Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

21. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Naj za števili x in y velja zveza $(x+2y)^2-3y(y-1)=(2x+y)^2-3x(x+1)$. Kolikšna je njuna vsota $x+y$?

(**A**) -100 (**B**) -1 (**C**) 0 (**D**) 1
(**E**) se ne da enolično določiti

A2. Podana imamo tri števila $A=26^{351}$, $B=5^{702}$ in $C=3^{1053}$. Števila uredi po velikosti. Kateri spodnji zapis je pravilen?

(**A**) $A<B<C$ (**B**) $A<C<B$ (**C**) $B<C<A$ (**D**) $B<A<C$ (**E**) $C<A<B$

A3. Naj bo $x\in\mathbb{R}$ in $x>0$, $x\neq 4$, $x\neq 9$. Kateri izraz je ekvivalenten izrazu $((2+\sqrt{x})^{-1}+1)^{-1}$?

(**A**) $\frac{x+\sqrt{x}-6}{x-9}$ (**B**) $\frac{x-\sqrt{x}-6}{x-9}$ (**C**) $\frac{x-\sqrt{x}+6}{x-9}$ (**D**) $\frac{x-\sqrt{x}-6}{x-4}$ (**E**) $\frac{x-\sqrt{x}+6}{x-4}$

B1. Naj bo točka $C(5,-2)$ razpolovišče daljice AB. Krajišči daljice sta točki $A(2a-b,a+b+1)$ in $B(3a+2b,3a+2b-2)$, kjer sta a in b realni števili. Izračunaj dolžino daljice AB. Rezultat delno koreni.

B2. V nekem domu za ostarele so pred enim tednom ugotovili prve okužene s covid-19. Od takrat se je njihovo število popeterilo, torej jih je sedaj petkrat toliko kot pred enim tednom. 21 od teh okuženih so zjutraj odpeljali v bolnišnico, tako je med oskrbovanci, ki so ostali v domu, $9.\overline{09}\,\%$ okuženih. Zvečer bodo v bolnišnico odpeljali še 9 okuženih, tako da bo med oskrbovanci, ki bodo ostali v domu, le $5\,\%$ okuženih. Koliko je bilo prvotno število okuženih pred enim tednom in koliko je bilo takrat vseh oskrbovancev v domu?

B3. Štirikratni količnik razlike in vsote realnega števila a in njegove obratne vrednosti zmanjšaj za dvakratnik razlike števila a in njegove obratne vrednosti. Zapiši iskani izraz, ga poenostavi in izračunaj, za katere vrednosti števila a je vrednost danega izraza enaka 0.

21. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Kolikšno vrednost mora imeti število $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 4$ in $a \neq 2$, da se bosta premici z enačbama $ax-(a-2)y-2=0$ in $(a-1)x+(4-a)y+2=0$ sekali na ordinatni osi?

(**A**) -5 (**B**) 5 (**C**) -1 (**D**) -3 (**E**) 3

A2. Kolikšna je vrednost izraza $\dfrac{\left(\sqrt[5]{\left(a^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{5}{8}}}\right)^{-3}}{\left(\sqrt[8]{\left(\sqrt[3]{a^4}\right)^5}\right)^{-\frac{3}{5}}} \cdot \dfrac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$, kjer je $a \in \mathbb{R}$ in $a > 0$?

(**A**) $\frac{12a}{29}$ (**B**) $\frac{12}{29}$ (**C**) $\frac{12}{29a}$ (**D**) $\frac{29a}{12}$ (**E**) $\frac{29}{12}$

A3. V pravokotnem trikotniku ABC s pravim kotom pri C, višina iz oglišča C seka stranico AB v točki D. Kolikšna je velikost kota $\sphericalangle BAC$, če velja $|CD| = \sqrt{12}$ cm in $|AD| = 4$ cm?

(**A**) $\alpha \doteq 49,06^\circ$ (**B**) $\alpha \doteq 40,89^\circ$ (**C**) $\alpha \doteq 40,54^\circ$ (**D**) $\alpha \doteq 49,11^\circ$ (**E**) $\alpha \doteq 40,45^\circ$

B1. V trikotniku ABC sta dolžini stranic $|AB|$ in $|AC|$ v sorazmerju $|AB| : |AC| = 4 : 3$. Na stranici AB leži točka D, tako da imata kota $\sphericalangle ACB$ in $\sphericalangle CDA$ enako velikost. Razdalja med točkama D in C meri $7,5$ cm.

a) Izračunaj dolžino stranice BC.

b) Koliko merita dolžini stranic AC in AD, če obseg trikotnika ACD meri 18 cm?

