Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

16. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 16. april 2016

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Sara in Klara imata skupaj 816 evrov. Če bi Sara porabila $\frac{3}{5}$ svojega denarja in Klara $\frac{3}{7}$ svojega denarja, bi obema ostalo enako. Koliko denarja ima Sara?

(**A**) 408 evrov (**B**) 366 evrov (**C**) 336 evrov (**D**) 480 evrov (**E**) 816 evrov

A2. Smetana predstavlja $7~\%$ mase mleka, iz $61~\%$ mase smetane pa nastane maslo. Iz koliko mleka nastane 3 kg masla?

(**A**) manj kot 5 kg (**B**) 17 kg (**C**) 54 kg (**D**) 69 kg (**E**) več kot 70 kg

A3. V katerega izmed navedenih izrazov lahko preoblikujemo izraz $\left(x+y+\frac{1}{4}\right)^2-\left(x+y-\frac{1}{4}\right)^2$?

(**A**) $4xy$ (**B**) $\frac{1}{16}$ (**C**) $\frac{1}{8}$ (**D**) 0 (**E**) $x+y$

B1. Izračunaj, za kateri realni vrednosti parametrov a in b ima ulomek

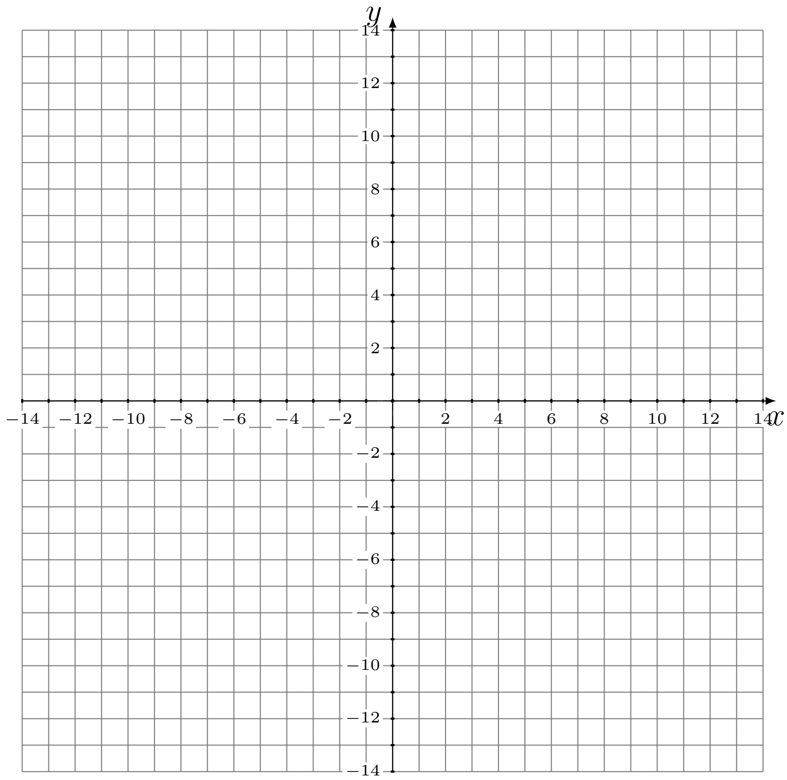
$$\frac{3x-2b}{ax+4b}$$

za $x=1$ vrednost 2, za $x=-\frac{1}{2}$ pa vrednost -1.

(8 točk)

B2. Točke $A(2,-1), B(-1,-5)$ in $C(-3,-13)$ so oglišča trikotnika ABC. Izračunaj dolžino težiščnice na stranico BC. Rezultat naj bo natančen in delno korenjen. Točki A in B prezrcali čez abscisno os. Dobljeni točki označi z A' in B'. Nariši štirikotnik $AA'B'B$ in izračunaj njegovo ploščino.

(8 točk)



B3. Poenostavi izraz

$$\frac{\frac{2xy}{x+y}-x}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x-2y}}+\frac{(x^2-xy+y^2)(x^3-x(x-y)^2)}{x^3+y^3}.$$

Za katere realne vrednosti x in y izraz nima pomena?

