**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

dMFA

11. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Državno tekmovanje, 16. april 2011

Prilepi nalepko s šifro

N1	N2	N3	N4	N5

Naloge za 1. letnik

1. Brata Anže in Uroš imata skupno 312 evrov. Če bi Anže dal Urošu $4\ \%$ svojega zneska, bi imel Uroš 4-krat tolikšen znesek kot Anže. Izračunaj zneska, ki ga imata Anže in Uroš.

   (7 točk)

2. Poenostavi izraz $\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-1\right) : \left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\right)$ ter izračunaj njegovo natančno vrednost za $x=\sqrt{33}$ in $y=\sqrt{77}$.

   (6 točk)

3. Vsota števk trimestnega števila je 18. Prva števka je enaka osmini števila, ki ga tvorita ostali dve števki, zadnja pa je enaka osmini števila, ki ga tvorita prvi dve števki. Izračunaj to število.

   (8 točk)

4. Izračunaj, za katere vrednosti x je vrednost izraza $2(x-1)^2+4$ vsaj toliko, kot je vrednost izraza $(x-1)(x+2)+x(x-3)$.

   (6 točk)

5. Janez, Marjeta in Tine so zbirali stari papir, za kar so dobili denarno nagrado. Prvotno naj bi bila nagrada razdeljena v razmerju $7:6:5$. Kasneje so dogovor spremenili in so nagrado razdelili v razmerju $6:5:4$.

   a) Katera od obeh delitev je za Tineta ugodnejša? Odgovor utemelji.

   b) Janez je dobil pri drugi delitvi 120 evrov več kot Marjeta. Koliko evrov je dobil vsak izmed njih?

   (7 točk)

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

11. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 16. april 2011

Prilepi nalepko s šifro

N1	N2	N3	N4	N5

Naloge za 2. letnik

1. Zapiši enačbo premice, ki je vzporedna premici $y = 3 - \frac{x}{2}$ in s koordinatnimi osmi tvori trikotnik s ploščino 49.

   (8 točk)

2. Ob poplavi nam je voda zalila sobo v kleti, zato smo vključili vodno črpalko, ki prečrpa 180 litrov vode na minuto. Soba je dolga$3{,}7$ m, široka $2{,}3$ m, višina vode v sobi pa je bila $1,2$ m.

   a) Zapiši, kako se je količina vode v sobi ob prečrpavanju spreminjala, kot funkcijo časa.

   b) Zapiši, v kolikšnem času je bila iz sobe izčrpana vsa voda. Rezultat naj bo v minutah in sekundah.

   (6 točk)

3. Pošči točko $T(x, y)$ na abscisni osi, ki je enako oddaljena od točk $A(1, 4)$ in $B(7, 2)$ ter natančno izračunaj dolžino višine trikotnika ATB na stranico AB.

   (7 točk)

4. Okrajšaj ulomek $\dfrac{a^{2x+2} + a^{2x+1} - 16a^{2x} - 16a^{2x-1}}{a^{2x+1} + 5a^{2x} + 4a^{2x-1}}$.

   (7 točk)

5. Poenostavi $\left((\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - \left(\dfrac{\sqrt{x}^3 - \sqrt{y}^3}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}\right)\right)(\sqrt{xy})^{-1}$.

   (6 točk)

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

dMFA

11. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Državno tekmovanje, 16. april 2011

Prilepi nalepko s šifro

N1	N2	N3	N4	N5

Naloge za 3. letnik

1. Minko in Binko se pripravljata na atletsko tekmovanje, zato trenirata na zemljišču oblike paralelograma z oglišči $ABCD$ s podatki $S = 28\sqrt{3}$ km^2, $\beta = 120°$, $a + b = 15$ km. Minko mora preteči razdaljo med točkama A in C, Binko pa med točkama B in D. Za koliko km je Minkova pot daljša?

(6 točk)

2. Dve kmetici sta prinesli na tržnico skupaj 100 jajc. Imeli sta različno število jajc, vendar sta zanje dobili enako vsoto denarja. Prva je rekla drugi: "Če bi jaz imela tvoja jajca, bi zanje dobila 15 evrov."Druga ji je odgovorila: "Če bi jaz prodajala tvoja jajca, bi dobila zanje $6\frac{2}{3}$ evrov."Koliko jajc je imela vsaka?