B2. V eksplicitni, implicitni in odsekovni obliki zapiši enačbo premice s pozitivnim smernim koeficientom, ki s koordinatnima osema oblikuje pravokotni trikotnik s ploščino 9 kvadratnih enot in abscisno os seka pri $x = -3$.

B3. Dan je izraz $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$.

a) Racionaliziraj imenovalec in izraz poenostavi.

b) Izračunaj vrednost izraza za $x=\frac{5}{4}$.

21. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Pravilna, pokončna, štiristrana prizma ima površino $128\ \mathrm{m}^2$ in višino 6 m. Koliko meri njena telesna diagonala?

(**A**) $D \doteq 8,23$ m (**B**) $D \doteq 8,24$ m (**C**) $D \doteq 7,22$ m (**D**) $D \doteq 8,25$ m (**E**) $D \doteq 7,21$ m

A2. Za katere vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ je funkcija $f(x) = \log\left(x^2 + (a+4)x + 9\right)$ definirana na množici vseh realnih števil?

(**A**) $a < 2$ (**B**) $a > -10$ (**C**) $-2 < a < 10$ (**D**) $-10 < a < 2$ (**E**) $a = -4$

A3. Dolžina akvarija je 50 cm, širina 20 cm in višina 25 cm. Koliko cm od zgornjega roba akvarija bo nivo vode, če vanj vlijemo 19 litrov vode?

(**A**) 19 cm (**B**) $1,9$ cm (**C**) $10,9$ cm (**D**) 6 cm (**E**) $0,6$ cm

B1. Dan je paralelogram z dolžino stranice $a = 13$ m in notranjim kotom $\alpha = 60^{\circ}$. Obseg paralelograma meri 58 m. Paralelogram je osnovna ploskev pokončne prizme. Višina prizme je enaka dolžini diagonale f danega paralelograma. Natančno izračunaj površino in prostornino prizme.

B2. Dana je družina funkcij $f(x) = 3^{x-b} - \frac{1}{3}$, $b \in \mathbb{R}$.

a) Za $b = -1$ nariši graf funkcije f in zapiši njeno zalogo vrednosti.

b) Izračunaj vrednost parametra b za katerega bo $x = \frac{1}{2}$ ničla funkcije f.

c) Za $b = 2$ izračunaj na dve mesti natančno absciso presečišča grafa funkcije f s premico $y - 6 = 0$.

B3. Reši enačbo: $1+\log\left(2^{x}+1\right)=\log 2+\log(4^{x}+9)$.

21. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. V katerih točkah na krivulji, podani z enačbo $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$, tangenta z abscisno osjo oklepa kot $135°$?

(**A**) $T_1(1, -4)$ in $T_2(-2, 0)$. (**B**) $T_1(1, -4)$ in $T_2(2, 0)$. (**C**) $T_1(1, 0)$ in $T_2(-1, 4)$.
(**D**) $T_1(1, 2)$ in$T_2(\frac{1}{3}, \frac{28}{9})$ (**E**) $T_1(1, 2)$ in $T_2(\frac{1}{3}, \frac{76}{27})$.

A2. Za neko celo število x je končno zaporedje $\sqrt{x}+2, 3\sqrt{x+1}, 2\sqrt{x}+4$ geometrijsko. Kolikšen je količnik tega zaporedja?

(**A**) 2 (**B**) $\sqrt{3}$ (**C**) $\sqrt{2}$ (**D**) 3 (**E**) $3\sqrt{2}$

A3. Kateri izraz je ekvivalenten izrazu $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^{-1} x + \cos^{-1} x} \cdot \frac{\tan x}{\cos x - \sin x}$?

(**A**) $-\cos x$ (**B**) $-\sin x$ (**C**) $-\sin^2 x$ (**D**) $-\cos^2 x$ (**E**) $\cos x$

B1. Reši enačbo: $4x^4+2x^3-4x^2-x=-1$. Izračunaj razliko kvadratov vsote racionalnih rešitev in vsote iracionalnih rešitev enačbe.

B2. Naj bo x takšno realno število, za katerega velja $\cos(60° - x) \neq 0$ in $\sin(120° - x) \neq 0$. Brez uporabe žepnega računala izračunaj natančno vrednost izraza: $\frac{\sqrt{3}+4\sin x\cos x}{\cos(60°-x)\cdot\sin(120°-x)}$.

B3. Opazujemo telesi A in B, ki sta med seboj oddaljeni za 450 m. Istočasno se začneta premikati eno proti drugemu (po premici). Telo A se v prvi minuti premakne za 5 m, nato pa v vsaki minuti za 15 m več kot v prejšnji minuti. Telo B se v prvi minuti premakne za 100 m, nato pa v vsaki minuti za 10 m manj kot v prejšnji. Po kolikšnem času in na kolikšni oddaljenosti od začetne pozicije telesa A se telesi srečata?

21. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Rešitve nalog za 1. letnik

A1	A2	A3
C	D	B

A1. Po kvadriranju in odpravi oklepajev dobimo $x^2 + 4xy + 4y^2 - 3y^2 + 3y = 4x^2 + 4xy + y^2 - 3x^2 - 3x$. Enačba se preoblikuje v enačbo $3y = -3x$, oziroma $x + y = 0$. Pravilen je odgovor C.

A2. $B = 5^{702} = (5^2)^{351} = 25^{351}$, $C = (3^3)^{351} = 27^{351}$. Ker je $25^{351} < 26^{351} < 27^{351}$, dobimo $B < A < C$. Pravilen je odgovor D.

A3. Izraz $(2 + \sqrt{x})^{-1} + 1)^{-1}$ preoblikujemo v $(\frac{1}{2+\sqrt{x}} + 1)^{-1} = (\frac{3+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}})^{-1} = \frac{2+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$, $x \neq 9$, $x \neq 4$. Izraz še racionaliziramo in dobimo $\frac{x-\sqrt{x}-6}{x-9}$. Pravilen je odgovor B.

B1. Točka $S(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ je središče daljice med $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$. Tako dobimo enačbi $\frac{5a+b}{2} = 5$ in $\frac{4a+3b-1}{2} = -2$. Rešitev sistema je $a = 3$ in $b = -5$. Za točko A dobimo koordinati $A(11, -1)$ in za B dobimo $B(-1, -3)$. Upoštevamo $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ in dobimo $d(A, B) = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$.

Upoštevanje ali zapis koordinat središča daljice $S(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ .... 1 točka
Zapis prve enačbe $\frac{5a+b}{2} = 5$ .... 1 točka
Zapis druge enačbe $\frac{4a+3b-1}{2} = -2$ .... 1 točka
Reševanje sistema .... 1* točka
Zapis rešitve sistema $a = 3$ in $b = -5$ .... 1 točka
Izračun koordinat točk $A(11, -1)$ in $B(-1, -3)$ .... 1 točka
Upoštevanje ali zapis obrazca za dolžino daljice $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ... 1 točka
Izračun dolžine in delno korenjenje $d(A, B) = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$ .... 1 točka

B2. Naj bo prvotno x okuženih in v domu skupno y oskrbovancev. Od vseh okuženih $5x$ so jih 21 odpeljali, okuženih je ostalo $5x - 21$. Oskrbovancev je ostalo $y - 21$. Delež okuženih je $\frac{5x-21}{y-21} = 9.\overline{09}\,\%$. Če periodično število $9.\overline{09}$ spremenimo v ulomek, dobimo $\frac{100}{11}$ in $9.\overline{09}\,\% = \frac{1}{11}$. Zato delež okuženih lahko pišemo kot $\frac{5x-21}{y-21} = \frac{1}{11}$, kar lahko preoblikujemo v $y = 55x - 210$. Če odpeljejo še 9 okuženih, jih bodo skupno odpeljali 30 in dobimo delež okuženih $\frac{5x-30}{y-30} = 5\,\%$. Upoštevamo, da je $5\,\% = \frac{1}{20}$ in delež preoblikujemo v enačbo $y = 100x - 570$. Z enačenjem obeh enačb dobimo $x = 8$ in $y = 230$, kar pomeni, da je bilo vseh oskrbovancev 230, od tega 8 okuženih.

Zapisana povezava med številom okuženih pred enim tednom in sedaj x in $5x$ .... 1 točka
Zapisano število okuženih ali preostalih oskrbovancev $5x - 21$ ali $y - 21$ .... 1 točka
Preoblikovanje $9.\overline{09}\,\%$ v $\frac{1}{11}$ .... 1 točka
Zapis ustrezne enačbe $\frac{5x-21}{y-21} = 9.\overline{09}\,\%$ .... 1 točka
Preoblikovanje enačbe v linearno $y = 55x - 210$ .... 1 točka
Zapis druge enačbe $\frac{5x-30}{y-30} = 5\,\%$ .... 1 točka
Preoblikovanje v linearno enačbo $y = 100x - 570$ .... 1 točka
Zapis odgovora. Vseh oskrbovancev je bilo 230, od tega 8 okuženih. .... 1 točka

B3. Zapišemo izraz $4 \cdot \frac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}} - 2 \cdot (a - a^{-1})$. Izraz poenostavimo $4 \cdot \frac{a-\frac{1}{a}}{a+\frac{1}{a}} - 2 \cdot (a - \frac{1}{a}) = 4 \cdot \frac{a^2-1}{a^2+1} - 2 \cdot \frac{a^2-1}{a} = \frac{4a(a^2-1)-2(a^2+1)(a^2-1)}{(a^2+1)a} = \frac{2(a^2-1)(2a-a^2-1)}{(a^2+1)a} = \frac{-2(a^2-1)(a^2-2a+1)}{(a^2+1)a} = \frac{-2(a-1)^3(a+1)}{(a^2+1)a}$, $a \neq 0$. Vrednost danega izraza je enaka 0 za $a = -1$ in $a = 1$.

