Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

22. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 23. april 2022

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Kolikšna je absolutna vrednost razlike rešitev enačbe $(1-(1+x^{-2})^{-1})^{-1}=3{,}25$?

(A) -3 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 3 **(E)** 0

A2. V posodi je $60\ \%$ rdečih in $40\ \%$ modrih bonbonov. $30\ \%$ rdečih in $15\ \%$ modrih bonbonov je čokoladnih. Koliko procentov bonbonov ni čokoladnih?

(A) $24\ \%$ **(B)** $85\ \%$ **(C)** $90\ \%$ **(D)** $76\ \%$ **(E)** $45\ \%$

A3. Dan je izraz $\dfrac{x^{n-1}}{x^n-2x^{n-1}}-\dfrac{x^n}{x^{n+1}-4x^{n-1}}$. Kateri izraz je ekvivalenten izrazu za $x\neq 0$?

(A) $\frac{1}{(x-2)}$ **(B)** $\frac{2}{(x-2)(x+2)}$ **(C)** $\frac{1}{(x+2)}$ **(D)** $\frac{2x}{(x-2)(x+2)}$ **(E)** $\frac{1-x}{(x-2)(x+2)}$

B1. Poenostavi izraz $\frac{a^2-4}{a^2-4a+4} : \frac{a^2+5a+6}{a-2} - \frac{a^6-1}{a^4-a^3+a-1} : \frac{(a+3)(a^2+a+1)}{-a+1} + \frac{a^{n-1}}{a^n+3a^{n-1}}$, kjer je $a \in \mathbb{R}$ in hkrati $|a| > 3$.

B2. Točke $A(3,-6)$, B in C so koordinate trikotnika s ploščino 34 in negativno orientacijo. Izračunaj koordinate točke C, če je ordinata točke C dvakratnik njene abscise in sta koordinati točke B rešitvi sistema enačb $7x-\frac{5y}{6}=\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{16}{3}$, $\frac{3x}{2}+\frac{y}{3}=\frac{2x}{3}+\frac{7y}{6}$, kjer je x prva koordinata in y druga koordinata točke B.

B3. Tone, Luka in Tine so zbirali star papir in dobili denarno nagrado. Prvotno naj bi bila nagrada razdeljena v razmerju $7 : 6 : 5$. Kasneje so dogovor spremenili in razdelili nagrado v razmerju $6 : 5 : 4$. Obe razmerji sta zapisani v istem vrstem redu, kot so navedena imena.

(a) Katera delitev je za Tineta ugodnejša? Utemelji odgovor.

(b) Tone je dobil pri drugi delitvi 216 evrov več kot Tine. Koliko evrov je dobil vsak izmed njih?

22. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 23. april 2022

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Kateri izraz je ekvivalenten danemu izrazu $\frac{\sqrt[3]{4a^2 \cdot \sqrt[3]{ab}} \cdot (a+b)^0}{(8b^{-2}\sqrt{a})^{-\frac{2}{3}}}$; $a, b, a+b \neq 0$?

(**A**) $2^{\frac{8}{3}} a^{\frac{10}{9}} b^{-\frac{11}{9}}$ (**B**) $2^{\frac{2}{3}} a^{\frac{5}{6}} b^{\frac{4}{9}}$ (**C**) $2^{-3} a^{-\frac{5}{3}} b^{\frac{7}{9}}$ (**D**) $2^{-\frac{7}{6}} a^{-\frac{10}{3}} b^{\frac{5}{9}}$ (**E**) $2^{\frac{7}{3}} a^{-2} b^{\frac{1}{6}}$

A2. V trapezu $ABCD$ je dolžina kraka AD enaka $13\ cm$ in dolžina kraka BC enaka $9\ cm$. Kot $\sphericalangle BAD$ meri $37°$. Kolikšna je velikost kota $\sphericalangle BCD$, zaokrožena na dve decimalni mesti, če je kot $\sphericalangle CBA$ ostri?

(**A**) $37°$ (**B**) $143°$ (**C**) $48{,}29°$ (**D**) $119{,}62°$ (**E**) $71{,}59°$

A3. Za padajočo linearno funkcijo $f(x) = k \cdot x + n$ velja $f(x+y) = f(x) + f(y) - 3$ in $f(k) = 2f(1)$, za vsak $x, y \in \mathbb{R}$. Koliko je vrednost $f(-1)$?