(7 točk)

3. Pravilna štiristrana prizma ima površino 2520 cm^2. Če bi bila ta prizma za 3 cm nižja, bi bila njena površina enaka 2304 cm^2. Kolikšna bi bila tedaj njena prostornina?

(8 točk)

4. Reši enačbo $\frac{1}{3}\log(271 + 3^{\sqrt{2}x}) = 2 - \log 10$. Rezultat naj bo natančen in racionaliziran.

(7 točk)

5. Ali je vsota kvadratov treh zaporednih celih števil lahko enaka kvadratu kakšnega celega števila? Odgovor utemelji.

(6 točk)

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

dMFA

11. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 16. april 2011

Prilepi nalepko s šifro

N1	N2	N3	N4	N5

Naloge za 4. letnik

1. Zapiši enačbo premice, ki gre skozi negativno ničlo polinoma $p(x) = -x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x$ in presečišče njegovega grafa z navpičnico, ki je oddaljena od ordinatne osi dve enoti v levo.

   (7 točk)

2. V funkciji $f(x) = \dfrac{x^2 + a}{x^2 + b}$ je konstanta a enaka abscisi, b pa ordinati točke M, v kateri doseže funkcija $g(x) = 2x^2 + 12x + 19$ najmanjšo vrednost. Določi konstanti a in b ter nariši graf funkcije $f(x)$.

   (7 točk)

3. Premica $3x - y - 6 = 0$ je tangenta krožnice, katere središče je v točki $C(6, 2)$. Izračunaj polmer te krožnice. Rezultat naj bo točen.

   (8 točk)

4. Podjetje AMBICIOZNI je naredilo načrt proizvodnje za leto 2011 in nekaj naslednjih let. Načrtujejo, da bo proizvodnja vsako naslednje leto dvakrat tolikšna kot predhodno leto. Proizvodnja v zadnjem letu načrtovalnega obdobja bo 320 ton, skupna proizvodnja v teh letih pa bo znašala 630 ton. Kolikšna bo proizvodnja leta 2011? Koliko let vnaprej načrtujejo?

   (6 točk)

5. Vsota členov aritmetičnega zaporedja brez zadnjega člena je 77, vsota členov istega zaporedja brez prvega člena pa je 119. Vsota prvega in zadnjega člena je 14. Določi prvi člen, diferenco in število členov.

   (6 točk)

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

11. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 16. april 2011

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, tako rešitev točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

1. Upoštevamo, da imata brata skupaj $x+y=312$ evrov. Iz besedila naloge zapišemo enačbo $(x-\frac{4}{100}x)\cdot 4=y+\frac{4}{100}x$. V enačbi odpravimo oklepaje $4x-\frac{4}{25}x=312-x+\frac{1}{25}$ in jo uredimo $96x+24x=7800$. Izračunamo $x=65$. Nato izračunamo še $y=247$. Zapišemo odgovor: Anže je imel 65 evrov, Uroš pa 247 evrov.

   Zapis zveze $x+y=312$ ali $x=312-y$ .... 1 točka
   Zapis enačbe $(x-\frac{4}{100}x)\cdot 4=y+\frac{4}{100}x$ .... 1 + 1 točka
   Ureditev enačbe npr. $4x-\frac{4}{25}x=312-x+\frac{1}{25}$ v $96x+24x=7800$ .... 1 točka
   Izračun $x=65$ in $y=247$ .... 1 + 1 točka
   Odgovor .... 1 točka

2. Uredimo izraza v okepajih oziroma razširimo ulomke na skupna imenovalca: prvi oklepaj $\frac{x^4+y^4-x^2y^2}{x^2y^2}$ in drugi oklepaj $\frac{x^6+y^6}{x^3y^3}$. Preoblikujemo izraz iz deljenja v množenje. Uporabimo obrazec za vsoto kubov in razstavimo drugi imenovelec $x^6+y^6=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$. Okrajšamo ulomka ter v poenosavljen izraz $\frac{xy}{x^2+y^2}$ vstavimo vrednosti za x in y. Delno korenimo števec $\sqrt{33\cdot 77}=11\sqrt{21}$, okrajšamo ulomek in dobimo rezultat $\frac{\sqrt{21}}{10}$.