Zapis izraza $4 \cdot \frac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}}$ .... 1 točka
Zapis izraza $2 \cdot (a - a^{-1})$ .... 1 točka
Zapis izraza $4 \cdot \frac{a-\frac{1}{a}}{a+\frac{1}{a}} - 2 \cdot (a - \frac{1}{a})$, $a \neq 0$ .... 1 točka
Izračun dvojnega ulomka $\frac{a-\frac{1}{a}}{a+\frac{1}{a}} = \frac{a^2-1}{a^2+1}$ .... 1 točka
Poenostavitev izraza do oblike $4 \cdot \frac{a^2-1}{a^2+1} - 2 \cdot \frac{a^2-1}{a}$ .... 1 točka
Zapis izraza v skrčeni obliki $\frac{-2(a-1)^3(a+1)}{(a^2+1)a}$ .... 1 točka
Izračun, da je vrednost izraza enaka 0 za $a = -1$ in $a = 1$ .... 1+1 točka

21. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

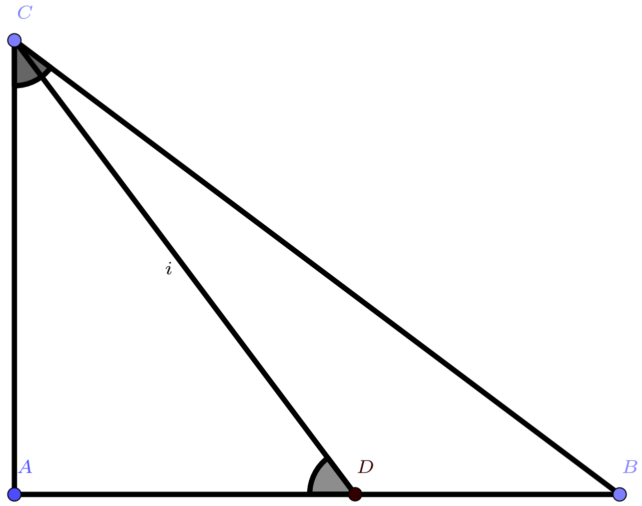
Rešitve nalog za 2. letnik

A1	A2	A3
E	B	B

A1. Če se premici sekata na ordinatni osi, je x koordinata presečišča enaka 0. V obe enačbi premice vstavimo za $x = 0$ ter ju poenostavimo do npr. $-ay + 2y - 2 = 0$ in $4y - ay + 2 = 0$. Dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama, ki ga rešimo na katerikoli način. Rešitvi sta $y = -2$ in $a = 3$. Pravilen odgovor je E.

A2. Poenostavimo prvi ulomek $\frac{(\sqrt[5]{(a^{-\frac{4}{3}})^{-\frac{5}{8}}})^{-3}}{(\sqrt[8]{(\sqrt[3]{a^4})^5})^{-\frac{3}{5}}} = 1$ in izračunamo vrednost drugega ulomka $\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = \frac{12}{29}$. Rezultat množenja teh dveh ulomkov je $\frac{12}{29}$. Pravilen je odgovor B.

A3. Uporabimo kotne funkcije v pravokotnem trikotniku $\tan\alpha = \frac{v_c}{b_1} = \frac{\sqrt{12}}{4} =$ in izračunamo kot $\alpha \doteq 40,89°$. Pravilen je odgovor B.



B1. Trikotnik ABC je podoben trikotniku ACD.

a) Zapišemo sorazmerje $|AB| : |AC| = |BC| : |CD|$. Upoštevamo, da je $|AB| : |AC| = 4 : 3$ in dolžina daljice CD meri $7,5\ cm$ in dobimo enačbo $4 : 3 = |BC| : 7,5$. Z rešitvijo enačbe izračunamo dolžino daljice BC, ki je $10\ cm$.

b) Ker je $|AB| : |AC| = 4 : 3$ lahko $|AB|$ in $|AC|$ zapišemo kot $|AB| = 4x$ in $|AC| = 3x$. Zaradi podobnosti trikotnikov ABC in ACD lahko zapišemo sorazmerje $|AC| : |AB| = |AD| : |AC|$ vanj vstavimo $|AB| = 4x$ in $|AC| = 3x$ in dobimo $3x : 4x = |AD| : 3x$ izrazimo $|AD| = \frac{9x}{4}$. Obseg trikotnika ACD je $18\ cm$ torej je $3x + \frac{9x}{4} + 7,5 = 18$ in $x = 2$. Dolžini stranic sta $|AC| = 3x = 6\ cm$ in $|AD| = \frac{9x}{4} = \frac{9}{2}$.