(8 točk)

16. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Državno tekmovanje, 16. april 2016

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Katera izmed navedenih enačb premic je enačba simetrale daljice s krajiščema $A(3,-3)$ in $B(2,-2)$?

(A) $y=-x-3$ **(B)** $x+y-1=0$ **(C)** $x-y-5=0$
(D) $3x-2y=0$ **(E)** $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$

A2. Naj bodo a, b in c dolžine stranic trikotnika in naj velja $c^2=a^2+b^2+ab$. Katera izmed navedenih trditev velja za tak trikotnik?

(A) Trikotnik je enakostraničen. **(B)** Trikotnik je ostrokoten.
(C) Višinska točka leži izven trikotnika. **(D)** Trikotnik je pravokoten.
(E) Središče trikotniku očrtane krožnice je razpolovišče najdaljše stranice.

A3. Koliko je vrednost izraza $\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^{2016} \frac{\sqrt{5}-3}{2} \left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)^{2016}$?

(A) 1 **(B)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **(C)** $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ **(D)** $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ **(E)** $\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{2016}+3^{2016}}{8}$

B1. Ali velja

$$\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a+2}\right):\left(\sqrt[3]{a}+\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a+2}\right)=\frac{2(a+1)}{a(a+3)}$$

za vsak realen a razen za $a \neq 0$, $a \neq -2$ in $a \neq -3$? Ugotovitev utemelji.

(8 točk)

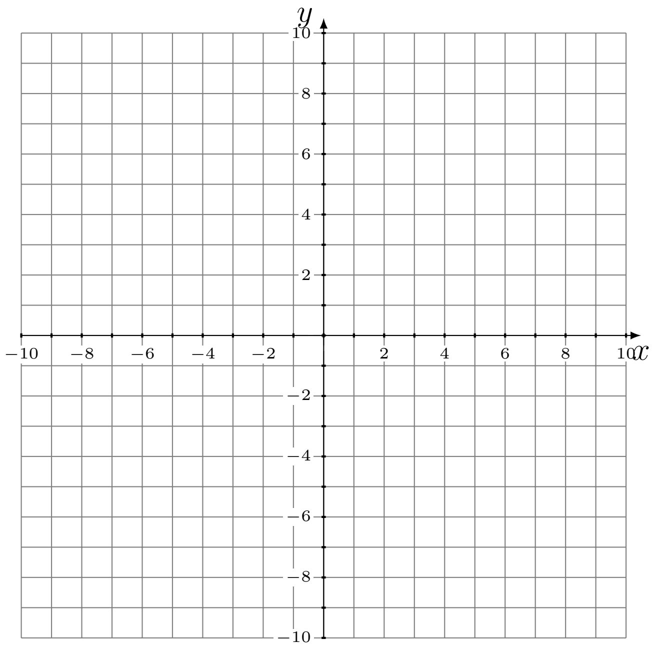
B2. a) Nariši graf funkcije f s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{za} \quad x > 1, \\ -x+5 & \text{za} \quad x \leq 1. \end{cases}$$

(3 točke)

b) Naj bo $g(x) = 2x + 1$. Zapiši vse vrednosti spremenljivke x, za katere velja enakost $g^{-1}(x) = g\left(x^{-1}\right)$?

(5 točk)



B3. Obseg pravokotnika je 4 cm, velikost kota med diagonalama pa $60°$. Nariši skico pravokotnika z označenim kotom med diagonalama. Izračunaj dolžini obeh stranic tega pravokotnika. Rezultat naj bo natančen in zapisan v obliki okrajšanih ulomkov z racionaliziranimi imenovalci. Nalogo reši brez uporabe žepnega računala.

(8 točk)

16. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 16. april 2016

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Ploščina pravilnega šestkotnika je $96\sqrt{3}$ cm^2. Koliko je obseg tega šestkotnika?

(**A**) 48 cm (**B**) 24 cm (**C**) 96 cm (**D**) 16 cm (**E**) 20 cm

A2. Naj bo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^x}}$, $a > 0$ in $a \neq 1$. Koliko je $f(\log_a 4)$?

(**A**) 2 (**B**) $-\frac{1}{2}$ (**C**) $\frac{1}{2}$ (**D**) -4 (**E**) -2

A3. Kocko z robom dolžine a razrežemo na 8 malih skladnih kock. Površino ene take male kocke označimo s P. Koliko je P?

