \frac{91}{12}}{\frac{10}{3}} = 6\frac{33}{40}$ .... 1 točka

5. Računati začnemo od spodaj navzdor. Poenostavimo $2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{8-4\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{4(2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 4$. Nadaljujemo $\frac{2}{2-\sqrt{3}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Nato uredimo $\sqrt{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$. Izračunamo $\frac{1}{\frac{2\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}-1}$. Racionaliziramo še imenovalec ulomka $\frac{2}{2\sqrt{3}-1} \cdot \frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}+1} = \frac{4\sqrt{3}+2}{11}$.

Izračun $2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{8-4\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{4(2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 4$ .... 1 točka
Izračun $\frac{2}{2-\sqrt{3}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .... 1 točka
Izračun $\sqrt{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ .... 1 točka
Izračun $\frac{1}{\frac{2\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}-1}$ .... 1 točka
Racionalizacija imenovalca .... 1 točka
Rezultat $\frac{4\sqrt{3}+2}{11}$ .... 1 točka

Tretji letnik

1. Upoštevamo smiselno zvezo med diagonalama $e-f=14$ ali $e=14+f$. Uporabimo obrazec za ploščino romba $\frac{e \cdot f}{2}=120$. Vstavimo e in dobimo kvadratno enačbo $f^2+14f-240=0$. Enačbo rešimo. Dobimo rešitvi $f_1=10$ in $f_2=-24$, ki pa ni ustrezna. Dolžino stranice a izračunamo z uporabo Pitagorovega izreka $a^2=(\frac{e}{2})^2+(\frac{f}{2})^2$. Izračunamo $a=13$.

Zapis $e-f=14$ ali $e=14+f$ .... 1 točka
Uporaba obrazca za ploščino romba .... 1 točka
Zapis kvadratne enačbe $f^2+14f-240=0$ .... 1 točka
Rešitev enačbe $f_1=10$ in $f_2=-24$ .... 1 točka
Izločitev $f_2=-24$ .... 1 točka
Izračun stranice $a=13$ .... 1 točka

2. **a)** Vstavimo vrednost $x=15$ in izračunamo $h(15)=-0,0126\cdot 15^2+0,635\cdot 15 \doteq 6,69$ m.

   b) Nastavimo enačbo $h(x)=0$. Izračunamo rešitvi $x=0$ in $x=50,4$ m ter izločimo $x=0$.

   c) Ugotovimo, da je najvišja višina žoge enaka ordinati temena parabole. Izračunamo $p=-\frac{b}{2a}=2,52$ ter nato izračunamo še $q=h(p)=-0,0126\cdot 25,2^2+0,635\cdot 25,2=8$.

Vstavitev $x=15$ v $h(15)=-0,0126\cdot 15^2+0,635\cdot 15$ .... 1 točka
Izračun $h(15)\doteq 6,69$ m .... 1 točka
Zapis enačbe $h(x)=0$ .... 1 točka
Rešitvi $x=50,4$ m ter $x=0$, ki jo izločimo .... 1 točka
Ugotovitev najvišje višine .... 1 točka
Izračun $h_{max}=q=8$ m .... 1 točka

3. Ugotovimo, da je $e^0=1$. Poenostavimo tudi korenjenec $\sqrt{(5^0+4^2)^2}=\sqrt{(17)^2}=17$. Uporabimo zvezo $1=\log_4 4$ in dobimo $1+\log_4(3^x-17)=4$. Uredimo $\log_4(3^x-17)=3$. Uporabimo definicijo logaritma $64=3^x-17$. Poenostavimo $3^x=81$. Rešimo in izračunamo $x=4$.