Ugotovitev, da sta trikotnika ABC in ACD podobna .... 1 točka
Zapis sorazmerja $|AB| : |AC| = |BC| : |CD|$ .... 1 točka
Upoštevanje sorazmerja $|AB| : |AC| = 4 : 3$ ali zapis enačbe $4 : 3 = |BC| : 7,5$ .... 1 točka
Zapis dolžine $|BC| = 10\ cm$ .... 1 točka
Zapis ali upoštevanje sorazmerja $|AC| : |AB| = |AD| : |AC|$ .... 1 točka

Izražena dolžina stranice $|AD| = \frac{9x}{4}$ .... 1 točka
Zapisan ali upoštevan obrazec za obseg trikotnika $3x + \frac{9x}{4} + 7,5 = 18$ .... 1 točka
Izračun dolžin $|AC| = 6\ cm$ in $|AD| = \frac{9}{2}\ cm$ .... 1 točka

B2. Premica s koordinatnima osema oblikuje pravokotni trikotnik, katerega ploščino izračunamo kot polovični produkt med katetama $p = \frac{k_1 \cdot k_2}{2}$. Iz naloge je razvidno, da je dolžina ene katete 3, dolžino druge katete pa izračunamo s pomočjo ploščine in dobimo rezultat 6. Ker je smerni koeficient premice pozitiven, premica seka koordinatni osi v točkah $(-3, 0)$ in $(0, 6)$, s pomočjo teh dveh točk lahko zapišemo vse tri oblike enačbe premice. Odsekovna oblika $\frac{x}{-3} + \frac{y}{6} = 1$, implicitna oblika $-2x + y - 6 = 0$ in eksplicitna oblika $y = 2x + 6$.

Ugotovitev, da je trikotnik pravokotni .... 1 točka
Zapis ali uporaba obrazca za ploščino pravokotnega trikotnika $p = \frac{k_1 \cdot k_2}{2}$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba, da je dolžina ene katete 3 enote .... 1 točka
Izračun druge katete 6 enot .... 1 točka
Zapis ali uporaba točk $(-3, 0)$ in $(0, 6)$ .... 1 točka
Odsekovna oblika $\frac{x}{-3} + \frac{y}{6} = 1$ .... 1 točka
Implicitna oblika $-2x + y - 6 = 0$ .... 1 točka
Eksplicitna oblika $y = 2x + 6$ .... 1 točka

B3.

a) Dani izraz $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ v števcu in imenovalcu pomnožimo z $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ ter poenostavimo $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x-1})^2} = \frac{x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}+x-1}{x+1-(x-1)} = \frac{2x+2\sqrt{(x+1)(x-1)}}{2} = x + \sqrt{x^2-1}$.

b) Vstavimo $x = \frac{5}{4}$ v racionaliziran izraz $\frac{5}{4} + \sqrt{(\frac{5}{4})^2 - 1} = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{16}{16}} = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2$. Lahko pa vstavimo $x = \frac{5}{4}$ v dani izraz $\frac{\sqrt{\frac{5}{4}+1}+\sqrt{\frac{5}{4}-1}}{\sqrt{\frac{5}{4}+1}-\sqrt{\frac{5}{4}-1}} = \frac{\sqrt{\frac{9}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\frac{9}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{2}}{\frac{2}{2}} = 2$.

Množenje danega izraza z $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ .... 1 točka
Izračun števca do oblike $x + 1 + 2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1} + x - 1$ .... 2 točki
Izračun imenovalca do oblike $x + 1 - (x - 1)$ .... 1 točka
Poenostavitev izraza do oblike $\frac{2x+2\sqrt{(x+1)(x-1)}}{2} = x + \sqrt{x^2-1}$ .... 1+1 točka
Izračun vrednosti izraza $x + \sqrt{x^2-1} = \frac{5}{4} + \sqrt{(\frac{5}{4})^2 - 1} = 2$ .... 1+1 točka

21. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Rešitve nalog za 3. letnik

A1	A2	A3
D	D	D

A1. S pomočjo obrazca za izračun površine pravilne štiristrane prizme $P = 2a^2 + 4av$, dobimo kvadratno enačbo $128 = 2a^2 + 24a$. Rešitvi kvadratne enačbe sta $a = 4$ in $a = -16$. Ugotovimo, da je pravilna rešitev $a = 4$. Osnovni rob prizme meri $a = 4\ m$. Z obrazcem $D = \sqrt{2a^2 + v^2}$ izračunamo dolžino telesne diagonale $D \doteq 8,25\ m$. Pravilen je odgovor D.