(**A**) $\frac{a^2}{2}$ (**B**) $\frac{3a^2}{4}$ (**C**) $\frac{a^2}{8}$ (**D**) $\frac{3a^2}{2}$ (**E**) a^8

B1. Imamo šotor v obliki stožca, katerega plašč je krožni izsek s polmerom dolžine 3 m in središčnim kotom, ki je velik 120°.

a) Izračunaj višino šotora. Rezultat naj bo natančen.

(5 točk)

b) Osnovna ploskev šotora je iz enakega platna kot plašč. En kvadratni meter tega platna tehta $0{,}16$ kg. Koliko kilogramov tehta platno za osnovno ploskev in plašč šotora? Rezultat zaokroži na eno mesto natančno.

(3 točke)

B2. Naj bo m realno število in $f(x) = (m-2)x^2 - 2mx + 3m$.

a) Izračunaj vrednost parametra m tako, da bo graf funkcije f potekal skozi točko $T(-2, 3)$. Za tako izračunano vrednost parametra m zapiši predpis funkcije f.

(3 točke)

b) Izračunaj, za katero vrednost parametra m graf funkcije f ni parabola. Kaj je v tem primeru graf funkcije f? Za tako izračunano vrednost parametra m zapiši predpisa funkcije f in njene inverzne funkcije f^{-1}.

(5 točk)

B3. Reši sistem enačb:

$$
\begin{aligned}
2\log_3 x - \log_3 y &= 2 - \log_3 2, \\
0{,}2^{\sqrt{2x-y-2{,}5}} &= 1.
\end{aligned}
$$

(8 točk)

16. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 16. april 2016

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Aritmetična sredina dveh pozitivnih števil je 65, njuna geometrijska sredina pa 60. Koliko je absolutna vrednost razlike teh dveh števil?

(**A**) 10 (**B**) 20 (**C**) 30 (**D**) 40 (**E**) 50

A2. Koliko je $1 + 3{,}5 + 6 + 8{,}5 + \ldots + 2501$, če je razlika med zaporednima seštevancema stalna?

(**A**) 1249750 (**B**) 1251000 (**C**) $1251750{,}5$ (**D**) 1252251 (**E**) $1253502{,}5$

A3. Katera izmed navedenih trditev ne velja za funkcijo f s predpisom $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x$?

(**A**) Zaloga vrednosti funkcije f je $[0, 1]$.

(**B**) Osnovna perioda funkcije f je 2π.

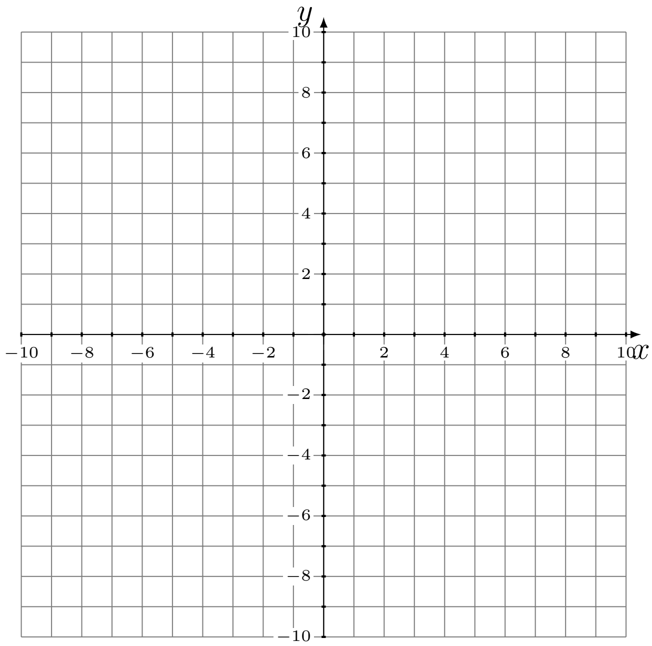
(**C**) Funkcija f je soda.

