Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

18. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2018

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Za 3 kg pomaranč in 5 kg limon plačamo skupaj 8,40 €. Za 5 kg pomaranč in 4 kg limon plačamo skupaj 8,80 €. Koliko skupno plačamo za 2 kg pomaranč in 3 kg limon?

(**A**) 7,20 € (**B**) 5,20 € (**C**) 3,60 € (**D**) 5,60 € (**E**) 4,80 €

A2. Tonček je izpisal tretjo potenco izraza $2x^3y - 3xy^2$. Ugotovil je, da imata potenci z osnovama x in y v enem izmed členov enaka eksponenta. Kolikšen je koeficient v tem členu?

(**A**) 36 (**B**) -36 (**C**) 18 (**D**) -54 (**E**) 54

A3. Naj za realni števili x in y velja $\frac{x}{x+y} = 101$. Kolikšna je vrednost izraza $\frac{y-x}{y}$?

(**A**) $1,02$ (**B**) 100 (**C**) 201 (**D**) $2,01$ (**E**) $1,01$

B1. Trgovec je iz tovarne dobil pošiljko, v kateri je bilo 480 kozarcev majoneze več kot kozarcev gorčice. Ko je prodal $80\ \%$ kozarcev majoneze in četrtino kozarcev gorčice, je ugotovil, da ima 300 kozarcev gorčice več kot majoneze. Koliko kozarcev gorčice in koliko kozarcev majoneze je bilo v pošiljki, ki jo je dobil iz tovarne?

(8 točk)

B2. Dan je izraz, v katerem je x realno število in $x \notin \{-3,-1,0,1,2,3,4\}$.

$$\frac{x^2-4x}{5x-5} \cdot \left(\frac{x^3+1}{x^2+x}-1\right) \cdot \left(\left(1-\frac{3x-3}{x^2+x-6}\right) \cdot \left(\frac{6}{x+3}-\frac{1}{x-2}\right)^{-1}-1\right)^{-1}$$

Poenostavi ga.

(8 točk)

B3. Računsko določi vse možne pare naravnih števil a in b, $a > b$, tako da bo razlika kvadratov teh dveh števil enaka 60.

(8 točk)

18. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2018

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Kaj dobimo po racionalizaciji izraza $\dfrac{4+2\sqrt{6}}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}$?

(**A**) $1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (**B**) $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (**C**) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$
(**D**) $-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (**E**) $-1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$

A2. Kot α je za 33° manjši od svojega komplementarnega kota. Koliko je velik komplementarni kot?

(**A**) $29^\circ 50'$ (**B**) $61^\circ 50'$ (**C**) $61{,}5^\circ$ (**D**) $29{,}5^\circ$ (**E**) $61{,}30^\circ$

A3. Naj bosta α in β ostra kota pravokotnega trikotnika. Kateri izmed navedenih izrazov je enakovreden izrazu $\dfrac{\sin(90^\circ-\alpha)+\cos\beta}{4\sin\beta\cdot\cot(90^\circ-\alpha)}$?

(**A**) $\frac{\sin\beta+\cos\beta}{4\cos\beta}$ (**B**) $\frac{\sin\beta+\cos\beta}{4\sin\beta}$ (**C**) $\frac{1}{4\cos\beta}$ (**D**) $\frac{\sin\beta-\cos\beta}{4\cos\beta}$ (**E**) $\frac{\sin\beta+\cos\beta}{2\cos\beta}$

B1. Izračunaj koordinate točke C, ki je enako oddaljena od točk $A(-6,1)$ in $B(2,-3)$ ter leži na premici $y=3x-6$. Zapiši še enačbo množice vseh točk, ki so enako oddaljene od točk A in B.