Izračun $e^0=1$ .... 1 točka
Izračun $\sqrt{(5^0+4^2)^2}=\sqrt{(17)^2}=17$ .... 1 točka
Uporabe definicije logaritma $1+\log_4(3^x-17)=4$ 1točka
Ureditev enačbe $64=3^x-1764=3^x-17$ .... 1 točka
Ureditev eksponentne enačbe $3^x=81$ .... 1 točka
Rešitev $x=4$ .... 1 točka

4. Nastavimo enačbe $4\cdot 2^t+2^{t+3}=a\cdot 2^{t+2}$. Enačbo uredimo, tako da izpostavimo skupni faktor $2^t(4+8-4a)=0$. Ugotovimo, da je $2^t\neq 0$. Tako je $4+8-4a=0$. Izračunamo $a=3$.

Nastavitev enačbe $4\cdot 2^t+2^{t+3}=a\cdot 2^{t+2}$ .... 2 točki
Ureditev enačbe $2^t(4+8-4a)=0$ .... 1 točka
Ugotovitev $2^t\neq 0$ .... 1 točka

Ugotovitev $4 + 8 - 4a = 0$ .... 1 točka
Izračun $a = 3$ .... 1 točka

5. Uporabimo obrazec za površino kocke $P = 6a^2$in iz nje izračunamo dolžino roba $a = 2\sqrt{3}$ cm. Nato izračunamo dolžino telesne diagonale kocke $D = a\sqrt{3} = 6$ cm ter prostornino kocke $V = a^3 = (2\sqrt{3})^2 = 24\sqrt{3}$ cm^3. Upoštevamo, da sta prostornini kocke in piramide enaki $24\sqrt{3} = \frac{2^2 \cdot v}{3}$. Izračunamo višino piramide $v = 18\sqrt{3}$ cm.

   Izračun $a = 2\sqrt{3}$ cm .... 1 točka
   Izračun telesne diagonale $D = a\sqrt{3} = 6$ cm .... 1 točka
   Izračun prostornine kocke $V = a^3 = (2\sqrt{3})^2 = 24\sqrt{3}$ cm^3 .... 1 točka
   Upoštevanje enakosti prostornini kocke in piramide .... 1 točka
   Zapis zveze $24\sqrt{3} = \frac{2^2 \cdot v}{3}$ .... 1 točka
   Izračun višine piramide $v = 18\sqrt{3}$ cm .... 1 točka

Četrti letnik

1. Izberemo spremenljivke a je dolžina, b je širina in c je globina. Nastavimo sistem enačb $12a = c, a = \frac{3b}{2}$ in $abc + ab = \frac{7}{6}$. Sistem uredimo in dobimo $48a^3 + 4a^2 - 7 = 0$. Rešimo enačbo tretje stopnje z uporabo Hornerjevega algoritma. Zapišemo rešitve $a = \frac{1}{2}$ $b = \frac{1}{3}$ in $c = 6$.

   Zapis enačbe $12a = c$ in $a = \frac{3b}{2}$ .... 1 točka
   Zapis enačbe $abc + ab = \frac{7}{6}$ .... 1 točka
   Ureditev enačbe do $48a^3 + 4a^2 - 7 = 0$ .... $1 + 1^*$ točka
   Rešitev $a = \frac{1}{2}$ .... 1 točka
   Izračun $b = \frac{1}{3}$ in $c = 6$ .... 1 točka

2. Ugotovimo, da mora biti logaritmand $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x}$ večji od 0. Zapišemo neneačbo $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x} > 0$. Neenačbo uredimo $\frac{x^2-x-2}{x(x+2)} > 0$. Določimo ničle $x_1 = 2$ in $x_2 = -1$ in pole $x_1 = 0$ in $x_2 = -2$. Na številski premici določimo predznake in odčitamo rešitev $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (2, \infty)$.