(**A**) 4 (**B**) 0 (**C**) 2 (**D**) -2 (**E**) -4

B1. Za linearno funkcijo f velja:
a) Če njen smerni koeficient povečamo za 1 in prosti člen za 2, se njena vrednost pri nekem x_0 poveča za 5.
b) Če ta x_0 zmanjšamo za 2, ima funkcija f šestkrat tolikšno vrednost kot pri x_0.
c) Graf funkcije f poteka skozi točko $A(4,-3)$.
Zapiši ustrezne zveze in izračunaj predpis za $f(x)$ in vrednost x_0.

B2. Kvocient dolžin katete a in hipotenuze c v pravokotnem trikotniku je $3:4$.
a) Pod katerim kotom se sekata simetrali ostrih kotov?
b) Pod katerim kotom seka simetrala kota α nasprotno kateto?

B3. Za $x>0$ poenostavi izraz $(\sqrt{7}+2) \cdot \sqrt{11\sqrt{x}-4\sqrt{7x}}+\sqrt[3]{27x^{-3}+27x^{-2}+9x^{-1}+1}-\frac{3x}{\sqrt[4]{x^{3}}}$.

22. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 23. april 2022

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Kaj je rešitev enačbe $\sqrt[5]{9^{x-3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$?

(**A**) $x = -\frac{7}{4}$ (**B**) $x = -\frac{4}{7}$ (**C**) $x = \frac{4}{7}$ (**D**) $x = \frac{7}{4}$ (**E**) $x = -\frac{9}{4}$

A2. Kolikšen je natančen volumen vrtenine, ki jo dobimo, če pravokotnik s stranicama $a = 2$ cm in $b = 3$ cm zavrtimo okoli simetrale krajše stranice?

(**A**) $2\pi\ cm^3$ (**B**) $4\pi\ cm^3$ (**C**) $12\pi\ cm^3$ (**D**) $\pi\ cm^3$ (**E**) $3\pi\ cm^3$

A3. Katera tangenta na parabolo z enačbo $y = x^2 + x + 9$ je vzporedna premici z enačbo $-4x + 2y - 5 = 0$?

(**A**) $4x - 8y + 37 = 0$ (**B**) $4x - 8y - 37 = 0$ (**C**) $8x - 4y - 35 = 0$
(**D**) $-4x - 8y + 37 = 0$ (**E**) $8x - 4y + 35 = 0$

B1. Oglišča trikotnika ABC ležijo na krožnici s polmerom $5\ cm$ in jo delijo tako, da je razmerje velikosti notranjih kotov trikotnika $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$.

a) Na dve decimalni mesti natančno izračunaj dolžino najdaljše stranice.

b) Središčni izsek, katerega tetiva je najdaljša stranica trikotnika, zvijemo v stožec. Natančno izračunaj površino plašča stožca.

B2. Kvadratna funkcija h ima teme v presečišču grafov funkcij $f(x) = \log_3 x$ in $g(x) = -x + 4$ ter začetno vrednost -17. Zapiši predpis kvadratne funkcije h v splošni in temenski obliki. Grafa obeh funkcij f in g nariši v isti kartezični koordinatni sistem.

B3. Reši enačbo $4 \cdot 25^x + 5 \cdot 16^x = 9 \cdot 20^x$.

dMFA

22. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 23. april 2022

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Koliko je $\frac{13}{5}\sin x$, če je $\frac{13}{12}\cos x = -1$?

(**A**) 1 (**B**) $\frac{5}{13}$ (**C**) $-\frac{5}{13}$ (**D**) -1 (**E**) ± 1

A2. Želimo splesti $20\ m$ dolg navijaški šal. V koliko dneh ga bomo dokončali, če prvi dan spletemo $18\ cm$, nato pa vsak naslednji dan za $4\ cm$ več kot predhodni dan?

(**A**) v 27 dneh (**B**) v 18 dneh (**C**) v 36 dneh (**D**) v 28 dneh (**E**) v 497 dneh

A3. Hkrati vržemo 3 poštene igralne kocke različnih barv. V koliko primerih lahko dobimo vsoto pik 10?

(**A**) 30 (**B**) 27 (**C**) 10 (**D**) 6 (**E**) 36

B1. Vsota četrtega in šestega člena aritmetičnega zaporedja je kvadrat rešitve enačbe

$$\sqrt{16y+9}-\sqrt{y-1}=\sqrt{9y+10}.$$

Razlika petega in tretjega člena je enaka rešitvi enačbe

$$4^{y-1}-2^{2y-3}-16^{4}=4^{y-2}.$$

Koliko je vsota prvih trideset členov tega zaporedja?