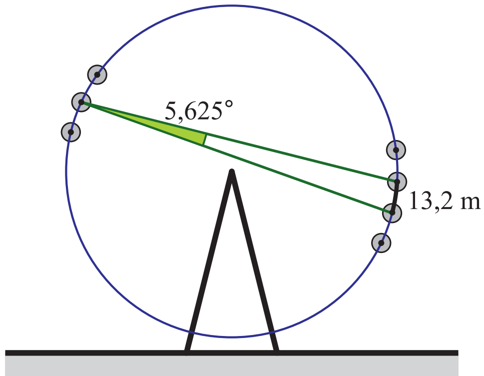
(8 točk)

B2. Brez uporabe računala poenostavi izraz:

$$a \cdot \left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 2a^{-\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + 5a^{\frac{1}{3}}} \right) \cdot (1 + 3a^{-1} - 10a^{-2}) - (\sqrt{5} - 2)\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$$

(8 točk)

B3. London Eye je ogromno kolo, ki nam omogoča zelo lep razgled na London. Kolo ima po krožnici enakomerno razporejene kabine v obliki krogel. Iz središča svoje kabine vidimo lok med središčima dvema sosednjih kabin na drugi strani kolesa pod kotom $5{,}625°$ (glej sliko). Izračunaj, koliko kabin je pritrjenih na kolo. Dolžina loka med središčima dveh sosednjih kabin je $13{,}2$ m. Izračunaj razdaljo med središčima najbolj oddaljenih kabin. *(8 točk)*



18. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2018

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Če bi plašč stožca razgrnili v ravnino, bi dobili četrtino kroga s polmerom 8 cm. Koliko je visok stožec?

(**A**) 10 cm (**B**) $2\sqrt{15}$ cm (**C**) $\sqrt{20}$ cm (**D**) 3 cm (**E**) 16 cm

A2. V kateri točki graf funkcije $f(x)=2\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}x-5)-4$ seka abscisno os?

(**A**) $\left(\frac{7\sqrt{2}}{2},0\right)$ (**B**) $(7\sqrt{2},0)$ (**C**) $(1-7\sqrt{2},0)$ (**D**) $\left(\frac{\sqrt{2}}{7},0\right)$ (**E**) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-7,0\right)$

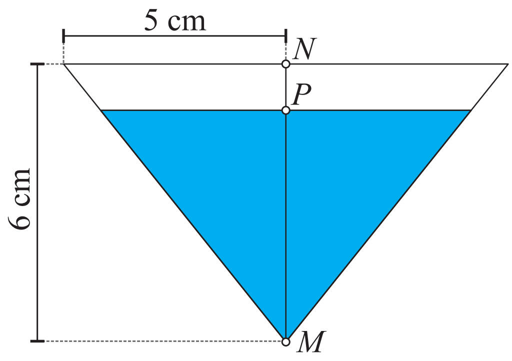
A3. Štiri pozitivna števila so v razmerju $1:2:3:4$. Vsota kvadratov najmanjših treh števil je za 1 manjša od vsote največjih treh števil. Največ koliko nizov takih števil lahko najdemo?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

B1. Določi tako število $a > 1$, da se bosta paraboli z enačbama $y = (a-1)x^2 + 3x + 4$ in $y = -x^2 - (a-1)x - 2 + a$ dotikali.

(8 točk)

B2. Kozarec valjaste oblike s polmerom 4 cm in višino 9 cm je do $\frac{2}{9}$ višine napolnjen z vodo. Mark se je odločil, da bo vso vodo prelil v kozarec stožčaste oblike s polmerom 5 cm in višino 6 cm (glej sliko). Pri prelivanju je 5% vode polil. Koliko decilitrov vode je v stožčastem kozarcu in kako visoko sega voda (tj. koliko je $|MP|$)? *(8 točk)*



B3. Reši enačbo

$$\sqrt[3]{\frac{4}{9} \cdot \sqrt{\left(\frac{81}{16}\right)^{x} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{8}{27}\right)^{x-1}}}} = \frac{3^{\frac{13}{x-1}}}{\sqrt{4^{\frac{13}{x-1}}}}.$$

dMFA

18. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2018

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Kolikšna je vrednost funkcije $f(x) = \log_3 \left(\dfrac{\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)}{\log_{\frac{1}{2}} 2^x} \right)$ za $x = -3$?

(**A**) 0 (**B**) -3 (**C**) ne obstaja (**D**) 1 (**E**) -1

A2. S števkami $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ in 9 sestavljamo soda šestmestna števila, katerih prva števka je praštevilo. Koliko je vseh takih šestmestnih števil?