   Poenostavitev prvega oklepaja $\frac{x^4+y^4-x^2y^2}{x^2y^2}$ .... 1 točka
   Poenostavitev drugega oklepaja $\frac{x^6+y^6}{x^3y^3}$ .... 1 točka
   Uporaba obrazca a^3+b^3 in zapis $\frac{x^6+y^6}{x^3y^3}$ .... 1 točka
   Poenostavljen izraz $\frac{xy}{x^2+y^2}$ .... 1 točka
   Vstavljena x in y .... 1 točka

Rezultat $\frac{\sqrt{21}}{10}$ .... 1 točka

3. Števke označimo npr. z a, b, c. Po besedilu naloge zapišemo prvo zvezo $a+b+c=18$, drugo $a=\frac{1}{8}(10b+c)$ in tretjo $c=\frac{1}{8}(10a+b)$. Enačbe uredimo in dobimo sistem treh enačb s tremi neznankami:
$a+b+c=18$,
$8a-10b-c=0$,
$-10a-b+8c=0$.
Rešitve sistema so $a=6, b=4$ in $c=8$. Iskano število je 648.

Zapis enačb $a+b+c=18$, $a=\frac{1}{8}(10b+c)$ in $c=\frac{1}{8}(10a+b)$ .... $1+1+1$ točka
Reševanje sistema .... 1^* točka
Rešitev sistema $a=6, b=4$ in $c=8$ .... $1+1+1$ točka
Zapis iskanega števila 648 .... 1 točka

4. Nastavimo neenakost $2(x-1)^2+4 \geq (x-1)(x+2)+x(x-3)$. Odpravimo oklepaje $2(x^2-2x+1)+4 \geq x^2+x-2+x^2-3x$ in neenakost uredimo $2x^2-4x+2+4 \geq 2x^2-2x-2$. Upoštevamo pravila za računanje z neenakostmi in dobimo $-2x \geq -8$. Delimo z -2 in dobimo $x \leq 4$.

Zapis neenačbe $2(x-1)^2+4 \geq (x-1)(x+2)+x(x-3)$ .... 1 točka
Kvadriranje $(x-1)^2 = x^2-2x+1$ .... 1 točka
Množenje $(x-1)(x+2) = x^2+x-2$ .... 1 točka
Množenje $x(x-3) = x^2-3x$ .... 1 točka
Ureditev neenačbe $-2x \geq -8$ .... 1 točka
Rešitev $x \leq 4$ .... 1 točka

5. Sklepamo, da je skupna nagrada x prvotno sestavljena iz 18 delov, druga delitev pa iz 15 delov. Prvotno dobi Janez $\frac{7}{18}x$, Marjeta $\frac{6}{18}x$ in Tine $\frac{5}{18}x$. Po drugi delitvi dobi Janez $\frac{6}{15}x$, Marjeta $\frac{5}{15}x$ in Tine $\frac{4}{15}x$. Števila uredimo po velikosti, npr. razširimo na skupni imenovalec: prva delitev $\frac{35}{90}x, \frac{30}{90}x, \frac{25}{90}x$ in druga delitev $\frac{36}{90}x, \frac{30}{90}x, \frac{24}{90}x$. Ugotovimo, da Tine dobi več pri prvi delitvi. Za drugi del naloge nastavimo zvezo $\frac{36}{90}x = \frac{30}{90}x + 120$. Rešitev enačbe je $x = 1800$ evrov. Janez bobi 720 evrov, Marjeta 600 evrov, Tune pa 480 evrov.

Zapis deležev po prvi delitvi za Janeza $\frac{7}{18}x$, Marjeto $\frac{6}{18}x$ in Tineta $\frac{5}{18}x$ .... 1 točka
Zapis deležev po drugi delitvi za Janeza $\frac{6}{15}x$,Marjeto $\frac{5}{15}x$ in Tineta $\frac{4}{15}x$ .... 1 točka
Ureditev po velikosti prva delitev: $\frac{35}{90}x, \frac{30}{90}x, \frac{25}{90}x$ in druga delitev $\frac{36}{90}x, \frac{30}{90}x, \frac{24}{90}x$ ...... 1 točka
Zapis odgovora: Tine dobi več pri prvi delitvi .... 1 točka
Zapis enačbe $\frac{36}{90}x = \frac{30}{90}x + 120$ .... 1 točka
Rešitev $x = 1800$ evrov .... 1 točka
Odgovor:Janez dobi 720 evrov, Marjeta 600 evrov, Tine pa 480 evrov .... 1 točka