(**D**) Ničle funkcije f so $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(**E**) Funkcija f doseže največjo vrednost za $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B1. Dana je funkcija f s predpisom $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{x^2+1}$. Izračunaj ničle, pole, enačbo asimptote, koordinate presečišča grafa funkcije f z ordinatno osjo in presečišča grafa funkcije f z asimptoto ter nariši graf funkcije f brez računanja ekstremov. Za katere vrednosti spremenljivke x so vrednosti funkcije f pozitivne?

(8 točk)



B2. Naj bo

$$f(x) = \ln x \qquad \text{in} \qquad g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 6x + 4$$

ter p tangenta na graf funkcije f v točki $S(a, b)$, q pa tangenta na graf funkcije g v točki $T(a, c)$. Tangenta p je pravokotna na tangento q. Izračunaj vrednost a.

(8 točk)

B3. Izbrati si moramo sedemmestno geslo, ki vsebuje vsaj eno črko in vsaj eno števko. Izbiramo lahko med znaki A, B, C, G, J, M, R, Z in 3.

a) Koliko je vseh možnih izbir za geslo, če se znaki ne smejo ponavljati?

(4 točke)

b) Koliko je vseh možnih izbir za geslo, če se znaki lahko ponavljajo?

(4 točke)

16. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 16. april 2016

Rešitve nalog in točkovnik

(3. APRIL 2016, 20 : 53)

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, jo točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovice možnih točk.

Oznaka '*' pri točkah pomeni, da točko oz. točke tekmovalec lahko dobi za pravilni postopek, čeprav je morda izračun nepravilen.

Prvi letnik

A1	A2	A3
D	E	E

A1. Označimo z x količino Sarinega denarja in z y količino Klarinega denarja. Potem je $x+y=816$ in $\frac{2}{5}x=\frac{4}{7}y$. Iz druge enačbe izrazimo $x=\frac{10}{7}y$ in vstavimo v prvo enačbo. Tako dobimo $\frac{17}{7}y=816$. Torej je $y=336$ in $x=480$. Sara ima 480 evrov.

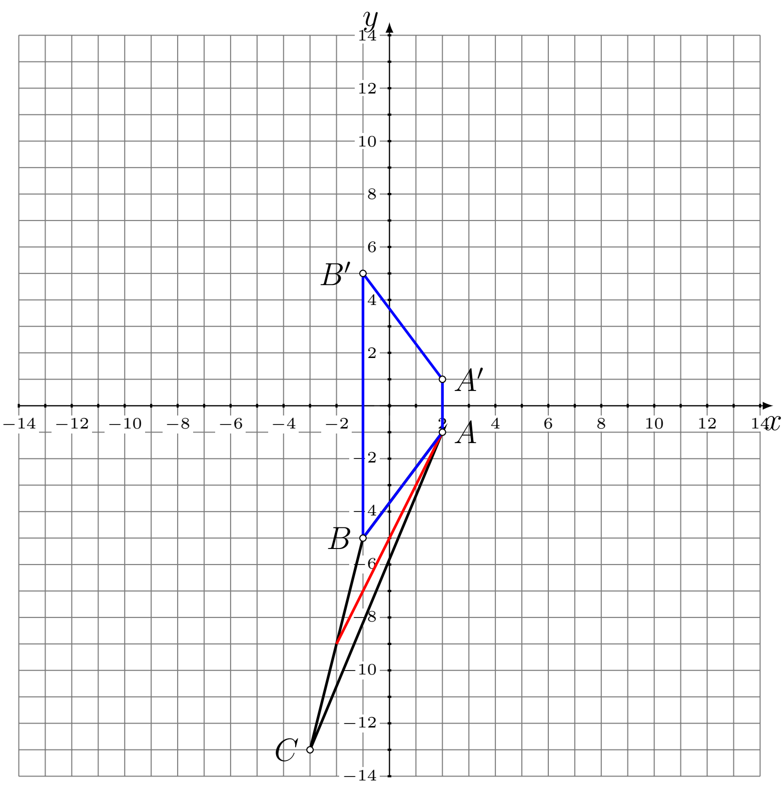
A2. Označimo z x maso mleka v kg. V x kg mleka je $0{,}07x$ kg smetane. Iz te smetane nastane $0{,}61\cdot 0{,}07x$ kg masla. Velja $0{,}61\cdot 0{,}07x=3$. Sledi, da je $x \doteq 70{,}258$ kg. 3 kg masla nastane iz več kot 70 kg mleka.