B2. V množici realnih števil natančno reši enačbo $\dfrac{x^6 - 5x^3}{14} = 1$.

B3. Reši dani nalogi: a) Izračunaj presečišči in velikost kota med krivuljama $y = -x^{-2}$ in $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$. b) Dana je funkcija $f(x) = \frac{x}{\ln x}$. Določi definicijsko območje funkcije f in intervale, na katerih funkcija f narašča in pada.

22. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 23. april 2022

Rešitve nalog za 1. letnik

A1	A2	A3
D	D	B

A1. Enačbo prevedemo v obliko $x^{-2} = \frac{4}{9}$. Rešitvi sta $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ in $-\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$. Števili se razlikujeta za 3. Pravilen je odgovor D.

A2. Rdečih čokoladnih je $0,6 \cdot 0,3 = 0,18$, kar je 18 %. Modrih čokoladnih je $0,4 \cdot 0,15 = 0,06$, kar je 6 %. Vseh čokoladnih je vsota, torej 24 % in tistih, ki niso čokoladni 76 %. Pravilen je odgovor D.

A3. V imenovalcih ulomkov izpostavimo skupni faktor ter krajšamo, kar se da $\frac{x^{n-1}}{x^n-2x^{n-1}} - \frac{x^n}{x^{n+1}-4x^{n-1}} = \frac{x^{n-1}}{x^{n-1}(x-2)} - \frac{x^n}{x^{n-1}(x^2-4)} = \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{x^{-1}(x^2-4)}$. Seštejemo ulomka $\frac{1}{(x-2)} - \frac{x}{(x^2-4)} = \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} - \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{(x-2)(x+2)}$. Pravilen je odgovor B.

B1. Razstavimo izraze in izpostavimo skupni faktor $\frac{(a-2)(a+2)}{(a-2)(a-2)} : \frac{(a+2)(a+3)}{a-2} - \frac{(a^3-1)(a^3+1)}{(a^3+1)(a-1)} : \frac{(a+3)(a^2+a+1)}{-a+1} + \frac{a^{n-1}}{a^{n-1}(a+3)}$. Krajšamo ter delimo $\frac{(a+2)}{(a-2)} \cdot \frac{(a-2)}{(a+2)(a+3)} - \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a-1)} \cdot \frac{-a+1}{(a+3)(a^2+a+1)} + \frac{1}{a+3}$. Poenostavimo do oblike $\frac{1}{a+3} - \frac{-a+1}{a+3} + \frac{1}{a+3}$. Seštejemo in dobimo rezultat $\frac{a+1}{a+3}$.

Razstavljanje prvega dela izraza $\frac{(a-2)(a+2)}{(a-2)(a-2)} : \frac{(a+2)(a+3)}{a-2}$ .... 1 točka
Poenostavitev prvega dela izraza do oblike $\frac{(a+2)}{(a-2)} \cdot \frac{(a-2)}{(a+2)(a+3)} = \frac{1}{a+3}$ .... 1 točka
Razstavljanje drugega dela izraza $\frac{(a^3-1)(a^3+1)}{(a^3+1)(a-1)} : \frac{(a+3)(a^2+a+1)}{-a+1}$ .... 1 točka
Poenostavitev drugega dela izraza do oblike $\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a-1)} \cdot \frac{-a+1}{(a+3)(a^2+a+1)} = \frac{-a+1}{a+3}$ .... 1 točka
Razstavljanje tretjega dela izraza $\frac{a^{n-1}}{a^{n-1}(a+3)}$ .... 1 točka
Poenostavitev tretjega dela izraza do oblike $\frac{1}{a+3}$ .... 1 točka
Zapisana vsota $\frac{1}{a+3} - \frac{-a+1}{a+3} + \frac{1}{a+3} = \frac{1-(-a+1)+1}{a+3}$ .... 1 točka
Rešitev $\frac{a+1}{a+3}$ .... 1 točka

B2. Enačbi $7x - \frac{5y}{6} = \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{16}{3}$, $\frac{3x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{2x}{3} + \frac{7y}{6}$ poenostavimo $40x - 8y = 32$, $5x - 5y = 0$, ter rešimo sistem. Dobimo rešitvi $x = 1$, $y = 1$. Tako imamo točke trikotnika $A(3, -6)$, $B(1, 1)$ in $C(x, 2x)$. Ker je ploščina 34 in orientacija negativna, za determinanto $|D| = 2S$ vstavimo -68. Torej $D = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$, $-68 = (1 - 3)(2x + 6) - (1 + 6)(x - 3)$. Rešimo enačbo ter dobimo $x = 7$. Koordinati točke $C(x, 2x)$ sta $C(7, 14)$.