Drugi letnik

1. Vzporedne premice imajo enak smerni koeficient $k=-\frac{1}{2}$ Če uporabimo odsekovno obliko enačbe premice $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$, je ploščina enaka $S=\frac{|m \cdot n|}{2}$. Iz odsekovne oblike preoblikujemo v

eksplicitno in dobimo $y = -\frac{n}{m}x+n$. Torej je $k = -\frac{n}{m} = -\frac{1}{2}$ in $m = 2n$. Upoštevamo ploščino $S = \frac{|m \cdot n|}{2}$ in dobimo $49 = n^2$. Imamo dve možnosti: $n = 7, m = 14$ ali $n = -7, m = -14$. Obstajata dve takšni premici: $\frac{x}{14} + \frac{y}{7} = 1$ in $\frac{x}{-14} + \frac{y}{-7} = 1$.

Ugotovitev $k = -\frac{1}{2}$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba $S = \frac{|m \cdot n|}{2}$ .... 1 točka
Preoblikovanje enačbe premice $y = -\frac{n}{m}x + n$ .... 1 točka
Zapis $k = -\frac{1}{2}$ .... 1 točka
Zapis enačbe $m = 2n$ .... 1 točka
Ugotovitev preme sorazmernosti .... 1 točka
Zapis $\frac{x}{14} + \frac{y}{7} = 1$ .... 1 točka
Zapis $\frac{x}{-14} + \frac{y}{-7} = 1$ .... 1 točka

2. Izračunamo količino vode v kleti $V = 3,7 \cdot 2,3 \cdot 1,2 = 10,212\ \mathrm{m}^3 = 10212\ \mathrm{dm}^3$. Količino vode zapišemo kot funkcijo časa $f(t) = 10212 - 180t$. Vsa voda bo izčrpana, ko bo vrednost funkcije $f(t) = 0$. Rešimo enačbo $10212 - 180t = 0$. Dobimo $t = 56,73$ minut, kar je 56 minut in 44 sekund.

   Izračun volumna $V = 3,7 \cdot 2,3 \cdot 1,2 = 10,212\ \mathrm{m}^3$ .... 1 točka
   Rezultat izražen v dm^3 .... 1 točka
   Zapis funkcije $f(t) = 10212 - 180t$ .... 1 točka
   Zapis enačbe $10212 - 180t = 0$ .... 1 točka
   Izračun časa $t = 56,73$ minut .... 1 točka
   Rezultat 56 minut in 44 sekund .... 1 točka

3. Ker je točka $T(x, y)$ enako oddaljena od točk A in B, zapišemo enakost $d(A, T) = d(B, T)$. Razdaljo med točkama izračunamo po formuli $d(A, T) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Točka T leži na abscisni osi, zato je $T(x, 0)$. Enačimo $\sqrt{(x-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (0-2)^2}$. Enačbo kvadriramo in poenostavimo $12x = 36$. Iz tega dobimo $x = 3$. Točka T ima torej koordinati $T(3, 0)$. Ker je $\triangle ABT$ enakokraki trikotnik, višina razpolavlja osnovnico in je zato višina enaka razdalji med točkama S in T, pri čemer je S razpolovišče stranice AB. Koordinati razpolovišča sta $S(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$. Torej je točka $S(\frac{1+7}{2}, \frac{4+2}{2})$ enaka $(4, 3)$. Razdalja $d(S, T) = \sqrt{10}$.

   Nastavitev enakosti $d(A, T) = d(B, T)$ .... 1 točka
   Zapis točke ali uporaba točke $T(x, 0)$ .... 1 točka
   Kvadriranje enačbe $x^2 - 2x + 1 + 16 = x^2 - 14x + 49 + 4$ .... 1 točka
   Ureditev enačbe $12x = 36$ ali zapisana rešitev $x = 3$ .... 1 točka
   Zapis točke $T(3, 0)$ .... 1 točka
   Izračun točke $S(4, 3)$ .... 1 točka
   Izračunana višina trikotnika $d(S, T) = \sqrt{10}$ .... 1 točka

4. Izpostavimo skupni faktor v števcu $a^{2x-1}(a^3+a^2-16a-16)$ in v imenovalcu $a^{2x-1}(a^2+5a+4)$. Izpostavljena faktorja a^{2x-1} lahko krajšamo. Števec razstavimo z izpostavljanjem skupnega faktorja $a^2(a+1) - 16(a+1) = (a+1)(a^2-16) = (a+1)(a+4)(a-4)$. V imenovalcu razstavimo po Vietovem pravilu $(a+1)(a+4)$. Ulomek okrajšamo in dobimo $a - 4$.