A3. Dani izraz razstavimo po pravilu razlike kvadratov in dobimo $\left(x+y+\frac{1}{4}-\left(x+y-\frac{1}{4}\right)\right)\left(x+y+\frac{1}{4}+\left(x+y-\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}(2x+2y)=x+y$. Dani izraz lahko preoblikujemo v izraz $x+y$.

B1.

Zapis prve enačbe $\frac{3-2b}{a+4b}=2$ .... 1 točka
Preoblikovanje prve enačbe v $2a+10b-3=0$ za $a\neq -4b$ .... 1 točka
Zapis druge enačbe $\frac{-\frac{3}{2}-2b}{-\frac{1}{2}a+4b}=-1$ .... 1 točka
Razreševanje dvojnih ulomkov .... 1* točka
Preoblikovanje druge enačbe v $a-4b+3=0$ za $a\neq 8b$ .... 1 točka
Reševanje sistema dveh linearnih enačb z dvema neznankama .... 1* točka
Zapis rešitve $a=-1$, $b=\frac{1}{2}$ .... 1+1 točka

B2.



Zapis koordinat razpolovišča stranice BC: $R(-2,-9)$ ....1 točka
Ugotovitev, da je dolžina težiščnice enaka razdalji med točkama A in R ....1 točka
Izračun dolžine težiščnice $t_{BC}=d(A,R)=\sqrt{(-2-2)^2+(-9+1)^2}$ ....1 točka
Zapis rešitve $t_{BC}=4\sqrt{5}$ ....1 točka
Prezrcaljeni točki A in B ter narisan štirikotnik $AA'B'B$ ....1 točka
1. način
Uporaba formule za ploščino trapeza $S=\frac{a+c}{2}\cdot v=\frac{10+2}{2}\cdot 3$ ....2 točki
Zapis rešitve $S=18$ ....1 točka
2. način
Uporaba formule za ploščino trikotnika ali za ploščino pravokotnika in
pravokotnega trikotnika ....2 točki
Zapis rešitve $S=18$ ....1 točka

B3.

Razširjanje ulomkov na skupni imenovalec $\frac{\frac{2xy}{x+y}-x}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x-2y}}=\frac{\frac{xy-x^2}{x+y}}{\frac{x-y}{y(x-2y)}}$ ....1 točka

Razreševanje dvojnega ulomka .... 1* točka
Poenostavitev prvega člena izraza v $-\frac{xy(x-2y)}{x+y}$ ....1 točka
Razcep $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ ....1 točka
Poenostavitev $\frac{(x^2-xy+y^2)(x^3-x^3+2x^2y-xy^2)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}=\frac{xy(2x-y)}{x+y}$ ....1 točka
Poenostavitev izraza $\frac{-xy(x-2y)}{x+y}+\frac{xy(2x-y)}{x+y}=xy$ ....1 točka
Izraz nima pomena za $y=0$, $x=-y$, $x=2y$ in $x=y$ ....2 točki
(Za dve pravilni ugotovitvi 1 točka.)

Drugi letnik

A1	A2	A3
C	C	C

A1. Simetrala daljice AB poteka skozi razpolovišče $S\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)$ daljice AB in je pravokotna na daljico AB. Smerni koeficient premice skozi točki A in B je $k_1=\frac{-2-(-3)}{2-3}=-1$. Torej je smerni koeficient simetrale $k_2=-\frac{1}{k_1}=1$. Upoštevamo $y=kx+n$ oziroma $-\frac{5}{2}=1\cdot\frac{5}{2}+n$ in dobimo $n=-5$. Torej je enačba simetrale daljice AB enaka $y=x-5$ oziroma $x-y-5=0$.

A2. Iz kosinusnega izreka $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ in enakosti $c^2=a^2+b^2+ab$ dobimo $ab=-2ab\cos\gamma$. Od tod sledi $\cos\gamma=-\frac{1}{2}$ oziroma $\gamma=120^\circ$. Trikotnik je topokoten, torej leži višinska točka izven trikotnika.