(**A**) 20160 (**B**) 9440 (**C**) 25552 (**D**) 4320 (**E**) 49152

A3. Katera izmed navedenih funkcij je odvod funkcije $f(x) = \dfrac{1-2x}{\sqrt{2x}}$?

(**A**) $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{2x}(2x-1)}{4x^2}$ (**B**) $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{2x}(2x-1)}{8x^2}$ (**C**) $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{2x}(2x+1)}{4x^2}$

(**D**) $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{2x}(2x+1)}{8x^2}$ (**E**) $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{2x}(1-2x)}{4x^2}$

B1. Pokaži, da velja:

$$\frac{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{2}=(1+\sin\alpha)\cdot(1+\cos\alpha).$$

(8 točk)

B2. V zavetišču imajo 15 psov in 20 mačk. Izmed njih naključno izberemo 8 živali. Izračunaj verjetnosti dogodkov na pet decimalnih mest natančno:

a) Izbrali smo 8 psov,

b) Izbrali smo 5 psov in 3 mačke,

c) Izbrali smo več psov kot mačk,

d) Izbrali smo vsaj 6 mačk.

(8 točk)

B3. a) Reši enačbi $9^x - 4 \cdot 5^{2x-3} = 25^{x-1} + 2 \cdot 3^{2x-3}$ in $\sqrt{x+1+\sqrt{x+1+\sqrt{x+3}}} = \sqrt{x+3}$.

b) Zapiši splošno obliko polinoma z vodilnim koeficientom 2, katerega ničle so enake rešitvam enačb iz a).

(8 točk)

18. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2018

Rešitve nalog in točkovnik za prvi letnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, jo točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovice možnih točk.

Oznaka '*' pri točkah pomeni, da točko oz. točke tekmovalec lahko dobi za pravilni postopek, čeprav je morda izračun nepravilen.

A1	A2	A3
B	E	D

A1. Zapišemo sistem enačb $3P + 5L = 8,40$ in $5P + 4L = 8,80$. Rešimo sistem enačb in dobimo $P = 0,80$ €, $L = 1,20$ €. Izračunamo $2P + 3L = 5,20$ €.

A2. $(2x^3y - 3xy^2)^3 = (2x^3y)^3 - 3(2x^3y)^2 \cdot (3xy^2) + 3(2x^3y) \cdot (3xy^2)^2 - (3xy^2)^3 = 8x^9y^3 - 36x^7y^4 + 54x^5x^5 - 27x^3y^6$. Tretji člen ima enaka eksponenta pri x in y, iskana vrednost je 54.

A3. Enakost pomnožimo z imenovalcem in izrazimo $x = -1,01y$, to vstavimo v izraz $\frac{y-x}{y} = \frac{y+1,01y}{y} = \frac{2,01y}{y} = 2,01$.

B1.

Zapis prve zveze $M = G + 480$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je trgovcu ostalo 20% kozarcev gorčice (ali $1/5$) .... 1 točka
Ugotovitev, da je trgovcu ostalo 75% kozarcev majoneze (ali $3/4$) .... 1 točka
Zapis druge zveze med količinama $0,2M + 300 = 0,75G$ .... 1 točka
Reševanje sistema enačb .... 1* točka
Izračun vrednosti prve neznanke $G = 720$ .... 1 točka
Izračun vrednosti druge neznanke $M = 720 + 480 = 1200$ .... 1 točka
Odgovor .... 1 točka

B2.

Izpostavljanje $\frac{x^2-4x}{5x-5} = \frac{x(x-4)}{5(x-1)}$ .... 1 točka
Razstavljanje vsote kubov .... 1 točka

Izračun $\frac{x^3+1}{x^2+x}-1=\frac{(x-1)^2}{x}$ .... 1 točka
Preoblikovanje $1-\frac{3x-3}{x^2+x-6}$ v $\frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)(x+3)}$ .... 1 točka
Preoblikovanje $\left(\frac{6}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)$ v $\frac{5(x-3)}{(x-2)(x+3)}$ .... 1 točka
Izračun $\left(1-\frac{3x-3}{x^2+x-6}\right)\cdot\left(\frac{6}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)^{-1}=\frac{x+1}{5}$ .... 1 točka
Izračun $\left(\left(1-\frac{3x-3}{x^2+x-6}\right)\cdot\left(\frac{6}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)^{-1}-1\right)^{-1}=\frac{5}{x-4}$ .... 1 točka
Rezultat $x-1$ .... 1 točka

B3.