Poenostavitev enačb $7x - \frac{5y}{6} = \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{16}{3}$, $\frac{3x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{2x}{3} + \frac{7y}{6}$ do oblike $40x - 8y = 32$, $5x - 5y = 0$
1 točka
Rešitev sistema enačb $x = 1$, $y = 1$ .... 2 točki
Zapis točke $C(x, 2x)$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba formule za ploščino ali determinanto npr. $D = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$ .... 1 točka
Vstavitev ustreznih podatkov $-68 = (1 - 3)(2x + 6) - (1 + 6)(x - 3)$ .... 1 točka
Rešitev enačbe $x = 7$ .... 1 točka
Rešitev $C(7, 14)$ .... 1 točka

B3. Tine bi po prvotnem dogovoru dobil $\frac{5}{7+6+5}=\frac{5}{18}=\frac{25}{90}$ celotne nagrade, po spremembi pa dobi $\frac{4}{6+5+4}=\frac{4}{15}=\frac{24}{90}$ nagrade. Zato je za Tineta ugodnejša prva delitev.
Vemo, da so razdelili nagrado v razmerju $6:5:4$. Tako je Tonetov delež enak $6x$, Lukov $5x$, Tinetov pa $4x$. Zapišemo zvezo med Tonetovim in Tinetovim deležem $6x-216=4x$ in dobimo $x=108$. Tone je torej dobil $6x=6\cdot 108=648$ evrov, Luka $5x=5\cdot 108=540$ evrov, Tine pa $4x=4\cdot 108=432$ evrov.

Zapis Tinetovega deleža po prvotnem dogovoru $\frac{5}{18}$ .... 1 točka
Zapis Tinetovega deleža po spremembi dogovora $\frac{4}{15}$ .... 1 točka
Ugotovitev, da bi bil prvotni dogovor za Tineta ugodnejši .... 1 točka
Zapis deležev Tone $6x$, Luka $5x$, Tine $4x$ .... 1 točka
Zapis zveze med Tonetovim in Tinetovim deležem $6x-216=4x$ .... 1 točka
Rešitev enačbe $x=108$ .... 1 točka
Izračun deležev:
Tone $6x=6\cdot 108=648$ evrov, Luka $5x=5\cdot 108=540$ evrov, Tine pa $4x=4\cdot 108=432$ evrov.1 točka
Odgovor Tone je torej dobil 648 evrov, Luka 540 evrov, Tine pa 432 evrov. .... 1 točka

22. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 23. april 2022

Rešitve nalog za 2. letnik

A1	A2	A3
A	D	A

A1. Izraz zapišemo s potencami in dobimo $\frac{4^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{9}}b^{\frac{1}{9}}\cdot 1}{8^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}a^{-\frac{1}{3}}}$. Števili 4 in 8 zapišemo kot potenco števila 2 in izraz zapišemo brez ulomka ter dobimo $2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^2\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{9}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{9}}\cdot b^{-\frac{4}{3}}$. Ko združimo potence, dobimo rezultat $2^{\frac{8}{3}}a^{\frac{10}{9}}b^{-\frac{11}{9}}$. Pravilen je odgovor A.

A2. Izračunamo višino trapeza $v = d\cdot \sin\alpha \doteq 7,82\ cm$. Potem iz $\sin\beta = \frac{v}{b}$ dobimo $\beta_1 \doteq 60,38°$ in $\beta_2 = 180° - \beta_1 \doteq 119,62°$. Pravilen je odgovor D.

A3. $f(x+y) = k(x+y)+n = kx+ky+n$ in $f(x)+f(y)-3 = kx+n+ky+n-3$. Iz tega dobimo $n = 3$. Iz $f(k) = 2f(1)$ dobimo enačbo $k\cdot k+3 = 2k+6$. Preoblikujemo jo v $k^2-2k-3 = 0$. Rešitev 3 ne ustreza. Za rešitev -1 dobimo $f(x) = -x+3$. Zato je $f(-1) = 4$. Pravilen je odgovor A.