A3.

$$\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^{2016}\frac{\sqrt{5}-3}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)^{2016}=\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)^{2016}\frac{\sqrt{5}-3}{2}=$$

$$=\left(\frac{5-9}{4}\right)^{2016}\frac{\sqrt{5}-3}{2}=1\cdot\frac{\sqrt{5}-3}{2}=\frac{\sqrt{5}-3}{2}.$$

B1.

Zapis potenc z racionalnimi eksponenti v obliki korenov $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\frac{\sqrt[3]{a}}{a+2}\right):\left(\sqrt[3]{a}+\frac{\sqrt[3]{a}}{a+2}\right)$ .... 1 točka

Razširitev na najmanjši skupni imenovalec $\left(\frac{a+2+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^2}}{(a+2)\sqrt[3]{a^2}}\right):\left(\frac{(a+2)\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a}}{a+2}\right)$ .... 1 točka

Zapis ali uporaba $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^2}=a$ .... 1 točka

Poenostavitev izraza v prvem oklepaju v $\frac{2a+2}{(a+2)\sqrt[3]{a^2}}$ .... 1 točka

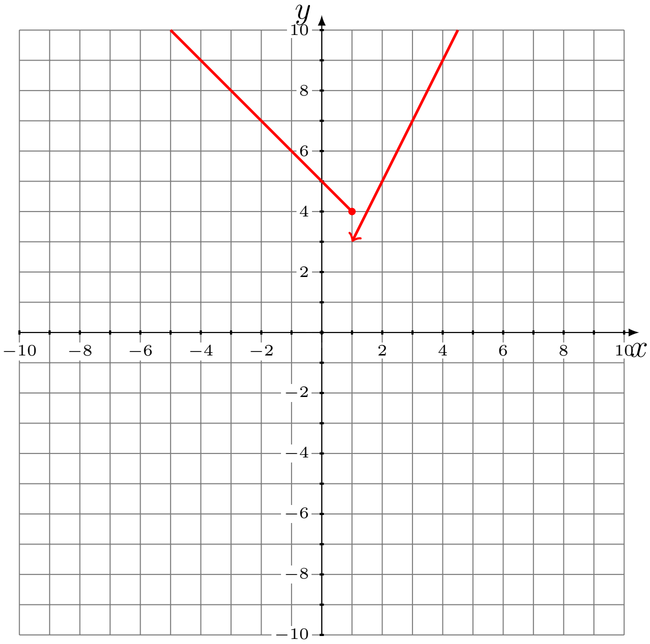
Poenostavitev izraza v drugem oklepaju v $\frac{(a+3)\sqrt[3]{a}}{a+2}$ .... 1 točka

Zapis $\frac{2a+2}{(a+2)\sqrt[3]{a^2}}:\frac{(a+3)\sqrt[3]{a}}{a+2}=\frac{(2a+2)(a+2)}{(a+2)\sqrt[3]{a^2}(a+3)\sqrt[3]{a}}$ .... 1 točka

Poenostavitev leve strani enakosti v $\frac{2a+2}{a(a+3)}$ .... 1 točka

Zapis odgovora oziroma ugotovitev, da enakost velja .... 1 točka

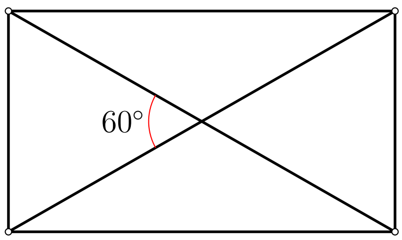
B2.



a) Narisana premica z enačbo $y = 2x + 1$ oziroma del te premice .... 1 točka
Narisana premica z enačbo $y = -x + 5$ oziroma del te premice .... 1 točka
Pravilno označen graf funkcije f v $x = 1$ .... 1 točka

b) Postopek za izračun predpisa inverzne funkcije .... 1* točka
Zapis $g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ .... 1 točka
Zapis $g(x^{-1}) = 2x^{-1} + 1$ .... 1 točka
Zapis enačbe $x^2 - 3x - 4 = 0$ .... 1 točka
Zapis rešitev enačbe $x_1 = 4$ in $x_2 = -1$ .... 1 točka

B3.