   Izpostavljanje skupnega faktorja v števcu $a^{2x-1}(a^3 + a^2 - 16a - 16)$ .... 1 točka

Izpostavljanje skupnega faktorja v imenovalcu $a^{2x-1}(a^2+5a+4)$ .... 1 točka
Izpostavljanje v števcu $a^2(a+1)-16(a+1)$ .... 1 točka
Rastavljanje števca $(a+1)(a+4)(a-4)$ .... 1 točka
Krajšanje .... 1 točka
Rastavljanje imenovalca $(a+1)(a+4)$ .... 1 točka
Rezultat $a-4$ .... 1 točka

5. Kvadriramo $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x+2\sqrt{xy}+y$ ter razstavimo števec ulomka $\frac{\sqrt{x}^3-\sqrt{y}^3}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. Ulomek krajšamo in dobimo $x+\sqrt{xy}+y$. Poenostavimo oklepaj $x+2\sqrt{xy}+y-(x+\sqrt{xy}+y) = \sqrt{xy}$. Uredimo zapis $(\sqrt{xy})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{xy}}$. Dobimo $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}$, okrajšamo in dobimo 1.

Kvadriranje $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x+2\sqrt{xy}+y$ .... 1 točka
Razstavljanje $\sqrt{x}^3-\sqrt{y}^3 = (\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)$ .... 1 točka
Krajšanje ulomka $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = x+\sqrt{xy}+y$ .... 1 točka
Poenostavitev oklepaja $x+2\sqrt{xy}+y-(x+\sqrt{xy}+y) = \sqrt{xy}$ .... 1 točka
Zapis $(\sqrt{xy})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{xy}}$ .... 1 točka
Izračun $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} = 1$ .... 1 točka

Tretji letnik

1. V obrazec za ploščino paralelograma $S = a\cdot b\cdot \sin\alpha$ vstavimo podatke $28\sqrt{3} = a(15-a)\sin 60^\circ$ uredimo enačbo $a^2-15a+56=0$ in jo rešimo. Dobimo rešitvi $a=7$ km in $b=8$ km. Uporabimo kosinusni izrek za izračun dolžin diagonal: $e^2 = a^2+b^2-2ab\cos\beta$ in $f^2 = a^2+b^2-2ab\cos\alpha$. Izračunamo dolžini obeh diagonal $e=13$ km in $f=7,5$ km. Minkova pot je torej daljša za približno $5,5$ km.

Vstavite podatkov $28\sqrt{3} = a(15-a)\sin 60^\circ$ .... 1 točka
Urejena enačba $a^2-15a+56=0$ .... 1 točka
Izračun $a=7$ km in $b=8$ km .... 1 točka
Zapis ali uporaba kosinusnega izreka $e^2 = a^2+b^2-2ab\cos\beta$
in $f^2 = a^2+b^2-2ab\cos\alpha$ .... 1 točka
Izračun $e=13$ km in $f=7,5$ km .... 1 točka
Odgovor: Minkova pot je torej daljša za približno $5,5$ km. .... 1 točka

2. Če je prva kmetica imela x jajc, potem jih je imela druga $100-x$. Če bi prva kmetica imela $100-x$ jajc, bi dobila zanje 15 evrov. Torej je prodajala svoja jajca po $\frac{15}{(100-x)}$. Če bi druga kmetica imela x jajc, bi dobila zanje $6\frac{2}{3}$ evra. Torej je prodajala svoja jajca po $6\frac{2}{3} : x = \frac{20}{3x}$. Prva kmetica je dobila za svoja jajca $\frac{x\cdot 15}{(100-x)} = \frac{15x}{(100-x)}$, druga pa $(100-x)\cdot\frac{20}{3x} = \frac{20(100-x)}{3x}$. Glede na to, da sta obe dobili enako vsoto denarja, lahko zapišemo enačbo $\frac{15x}{(100-x)} = \frac{20(100-x)}{3x}$. Ko enačbo uredimo, dobimo kvadratno enačbo $x^2+160x-8000=0$, ki ima dve rešitvi, in sicer $x_1=40$ in $x_2=-200$. Ker je negativni x v našem primeru nesmiseln, je rešitev naloge, da je prva kmetica imela 40, druga pa 60 jajc.