A2. Ugotovimo, da bo definicijsko območje dane funkcije f množica vseh realnih števil ob pogoju $x^2 + (a + 4)x + 9 > 0$. To pa bo izpolnjeno, če bo $D < 0$. Poenostavimo levo stran neenačbe:

$$D = b^2 - 4ac = (a + 4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = a^2 + 8a - 20 = (a + 10)(a - 2)$$

Rešimo kvadratno neenačbo $(a + 10)(a - 2) < 0$. Rešitvi kvadratne enačbe $(a + 10)(a - 2) = 0$ sta $a_1 = -10$ in $a_2 = 2$. Rešitev kvadratne neenačbe pa ustreza intervalu $-10 < a < 2$. Pravilen je odgovor D.

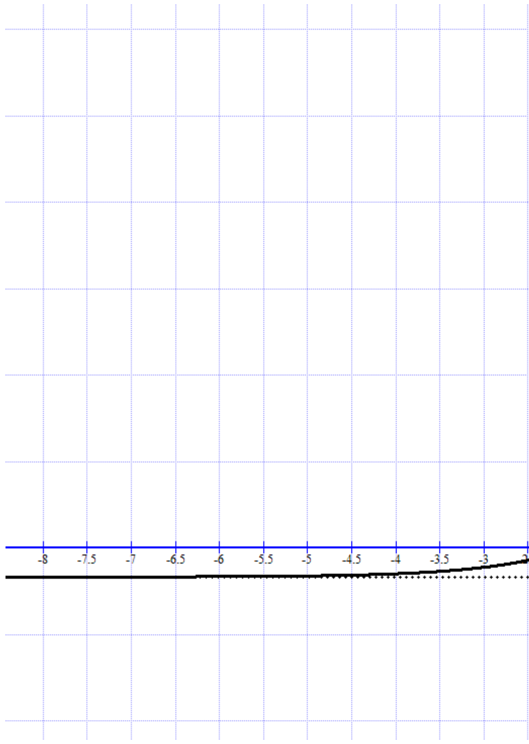
A3. Ugotovimo, da je prostornina vode $19\ dm^3$. Zapišemo podatke v obrazec za prostornino vode (x je višina vode v akvariju) in dobimo enačbo $V = 5 \cdot 2 \cdot x = 19$. Izračunamo $x = 1,9\ dm$ $= 19\ cm$. Nivo vode bo torej $6\ cm$ nižje od zgornjega roba akvarija. Pravilen je odgovor D.

B1. Iz obsega paralelograma izračunamo dolžino stranice $b = 16\ m$. S kotno funkcijo sinus izračunamo višino na osnovnico a, $v_a = b \sin 60° = 8\sqrt{3}\ m$. Izračunamo ploščino osnovne ploskve $O = av_a = 104\sqrt{3}\ m^2$. S kosinusnim izrekom $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ izračunamo dolžino diagonale, ki je enaka višini prizme $v = \sqrt{217}\ m$. Izračunamo ploščino plašča $S = ov = 58\sqrt{217}$ m^2. Natančno zapišemo izračun površine $P = 2O + S = (208\sqrt{3} + 58\sqrt{217})\ m^2$. Zapišemo še izračun prostornine $V = Ov = 104\sqrt{651}\ m^3$.

Izračun dolžine stranice $b = 16\ m$ .... 1 točka
Izračun višine paralelograma $v_a = b \sin 60° = 8\sqrt{3}\ m$ .... 1 točka
Izračun ploščine osnovne ploskve $O = av_a = 104\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$ .... 1 točka
Uporaba kosinusnega izreka $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ .... 1* točka
Izračun višine prizme $v = \sqrt{217}\ m$ .... 1 točka
Izračun ploščine plašča $S = Ov = 58\sqrt{217}\ m^2$ .... 1 točka
Izračun površine $P = (208\sqrt{3} + 58\sqrt{217})\ m^2$ .... 1 točka
Izračun prostornine $V = 104\sqrt{651}\ m^3$ .... 1 točka

B2.

a) Vstavimo $b = -1$ v predpis funkcije f in narišemo njen graf: graf lahko rišemo s premiki vzdolž abscisne in ordinatne osi ali z izračunom ničle, presečišča z ordinatno osjo ter vodo-



ravno asimptoto. Zapišemo še njeno zalogo vrednosti $(-\frac{1}{3}, \infty)$.

b) Vstavimo $x = \frac{1}{2}$ v predpis funkcije f in dobimo enačbo $3^{\frac{1}{2}-b} - \frac{1}{3} = 0$. Rešimo enačbo in dobimo rešitev $b = \frac{3}{2}$.

c) Vstavimo $b = 2$ v predpis funkcije f in le tega izenačimo s 6, enačbo preoblikujemo do oblike $3^{x-2} = \frac{19}{3}$, jo rešimo z logaritmiranjem in na ta način izračunamo absciso presečišča na dve mesti natančno $x \doteq 3,7$.