Skica pravokotnika z označenim kotom med diagonalama .... 1 točka
Upoštevanje $2a + 2b = 4$ .... 1 točka
Zapis ali upoštevanje $\tan 30° = \frac{b}{a}$ .... 1 točka
Zapis ali upoštevanje $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .... 1 točka
Reševanje sistema enačb .... 1* točka
Racionalizacija imenovalca .... 1* točka
Izračunan $a = \left(3 - \sqrt{3}\right)$ cm .... 1 točka
Izračunan $b = \left(-1 + \sqrt{3}\right)$ cm .... 1 točka
Opomba: Če v rezultatu ni enot, odštejemo 1 točko.

Tretji letnik

A1	A2	A3
A	C	D

A1. Uporabimo formulo za ploščino pravilnega šestkotnika $\frac{6a^2\sqrt{3}}{4} = 96\sqrt{3}$ ter izračunamo $a = 8$ cm. Obseg pravilnega šestkotnika je $6a = 48$ cm.

A2. Izračunamo $f(\log_a 4) = \frac{1}{\sqrt{a^{\log_a 4}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$.

A3. Označimo z a_1 dolžino roba male kocke. Upoštevamo, da je prostornina male kocke $a_1^3 = \frac{a^3}{8}$ in dobimo $a_1 = \frac{a}{2}$. Torej velja $P = 6a_1^2 = 6\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{2}$.

B1.

Ugotovitev, da je $s = 3$ m .... 1 točka
Zapis ali uporaba enakosti $2\pi r = \frac{\pi \cdot 3 \cdot 120°}{180°}$ .... 2 točka
Izračun dolžine polmera $r = 1$ m .... 1 točka
Izračun višine $v = \sqrt{s^2 - r^2} = 2\sqrt{2}$ m .... 1 točka
Izračun površine stožca $P = \pi r(r + s) = 4\pi$ m .... 1* točka
Izračun mase $m = 4\pi \cdot 0{,}16$ kg $\doteq 2$ kg .... 1 točka
Zapis odgovora .... 1 točka

B2.

a) Zapis enačbe $3 = (m-2) \cdot 4 + 4m + 3m$ .... 1 točka
Izračun vrednosti parametra $m = 1$ .... 1 točka
Zapis predpisa funkcije f: $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ .... 1 točka

b) Izračun vrednosti parametra $m = 2$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je za tako izračunani m graf funkcije f premica .... 1 točka
Zapis predpisa funkcije f: $f(x) = -4x + 6$ .... 1 točka
Postopek za izračun predpisa inverzne funkcije .... 1 točka
Zapis predpisa inverzne funkcije funkcije f: $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ .... 1 točka

B3.

Preoblikovanje prve enačbe v $\log_3 \frac{2x^2}{y} = 2$ za $x > 0$ in $y > 0$ .... 1 točka
Upoštevanje definicije logaritma $\frac{2x^2}{y} = 9$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je $\sqrt{2x - y - 2{,}5} = 0$ .... 1 točka
Zapis enačbe $2x - y - 2{,}5 = 0$ .... 1 točka
Reševanje sistema enačb $2x^2 = 9y$ in $2x - y - 2{,}5 = 0$ .... 1 točka
Ureditev do kvadratne enačbe $4x^2 - 36x + 45 = 0$ .... 1 točka
Zapis rešitev sistema enačb $x_1 = \frac{15}{2}$, $y_1 = \frac{25}{2}$ in $x_2 = \frac{3}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2}$ .... 1+1 točka