Zapis $a^2-b^2=60$ .... 1 točka
Razstavljanje razlike kvadratov .... 1 točka
Zapis vseh možnih razcepov .... 1 točka
Zapis vsaj enega sistema enačb .... 1 točka
Reševanje sistema enačb .... 1* točka
Ugotovitev, da za razcepe $1\cdot 60, 3\cdot 20, 4\cdot 15, 5\cdot 12$ rešitve niso naravna števila .... 1 točka
Rešitev $a=16$ in $b=14$ za razcep $60=2\cdot 30$ .... 1 točka
Rešitev $a=8$ in $b=2$ za razcep $60=6\cdot 10$ .... 1 točka

18. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2018

Rešitve nalog in točkovnik za drugi letnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, jo točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovice možnih točk.

Oznaka '*' pri točkah pomeni, da točko oz. točke tekmovalec lahko dobi za pravilni postopek, čeprav je morda izračun nepravilen.

A1	A2	A3
D	C	A

A1. Števec in imenovalec pomnožimo z izrazom $(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}$ in dobimo $\frac{4+2\sqrt{6}}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3})} \cdot \frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}} = \frac{4+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{6}+2\sqrt{12}-2\sqrt{18}}{(1+\sqrt{2})^2-3} = \frac{4-2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$. Dobljeni izraz racionaliziramo z $\sqrt{2}$ in krajšamo z 2 ter dobimo rezultat $-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

A2. Zapis obeh enačb $\alpha = \beta - 33°$ in $\alpha + \beta = 90°$. Z reševanjem sistema dobimo, da je $\beta = 61,5°$.

A3. Uporabimo zveze $\sin(90° - \alpha) = \cos\beta$, $\cot(90° - \alpha) = \frac{\cos(90°-\alpha)}{\sin(90°-\alpha)} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}$. Prvotni izraz preoblikujemo v $\frac{(\sin\beta+\cos\beta)\cdot\sin\beta}{4\sin\beta\cdot\cos\beta}$, okrajšamo in dobimo rezultat $\frac{\sin\beta+\cos\beta}{4\cos\beta}$.

B1.

1. način

Zapis ali uporaba $C(x, 3x-6)$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba $d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ .... 1 točka
Zapis enakosti $d(A,C) = d(B,C)$ .... 1 točka
Preoblikovanje enakosti v enačbo $(x+6)^2+(3x-7)^2 = (x-2)^2+(3x-3)^2$ .... 1 točka
Zapis točke $C(9,21)$ .... 1 točka
Izračun razpolovišča daljice AB je $S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = S(-2,-1)$ .... 1 točka
Izračun smernega koeficienta premice $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = 2$ .... 1 točka
Zapis enačbe simetrale $y = 2x+3$ .... 1 točka

2. način

Izračun smernega koeficienta premice skozi točki A in B $k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{1}{2}$ .... 1 točka

Zapis ali uporaba $k_S=-\frac{1}{k_{AB}}=2$ .... 1 točka

Izračun razpolovišča daljice AB je $S\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=S(-2,-1)$ .... 1 točka

Zapis enačbe simetrale $y=2x+3$ .... 1 točka

Ugotovitev, da točka C leži na presečišču simetrale $y=2x+3$ in premice $y=3x+6$. 1* točka

Reševanje sistema enačb .... 1* točka

Zapis točke $C(9,21)$ .... 1+1 točka

B2.