Uporaba ali zapis: prva kmetica x jajc, druga $100 - x$ .... 1 točka
Cena enega jajca prve kmetice $\frac{15}{(100-x)}$ in cena enega jajca druge kmetice $\frac{20}{3x}$ .... 1 točka
Zapis enačbe $\frac{15x}{(100-x)} = \frac{20(100-x)}{3x}$ .... 1 točka
Ureditev enačbe do $x^2 + 160x - 8000 = 0$ .... 1 točka
Rešitvi enačbe $x_1 = 40$ in $x_2 = -200$ .... 1 točka
Izločitev druge rešitve .... 1 točka
Odgovor: Prva kmetica je imela 40, druga pa 60 jajc .... 1 točka

3. Pravilna štiristrana prizma ima za osnovno ploskev kvadrat s ploščino $S = a^2$ in obsegom $o = 4a$. Ker je pravilna prizma hkrati pokončna, se njena površina izračuna $P = 2S + o \cdot v$. Razlika površin v obeh primerih je potem $P - P_2 = 2S + o \cdot v - (2S + o \cdot v_2) = o \cdot v - o \cdot v_2 = o(v - v_2)$. Vstavimo dane podatke in dobimo $2520 - 2304 = 4a \cdot 3$, oziroma $216 = 12a$ in $a = 18$ cm. Če sedaj to vstavimo v obrazec za površino ene izmed prizem (npr. prvotno), dobimo $P = 2a^2 + 4a \cdot v$ in $2520 = 2 \cdot 18^2 + 4 \cdot 18 \cdot v$. Iz tega izračunamo, da je višina prvotne prizme 26 cm, višina druge pa 23 cm. Upoštevamo obrazec za izračun prostornine prizme $V = S \cdot v = 18^2 \cdot 23 = 7452$ cm^3.

Zapis ali upoštevanje, da je osnovna ploskev kvadrat s ploščino
$S = a^2$ in obsegom $o = 4a$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba obrazca $P = 2S + o \cdot v$ .... 1 točka
Zapis razlike površin $P - P_2 = o(v - v_2)$ .... 1 točka
Vstavljanje podatkov $2520 - 2304 = 4a \cdot 3$ .... 1 točka
Izračun $a = 18$ cm .... 1 točka
Izračun $v = 26$ cm .... 1 točka
Izračun $v_2 = 23$ cm .... 1 točka
Izračun prostornine $V = S \cdot v = 18^2 \cdot 23 = 7452$ cm^3 .... 1 točka

4. Uporabimo pravila in definicijo logaritmov $\log 10 = 1$, zato je desna stran enačbe enaka 1, dobimo enačbo $\frac{1}{3}\log(271 + 3^{\sqrt{2}x}) = 1$. Enačbo množimo s 3 ali uporabimo pravilo za logaritem potence ter dobimo $\log(271 + 3^{\sqrt{2}x}) = 3$ ali $\log(271 + 3^{\sqrt{2}x})^{\frac{1}{3}} = 1$. Uporabimo definicijo logaritma in po urejanju dobimo $271 + 3^{\sqrt{2}x} = 10^3$. Poračunamo desno stran in preoblikujemo enačbo in dobimo $3^{\sqrt{2}x} = 729$. Dobljeno eksponentno enačbo uredimo $3^{\sqrt{2}x} = 3^6$. Enačimo eksponenta $\sqrt{2}x = 6$. Izrazimo $x = \frac{6}{\sqrt{2}}$, rezultat racionaliziramo $x = 3\sqrt{2}$.