Narisan graf funkcije f .... 2 točki
Zapis zaloge vrednosti $(-\frac{1}{3}, \infty)$ .... 1 točka
Zapis enačbe $3^{\frac{1}{2}-b} - \frac{1}{3} = 0$ .... 1 točka
Rešitev $b = \frac{3}{2}$ .... 1 točka
Zapis enačbe $3^{x-2} = \frac{19}{3}$ .... 1 točka
Reševanje enačbe (logaritmiranje) .... 1* točka
Zapis abscise presečišča $x \doteq 3,7$ .... 1 točka

B3. Z upoštevanjem pravila za vsoto logaritmov preoblikujemo dano enačbo v $\log 10(2^x + 1) = \log 2(4^x + 9)$. Enačbo antilogaritmiramo do oblike $10(2^x + 1) = 2(4^x + 9)$ in jo z uvedbo nove neznanke $2^x = t$ preoblikujemo v enačbo $t^2 - 5t + 4 = 0$. Rešitvi enačbe sta $t_1 = 1$ in $t_2 = 4$. Izračunamo še vrednosti prvotnih neznank enačbe $x_1 = 0$ in $x_2 = 2$.

Upoštevanje $1 = log 10$ .... 1 točka
Zapis enačbe $\log 10(2^x + 1) = \log 2(4^x + 9)$ .... 1 točka
Antilogaritmiranje enačbe .... 1* točka
Uvedba nove neznanke $2^x = t$ .... 1 točka
Zapis enačbe $t^2 - 5t + 4 = 0$ .... 1 točka
Rešitvi $t_1 = 1$ in $t_2 = 4$ .... 1 točka
Rešitvi prvotne enačbe $x_1 = 0$ in $x_2 = 2$ .... 2 točki

21. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 15. maj 2021

Rešitve nalog za 4. letnik

A1	A2	A3
E	C	C

A1. Vrednost odvoda funkcije f v iskanih točkah mora biti enaka tangensu naklonskega kota tangente v teh točkah $f'(x) = \tan 135° = -1$. Rešimo enačbo $3x^2 - 4x = -1$. Enačbo uredimo in izračunamo abscisi iskanih točk $x_1 = 1$ in $x_2 = \frac{1}{3}$. Izračunamo funkcijski vrednosti $f(x_1) = f(1) = 2$ in $f(x_2) = f(\frac{1}{3}) = \frac{76}{27}$. Zapišemo točki $T_1(1, 2)$ in $T_2(\frac{1}{3}, \frac{76}{27})$. Pravilen je odgovor E.

A2. Upoštevamo zvezo med zaporednimi členi geometrijskega zaporedja. Rešimo iracionalno enačbo in dobimo rešitvi $x_1 = 1$ in $x_2 = \frac{1}{49}$. Edina celoštevilska rešitev je 1. Nato izračunamo člene zaporedja $a_1 = 3, a_2 = 3\sqrt{2}, a_3 = 6$. Izračunamo količnik $q = \sqrt{2}$. Pravilen je odgovor C.

A3. Števec prvega ulomka razstavimo kot razliko kvadratov $\sin^2 x - \cos^2 x = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)$, imenovalec pa zapišemo kot vsoto obratnih vrednosti $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ in dobljena ulomka seštejemo. Števec drugega ulomka zapišemo $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, v imenovalcu drugega ulomka pa izpostavimo $\cos x - \sin x = -(\sin x - \cos x)$. Sledi krajšanje ulomkov in dobimo rezultat $-\sin^2 x$. Pravilen je odgovor C.

B1. Enačbo lahko rešimo s pomočjo uporabe Hornerjevega algoritma in dobimo rešitve $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ugotovimo, da sta prvi dve rešitvi racionalni, drugi dve pa iracionalni. Izračunamo kvadrat vsote prvih dveh rešitev in dobimo $\frac{1}{4}$ ter kvadrat vsote drugih dveh rešitev in dobimo 0. Nazadnje izračunamo še razliko kvadratov vsote racionalnih rešitev in vsote iracionalnih rešitev enačbe ter dobimo rešitev $\frac{1}{4}$.