Izpostavljen skupni faktor v imenovalcu $a^{-\frac{1}{3}}(a-2)$ ali $a^{\frac{1}{3}}(a+5)$ .... 1 točka

Izračun $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{-\frac{1}{3}}}-\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+5a^{\frac{1}{3}}}=\frac{7a}{(a-2)(a+5)}$ .... 1 točka

Zapis potenc z negativnimi eksponenti v obliki ulomkov $3a^{-1}=\frac{3}{a}$ in $10a^{-2}=\frac{10}{a^2}$ .... 1 točka

Izračun $1+3a^{-1}-10a^{-2}=\frac{a^2+3a-10}{a^2}$ .... 1 točka

Preoblikovanje izraza $(\sqrt{5}-2)\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2(9+4\sqrt{5})}$ .... 1 točka

Kvadriranje dvočlenika $(\sqrt{5}-2)^2=9-4\sqrt{5}$ .... 1 točka

Izračun $(\sqrt{5}-2)\sqrt{9+4\sqrt{5}}=1$ .... 1 točka

Rezultat 6 .... 1 točka

B3.

Zapis, da je $5,625^\circ$ obodni kot .... 1 točka
Izračun središčnega kota $11,25^\circ$ .... 1 točka
Zapis za izračun števila kabin $360^\circ : 11,25^\circ$ .... 1 točka
Izračun števila kabin 32 .... 1 točka
Uporaba enačbe za krožni lok $l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$ .... 1 točka
Izražen polmer iz enačbe za krožni lok $r = \frac{l \cdot 180^\circ}{\pi \alpha}$ .... 1 točka
Izračun polmera $r \doteq 67,23$ m .... 1 točka
Največja razdalja je $2r \doteq 134,45$ m .... 1 točka

18. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2018

Rešitve nalog in točkovnik za tretji letnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, jo točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovice možnih točk.

Oznaka '*' pri točkah pomeni, da točko oz. točke tekmovalec lahko dobi za pravilni postopek, čeprav je morda izračun nepravilen.

A1	A2	A3
B	A	C

A1. Upoštevanje, da je polmer krožnega izseka enak dolžini stranice stožca $s = 8$ cm. Dolžina krožnega loka razgrnjenega plašča stožca je enaka obsegu osnovne ploskve stožca $\frac{1}{4} \cdot 2\pi s = 2\pi r$. Izračun polmera stožca $r = \frac{s}{4} = 2$ cm. Izračun višine stožca $v^2 = s^2 - r^2 = 8^2 - 2^2$, $v = \sqrt{60}$ cm $= 2\sqrt{15}$ cm.

A2. Predpis funkcije f enačimo z 0. Dobimo enačbo $2\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}x - 5) - 4 = 0$. Rešitev enačbe je $x = \frac{7\sqrt{2}}{2}$. Graf funkcije f seka abscisno os v točki $\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

A3. Iz razmerja $a : b : c : d = 1 : 2 : 3 : 4$ sledi, da je $a = \frac{1}{10}t, b = \frac{2}{10}t, c = \frac{3}{10}t, d = \frac{4}{10}t$. Iz enakosti $a^2 + b^2 + c^2 + 1 = b + c + d$ dobimo $14t^2 - 90t + 100 = 0$. Rešitvi kvadratne enačbe sta $t_1 = \frac{10}{7}, t_2 = 5$. Obstajata dva niza.

B1.

Zapis ali upoštevanje $(a-1)x^2 + 3x + 4 = -x^2 - (a-1)x - 2 + a$ .... 1 točka
Urejena enačba $ax^2 + (a+2)x + 6 - a = 0$ .... 1 točka
Zapis ali upoštevanje pogoja $D = 0$ .... 1 točka
Zapis enačbe $5a^2 - 20a + 4 = 0$ .... 1 točka
Izračun diskriminante $D = 320$ .... 1 točka
Rešitvi enačbe $a_1 = 2 - \frac{4\sqrt{5}}{5}, a_1 = 2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}$ .... 1+1 točka
Rezultat $a = 2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}$ .... 1 točka

B2.

Izračun količine vode v valjastem kozarcu $V=\frac{2}{9}\pi\cdot r^2\cdot v=100,53$ cm^3 .... 1 točka
Izračun količine vode v stožcastem kozarcu $0,95\cdot V=95,5$ cm^3 .... 1 točka
Odgovor .... 1 točka
Zapis zveze med polmerom gladine vode r_1 in višino vode v_1 v stožčastem kozarcu $r_1:v_1=5:6$ oziroma $v_1=\frac{5r_1}{6}$ .... 1 točka
Upoštevanje $r_1=\frac{5v_1}{6}$ v formuli za prostornino stožca $95,50=\frac{1}{3}\pi\cdot r_1^2\cdot v_1=\frac{25\pi v_1^3}{108}$ .... 1+1 točka
Izračun višine vode $v_1\doteq 5,1$ cm .... 1 točka
Odgovor .... 1 točka

B3.