   Zapis neenačbe $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x} > 0$ .... 1 točka
   Ureditev neenačbe $\frac{x^2-x-2}{x(x+2)} > 0$ .... 1 točka
   Izračun ali upoštevani ničli $x_1 = 2$ in $x_2 = -1$ .... 1 točka
   Izračunan ali upoštevana pola $x_1 = 0$ in $x_2 = -2$ .... 1 točka
   Označeni predznaki na številski premici ali narisan graf .... 1 točka
   Zapis rešitve $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (2, \infty)$ .... 1 točka

3. Upoštevamo lastnosti geometrijskega zaporedja $8 \cdot q = x$ in $x \cdot q = 18$. Zapišemo zvezo $8q^2 = 18$ in izračunamo količnik $q = \frac{3}{2}$. Nato izračunamo polmer srednje krogle $r_2 = 12$ dm. Izračunamo prostornino snežaka $V = (\frac{4}{3}\pi(8^3 + 12^3 + 18^3)$, ki je $33,8119$ m^3.

   Uporaba lastnosti geometrijskega zaporedja $r_3 = r_1 \cdot q^2$ ali $8 \cdot q = x$ in $x \cdot q = 18$ ... 1 točka
   Zapis enačbe $8q^2 = 18$ .... 1 točka
   Izračun $q = \frac{3}{2}$ .... 1 točka
   Izračun polmera druge krogle $r_2 = 12$ dm .... 1 točka
   Izračun prostornine snežaka $V = (\frac{4}{3}\pi(8^3 + 12^3 + 18^3) = 33,8119$ m^3 .... 2 točki
   OPOMBA: Za uporabo formule za prostornino krogle 1 točka

4. Uporabimo zvezo za prehod na oster kot $\cos(\pi + 2x) = -\cos 2x$, nato še zvezo za dvojne kote $-\cos 2x = -\cos^2 x + \sin^2 x$. Uporabimo zvezo za $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Izraz uredimo, vstavimo $\cos x = \frac{1}{4}$. Dobimo $1 - 2\cos^2 x = 1 - 2 \cdot (\frac{1}{4})^2$. Izračunamo vrednost izraza $\frac{7}{8}$.

   Uporaba prehoda na oster kot $\cos(\pi + 2x) = -\cos 2x$ .... 1 točka
   Uporaba zveze za dvojni kot $-\cos 2x = -\cos^2 x + \sin^2 x$ .... 1 točka
   Uporaba zveze $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ .... 1 točka
   Ureditev izraza $= 1 - \cos^2 x$ .... 1 točka
   Vstavljanje $= 1 - 2 \cdot (\frac{1}{4})^2$ .... 1 točka
   Rezultat $\frac{7}{8}$ .... 1 točka

5. Vsota reletivnih frekvenc mora 100%. Tako izračunamo $f_6 = 6,5$. Za grupirane podatke se aritmetična sredina izračuna z obrazcem $\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 \ldots f_f \cdot x_k}{N}$. Vrednosti x so sre-

dine razredov in jih dobimo kot povprečje zgornje in spodnje meje razreda $x_i = \frac{s_i+z_i}{2}$. Ker za relativne frekvence velja $f_i^0 = \frac{f_i}{N} \cdot 100$, lahko aritmetično sredino izračunamo kot $\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1}{N} + \frac{f_2 \cdot x_2}{N} + \ldots = \frac{f_1 \cdot x_1}{100} + \frac{f_2 \cdot x_2}{100} + \ldots$. Vstavimo naše podatke in dobimo $\bar{x} = 131,4$ minute.

Izračun relativne frekvence $f_6 = 6,5$ .... 1 točka

Izračun sredine razredov

$97,5$	$112,5$	$127,5$	$142,5$	157.5	$172,5$

.... 1 točka

Zapis ali uporaba obrazca $\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 \ldots f_f \cdot x_k}{N}$ .... 1 točka

Ugotovitev ali uporaba $\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1}{100} + \frac{f_2 \cdot x_2}{100} + \ldots \frac{f_6 \cdot x_6}{100}$ .... 1 točka

Vstavitev podatkov .... 1 točka

Izračun $\bar{x} = 131,4$ minute .... 1 točka