Uporaba $\log 10 = 1$ .... 1 točka
Zapis enakosti $\log(271 + 3^{\sqrt{2}x}) = 1$ .... 1 točka
Poenostavljena enačba $\log(271 + 3^{\sqrt{2}x}) = 3$ ali $\log(271 + 3^{\sqrt{2}x})^{\frac{1}{3}} = 1$ .... 1 točka
Uporaba definicije logaritma $271 + 3^{\sqrt{2}x} = 10^3$ .... 1 točka
Zapis eksponentne enačbe $3^{\sqrt{2}x} = 729$ .... 1 točka
Ureditev enačbe .... 1 točka
Izračunana in preverjena rešitev $x = 3\sqrt{2}$ .... 1 točka

5. Zapišemo tri zaporedna cela števila $x, x+1, x+2$. Zapišemo vsoto njihovih kvadratov $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2$, kvadriramo $x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4$, seštejemo $3x^2 + 6x + 5$. Izračunamo diskriminanto $D = b^2 - 4ac = -24$. Zaključimo, da ne obstaja nobeno realno število, ki bi ustrezalo temu pogoju, saj je $D < 0$.

Zapis zaporednih celih števil $x, x+1, x+2$ .... 1 točka
Zapis vsote $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2$ .... 1 točka
Kvadriranje $x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4$ .... 1 točka
Ureditev vsote $3x^2+6x+5$ .... 1 točka
Izračun $D=b^2-4ac=-24$ .... 1 točka
Ugotovitev:Ker je $D<0$, izraz ne moremo razstaviti oz. ne obstaja realno število, ki bi ustrezalo temu pogoju. .... 1 točka

Četrti letnik

1. Nastavimo enačbo $-x^4+2x^3+x^2-2x=0$, izpostavimo skupni faktor $-x(x^3-2x^2-x+2)=0$, nato razstavimo še štiričlenik in dobimo $-x(x-2)(x-1)(x+1)=0$. Negativna ničla je $x=-1$. Ugotovimo, da je navpičnica, ki je dve enoti oddaljena od ordinatne osi levo, premica $x=-2$. Izračunamo še presečišča grafa polinoma s to premico $x=-2$, tako da izračunamo $p(-2)=-24$. Imamo dve točki iskane premice, ki sta $(-1,0)$ in $(-2,-24)$. Izračunamo $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\frac{-24}{-2+1}=24$. V $y=kx+n$ vstavimo eno izmed točk npr. $(-1,0)$ ter dobimo $y=24x+24$.

   Izpostavljanje skupnega faktorja $-x(x^3-2x^2-x+2)=0$ .... 1 točka
   Razcep štiričlenika $-x(x-2)(x-1)(x+1)=0$ ali uporaba Hornerjevega algoritma1* točka
   Zapis ali uporaba negativne ničle $x=-1$ .... 1 točka
   Ugotovitev, da je $x=-2$ navpičnica .... 1 točka
   Izračun $p(-2)=-24$ .... 1 točka
   Izračun ali upoštevanje $k=24$ .... 1 točka
   Zapis enačbe premice $y=24x+24$ .... 1 točka

2. Upoštevamo, da je a abscisa, b pa ordinata temena kvadratne funkcije. Izračunamo $a=-\frac{b}{2a}=-3$ in $b=-\frac{D}{4a}=1$. Zapišemo funkcijo $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2+1}$. Določimo ničli $x_1=\sqrt{3}$ in $x_2=-\sqrt{3}$, polov ni, asimptota $y=1$ in začetna vrednost $(0,-3)$. Upoštevamo predznake in narišemo graf.

   Izračun $p=-\frac{12}{2\cdot 2}=-3$ .... 1 točka
   Izračun $q=-\frac{-8}{8}=1$ .... 1 točka
   Izračun ničel $x_1=\sqrt{3}$ in $x_2=-\sqrt{3}$ .... 1 točka
   Ugotovitev, da polov ni .... 1 točka
   Zapis asimptote $y=1$ .... 1 točka
   Zapis $f(0)=-3$ ali $(0,-3)$ .... 1 točka
   Narisan graf .... 1 točka

3. Poenostavimo enačbo premice do $y=3x-6$. Zapišemo smerni koeficient $k=3$ in upoštevamo, da je tangenta pravokotna na polmer, kar pomeni, da je smerni koeficient nosilke polmera $k=-\frac{1}{3}$. Upoštevamo, da nosilka polmera poteka skozi središče krožnice $C(6,2)$ in določimo enačbo premice, ki je $y=-\frac{x}{3}+4$. Dotikališče tangente in krožnice je presečišče premic $y=3x-6$ in $y=-\frac{x}{3}+4$. Zapišemo enačbo $3x-6=-\frac{x}{3}+4$. Izračunamo $P(3,3)$. Polmer je razdalja med središčem in dotikališčem tangente na krožnico. Uporabimo obrazec za razdaljo med točkama $d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, vstavimo ustrezne

koordinate in izračunamo $r = \sqrt{10}$.