Četrti letnik

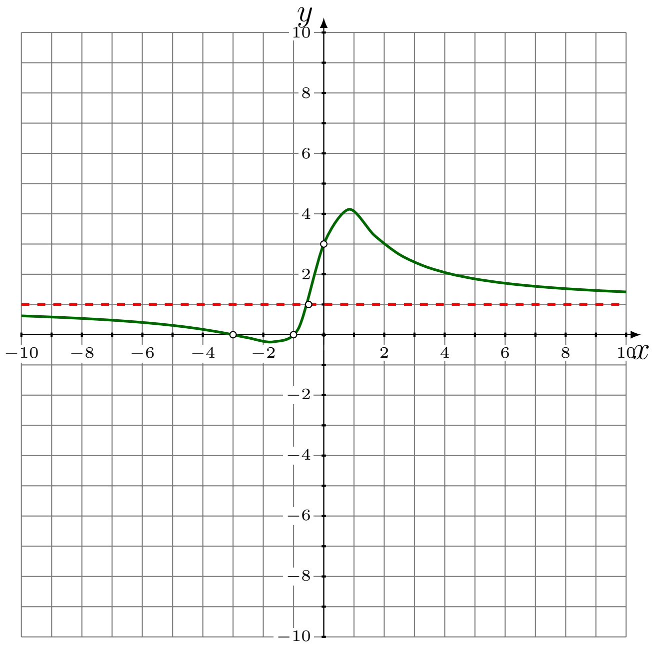
A1	A2	A3
E	D	D

A1. Upoštevamo $\frac{a+b}{2}=65$ in $\sqrt{ab}=60$. Preoblikujemo v sistem enačb $a+b=130$ in $ab=3600$. Iz prve enačbe izrazimo $b=130-a$ in vstavimo v drugo enačbo ter jo preoblikujemo v $a^2-130a+3600=0$. Dobimo rešitvi $a_1=40$ in $b_1=90$ ter $a_2=90$ in $b_2=40$. Torej sledi $|a-b|=50$.

A2. Ugotovimo, da moramo sešteti n členov aritmetičnega zaporedje z diferenco $d=2{,}5$. Upoštevamo $a_n=a_1+(n-1)d$ oziroma $2501=1+(n-1)\cdot 2{,}5$. Rešimo enačbo in ugotovimo, da moramo sešteti 1001 členov. Upoštevamo $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ ali $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$ in dobimo $S_{1001}=1252251$.

A3. Ničle funkcije f so rešitve enačbe $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x=0$, torej $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, in ne $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

B1.



Izračun ničel $x_1=-3$ in $x_2=-1$ in ugotovitev, da funkcija nima polov .... 1 točka
Zapis enačbe vodoravne asimptote $y=1$ in koordinat presečišča grafa
funkcije f z ordinatno osjo $x=0$ in $y=3$ ali $N(0,3)$ .... 1 točka
Izračun koordinat presečišča grafa funkcije f z vodoravno asimptoto
$x=-\frac{1}{2}$ in $y=1$ ali $P\left(-\frac{1}{2},1\right)$ .... 1+1 točka
Narisan graf funkcije f .... 2 točki
Ugotovitev, da je funkcija f pozitivna za vsak $x\in(-\infty,-3)\cup(-1,\infty)$ .... 1*+1 točka

B2.

Odvod funkcije f: $f'(x)=\frac{1}{x}$ .... 1 točka
Odvod funkcije g: $g'(x)=x^2-2x-6$ .... 1 točka
Upoštevanje $k_1=f'(a)=\frac{1}{a}$ in $k_2=g'(a)=a^2-2a-6$ .... 1+1 točka

Upoštevanje $k_1k_2 = -1$ oziroma $\frac{a^2-2a-6}{a} = -1$ .... 1 točka
Preoblikovanje enačbe v $a^2 - a - 6 = 0$ .... 1 točka
Zapis rešitev kvadratne enačbe $a_1 = 3$ in $a_2 = -2$ .... 1 točka
Ugotovitev, da rešitev $a_2 = -2$ ne ustreza ($f(-2)$ ne obstaja) .... 1 točka

B3.

a) Upoštevanje, da je v geslu 6 črk in ena števka .... 1 točka
Ugotovitev, da je 7 možnih položajev za števko .... 1 točka
Izračun števila možnih razporeditev črk v geslo $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ .... 1 točka
Izračun števila možnih izbir za geslo $7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 141120$ .... 1 točka

b) Ugotovitev, da je vseh možnih izbir za geslo, če ne bi bilo omejitve, da mora vsebovati vsaj eno črko in vsaj eno številko, enako 9^7 oziroma 4782969 .... 1 točka
Ugotovitev, da je vseh možnih izbir za geslo, ki bi vsebovalo samo črke, enako 8^7 oziroma 2097152 .... 1 točka
Ugotovitev, da je samo eno geslo, ki je sestavljeno samo iz števke 3 .... 1 točka
Izračun števila možnih izbir za geslo $9^7 - 8^7 - 1 = 2685816$ .... 1 točka