Uporaba ustrezne metode za reševanje enačbe .... 1* točka
Izračun racionalnih rešitev enačbe $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ .... 2 točki
Izračun iracionalnih rešitev enačbe $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .... 2 točki
Izračun kvadrata vsote racionalnih rešitev $\frac{1}{4}$ .... 1* točka
Izračun kvadrata vsote iracionalnih rešitev 0 .... 1* točka
Izračun razlike kvadratov vsote racionalnih rešitev in vsote iracionalnih rešitev enačbe $\frac{1}{4}$ ... 1 točka

B2. Najprej dvakrat uporabimo adicijska izreka in izraza kar se da poenostavimo $\cos(60° - x) = \cos 60° \cdot \cos x + \sin 60° \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x$ in $\sin(120° - x) = \sin 120° \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 120° = \frac{1}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x$. Produkt dobljenih poenostavljenih izrazov je potem $\frac{\sqrt{3}+4\sin x\cos x}{4}$. Količnik $\frac{\sqrt{3}+4\sin x\cos x}{\cos(60°-x)\cdot\sin(120°-x)}$ je po razrešitvi dvojnih ulomkov enak 4.

Uporaba adicijskega izreka $\cos(60° - x) = \cos 60° \cdot \cos x + \sin 60° \cdot \sin x = \frac{1}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x$ 1+1 točka
Uporaba adicijskega izreka $\sin(120° - x) = \sin 120° \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 120° = \frac{1}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x$ 1+1 točka
Izračun $(\frac{1}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x)(\frac{1}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2 x + \sin x \cos x$ .. 1 točka
Izračun $\frac{\sqrt{3}}{4}(\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} + \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}+4\sin x\cos x}{4}$ .... 1+1 točka

Razrešitev dvojih ulomkov in rezultat 4 .... 1 točka

B3. Ugotovimo, da je skupna pot obeh teles enaka 450 m. Pot, ki jo opravi telo A do srečanja, je vsota aritmetičnega zaporedja z začetnim členom $a_1 = 5$ m in diferenco $d_1 = 15$ m. Pot, ki jo opravi telo B do srečanja, je vsota aritmetičnega zaporedja z začetnim členom $b_1 = 100$ m in diferenco $d_2 = -10$ m. Naj bo n čas v minutah, ki preteče od začetka poti do srečanja. Vstavimo podatke v obrazec za vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja in zapišimo poti obeh teles.

Telo A opravi pot

$$S_A = \frac{n}{2}(2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 15),$$

telo B pa pot

$$S_B = \frac{n}{2}(2 \cdot 100 + (n-1) \cdot (-10)).$$

Upoštevamo, da skupna pot obeh teles $S_A + S_B$ meri $450\ m$. Dobimo enačbo

$$\frac{n}{2}(2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 15) + \frac{n}{2}(2 \cdot 100 + (n-1) \cdot (-10)) = 450.$$

Enačbo preuredimo in dobimo kvadratno enačbo

$$n^2 + 41n - 180 = 0.$$

Enačbo rešimo in dobimo $n_1 = 4, n_2 = -45$. Negativna rešitev nima pomena, torej sta telesi porabili za pot do srečanja 4 minute. Izračunamo še pot, ki jo v tem času opravi telo A.

$$S_A = \frac{n}{2}(2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 15)$$

$$S_A = \frac{4}{2}(2 \cdot 5 + (4-1) \cdot 15) = 2(10 + 45) = 110.$$

Telesi se srečata po 4 minutah. Telo A opravi pot $110\ m$.

Ugotovitev, da skupna pot obeh teles meri $450\ m$. .... 1 točka
Zapis poti telesa A $a_1 = 5$, $d_1 = 15$ in pot $S_A = \frac{n}{2}(2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 15)$ .... 1 točka
Zapis poti telesa B $b_1 = 100$ in $d_2 = -10$ in pot $S_B = \frac{n}{2}(2 \cdot 100 + (n-1) \cdot (-10))$. .... 1 točka
Zapis enačbe $\frac{n}{2}(2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 15) + \frac{n}{2}(2 \cdot 100 + (n-1) \cdot (-10)) = 450$. .... 1 točka
Reševanje enačbe $n^2 + 41n - 180 = 0$. .... 1* točka
Izločitev neustrezne rešitve $n_2 = -45$. .... 1 točka
Ugotovitev, da opravita pot v 4 minutah. .... 1 točka
Izračun poti, ki jo opravi telo A od začetka poti do srečanja $S_A = \frac{4}{2}(2 \cdot 5 + (4-1) \cdot 15) = 2(10 + 45) = 110$. .... 1 točka