Izražen $k = 3$ .... 1 točka
Zapis ali upoštevan k normale $k = -\frac{1}{3}$ .... 1 točka
Zapis enačbe nosilke polmera $y = -\frac{x}{3} + 4$ .... 1 točka
Zapis enačbe za izračun presečišča $3x - 6 = -\frac{x}{3} + 4$ .... 1* točka
Rešitev $x = 3$ .... 1 točka
Zapisano ali upoštevano presečišče $(3, 3)$ .... 1 točka
Uporaba enačbe za razdaljo ali vstavitev podatkov .... 1 točka
Izračun razdalje $r = \sqrt{10}$ .... 1 točka

4. Z a_1 označimo količino proizvodnje leta 2010 in z a_n količino proizvodnje v zadnjem načrtovanem letu in s s_n celotno predvideno količino proizvodnje v načrtovanem obdobju. Ker je proizvodnja vsako naslednje leto dvakrat tolikšna kot predhodno leto, je $q = 2$. Potem je $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, zato je $320 = a_1 \cdot 2^{n-1}$. Velja tudi $s_n = \frac{a_1(2^n-1)}{2-1}$, zato je $630 = a_1 \cdot (2^n - 1)$. Iz prve enačbe izrazimo $a_1 = \frac{320}{2^n-1}$ in vstavimo v drugo enačbo $630 = \frac{320}{2^n-1} \cdot (2^{n-1})$. Odpravimo ulomek $2^{n-1} \cdot 630 = 320 \cdot (2^n - 1)$, uredimo enačbo $630 \cdot 2^{n-1} - 320 \cdot 2^n = -320$. Izpostavimo skupni faktor $2^{n-1}(320 \cdot 2 - 630) = 320$, uredimo $2^{n-1} \cdot 10 = 320$, delimo z 10. Dobimo $2^{n-1} = 32$, kar lahko zapišemo $2^{n-1} = 2^5$. Izračunamo $n = 6$. Izračunamo še $a_1 = 10$. Količina proizvodnje v letu 2010 je $a_1 = 10$ ton. Načrt proizvodnje bodo uresničili čez 6 let.

Zapis podatkov $a_n = 320, s_n = 630, q = 2$ .... 1 točka
Zapis enačbe $320 = a_1 \cdot 2^{n-1}$ .... 1 točka
Zapis enačbe $630 = \frac{320}{2^{(n-1)}} \cdot (2^n - 1)$ .... 1 točka
Reševanje sistema .... 1* točka
Rešitev sistema $a_1 = 10$ in $n = 6$ .... 1 točka
Odgovor: Proizvodnja leta 2010 znaša 10 ton, načrt bodo uresničili čez 6 let .... 1 točka
OPOMBA: Polovični odgovor ima 0 točk.

5. Ugotovimo, da je razlika med prvo vsoto in drugo vsoto razlika med a_n in a_1, ki je 42. Nastavimo sistem enačb $a_n - a_1 = 42, a_n + a_1 = 14$ in ga rešimo. Dobimo rešitev $a_n = 28$ in $a_1 = -14$. Izračunamo vsoto $s_n = 119 + a_1 = 105$. Uporabimo obrazec za vsoto $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ in izračunamo $n = 15$. Uporabimo še zvezo za $a_n = a_1 + (n-1)d$ in izračunamo $d = 3$.

Zapis sistema $a_n - a_1 = 42, a_n + a_1 = 14$ .... 1 točka
Izračun $a_n = 28$ .... 1 točka
Izračun $a_1 = -14$ .... 1 točka
Izračun $s_n = 119 + a_1 = 105$ .... 1 točka
Izračun $n = 15$ .... 1 točka
Izračun $d = 3$ .... 1 točka