Preoblikovanje leve strani enačbe $\sqrt[24]{\left(\frac{4}{9}\right)^8\cdot\left(\frac{81}{16}\right)^{4x}\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^{x-1}}=\frac{3^{\frac{13}{x-1}}}{\sqrt{4^{\frac{13}{x-1}}}}$ .... 1+1+1 točka
Preoblikovanje desne strani enačbe $\sqrt[24]{\left(\frac{4}{9}\right)^8\cdot\left(\frac{81}{16}\right)^{4x}\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^{x-1}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{13}{x-1}}$ .... 1 točka
Poenostavitev leve strani enačbe $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{13x-13}{24}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{13}{x-1}}$ .... 1 točka
Enačenje eksponentov $\frac{13x-13}{24}=\frac{13}{x-1}$ .... 1* točka
Zapis enačbe $x^2-2x-23=0$ .... 1 točka
Rešitvi $x_1=1+2\sqrt{6}, x_2=1-2\sqrt{6}$ .... 1 točka

18. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2018

Rešitve nalog in točkovnik za četrti letnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, jo točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovice možnih točk.

Oznaka '*' pri točkah pomeni, da točko oz. točke tekmovalec lahko dobi za pravilni postopek, čeprav je morda izračun nepravilen.

A1	A2	A3
E	E	C

A1. $f(-3)=\log_3\left(\dfrac{\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)}{log_{\frac{1}{2}}2^{-3}}\right)=log_3\left(\frac{1}{3}\right)=-1.$

A2. Šestmestno število lahko sestavimo na $4\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 3=49152$ načinov.

A3. Izračunamo odvod funkcije f po obrazcu $f'(x)=\frac{-2\sqrt{2x}-(1-2x)\cdot\frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2}{2x}$. Razširimo števec na skupni imenovalec, razrešimo dvojni ulomek in z racionaliziranjem ulomka dobimo $f'(x)=\frac{-2x\sqrt{2x}-\sqrt{2x}}{4x^2}$. Izpostavimo skupni faktor v števcu in dobimo rezultat $f'(x)=\frac{-\sqrt{2x}(2x+1)}{4x^2}$.

B1.

Kvadriranje števca na levi strani $\frac{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{2}=\frac{1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha+2\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2}$ ...... 2 točki
Upoštevanje $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ .... 1 točka
Poenostavitev leve strani $\frac{2+2\sin\alpha+2\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2}$ .... 1 točka
Izpostavitev faktorja 2 .... 1 točka
Krajšanje ulomka .... 1* točka
Razstavljanje štiričlenika .... 1* točka
Rezultat $(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$ .... 1 točka

B2.

Izračun števila vseh izidov .... 1 točka
Izračun verjetnosti dogodka A .... 1 točka
Izračun števila ugodnih izidov dogodka B .... 1 točka

Izračun verjetnosti dogodka B ....1 točka
Izračun števila ugodnih izidov dogodka C ....1 točka
Izračun verjetnosti dogodka C ....1 točka
Izračun števila ugodnih izidov dogodka D ....1 točka
Izračun verjetnosti dogodka D ....1 točka

B3.

Preoblikovanje enačbe $3^{2x} - 2 \cdot 3^{2x-3} = 5^{2x-2} + 4 \cdot 5^{2x-3}$ ....1 točka
Izpostavitev skupnega faktorja ....1* točka
Ureditev do oblike $3^{2x-5} = 5^{2x-5}$ ....1 točka
Rešitev enačbe $x = \frac{5}{2}$ ....1 točka
Reševanje korenske enačbe ....1* točka
Ureditev do oblike $x^2 - 7x + 6 = 0$ ....1 točka
Rešitev enačbe je $x = 1$, druga rešitev $x = 6$ ni ustrezna ....1 točka
Zapis polinoma v splošni obliki $p(x) = 2x^2 - 7x + 5$ ....1 točka