B1. Linearna funkcija ima predpis $f(x) = k\cdot x+n$.
Pri x_0 ima vrednost $y_0 = f(x_0) = k\cdot x_0+n$. Če smerni koeficient k povečamo za 1 in prosti člen n za 2, dobimo funkcijo $g(x) = (k+1)\cdot x+n+2$. Vstavimo x_0 in dobimo $g(x_0) = (k+1)\cdot x_0+n+2 = k\cdot x_0+x_0+n+2 = y_0+x_0+2$. Ker se v tem primeru vrednost funkcije $y_0 = f(x_0)$ poveča za 5, dobimo $x_0+2 = 5$ in $x_0 = 3$.
Pri $x_0-2 = 3-2 = 1$ ima funkcija $f(x)$ vrednost $f(1) = k\cdot 1+n = k+n$. Upoštevamo, da je to šestkrat toliko kot $y_0 = f(x_0) = f(3) = k\cdot 3+n$ in dobimo enačbo $k+n = 6(3k+n)$. To se preoblikuje v $17k+5n = 0$.
Če gre graf funkcije $f(x)$ skozi točko $A(4,-3)$, velja $f(4) = -3$. Dobimo enačbo $4k+n = -3$. Rešimo sistem enačb $17k+5n = 0$ in $4k+n = -3$ in dobimo $k = -5$ in $n = 17$. Iskana linearna funkcija ima torej predpis $f(x) = -5x+17$.

Upoštevanje pogoja pri a) npr. $g(x) = (k+1)\cdot x+n+2$ .... 1 točka
Upoštevanje povečanja vrednosti npr. $g(x_0) = y_0+5$ .... 1 točka
Izračun $x_0 = 3$ .... 1 točka
Zapis funkcije za pogoj b) pri x_0-2, npr. $f(1) = k+n$ .... 1 točka
Zapis ustrezne enačbe npr. $17k+5n = 0$ .... 1 točka
Zapis ustrezne enačbe za pogoj c) npr. $4k+n = -3$ .... 1 točka
Rešitev sistema $k = -5$ in $n = 17$ .... 1 točka
Zapis $f(x) = -5x+17$ .... 1 točka

B2. a) Kot med simetralama ostrih kotov je enak $\varphi = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Ker v pravokotnem trikotniku velja, da je $\alpha = 90° - \beta$, je kot φ enak $\varphi = 180° - \frac{90°-\beta}{2} - \frac{\beta}{2} = 180° - 45° = 135°$. Iskani kot je suplementaren kotu φ in je enak $45°$.
b) Kot med simetralo kota α in stranico a je enak $\varphi = 180° - \frac{\alpha}{2} - \beta$. Ker v pravokotnem trikotniku velja, da je $\beta = 90° - \alpha$, je kot φ enak $\varphi = 180° - \frac{\alpha}{2} - (90° - \alpha) = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Ker je velikost kota α enak $\alpha = sin^{-1}(\frac{3}{4}) = 48°35'$, je velikost iskanega kota enaka $\varphi = 114°18'$.

a) Zapis $\varphi = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$ .... 1 točka
Upoštevanje $\alpha = 90° - \beta$ .... 1 točka
Izračun kota $\varphi = 135°$ .... 1 točka

Upoštevanje, da je ustrezen kot suplementaren temu kotu $\varphi' = 45°$ .... 1 točka
b) Zapis $\varphi = 180° - \frac{\alpha}{2} - \beta$ .... 1 točka
Upoštevanje $\beta = 90° - \alpha$ .... 1 točka
Izračun kota $\alpha = sin^{-1}(\frac{3}{4}) = 48°35'$ .... 1 točka
Izračun iskanega kota $\varphi = 90° + \frac{\alpha}{2} = 114°18'$ .... 1 točka

B3. Najprej zapišemo $(\sqrt{7}+2)$ pod korenom $(\sqrt{7}+2) = \sqrt{(\sqrt{7}+2)^2} = \sqrt{11+4\sqrt{7}}$, nato zapišemo $\sqrt{11\sqrt{x}-4\sqrt{7x}}$ kot $\sqrt{(11-4\sqrt{7})\cdot\sqrt{x}}$ in izračunamo $(\sqrt{7}+2)\cdot\sqrt{11\sqrt{x}-4\sqrt{7x}} = \sqrt{(11+4\sqrt{7})\cdot(11-4\sqrt{7})\cdot\sqrt{x}} = 3\cdot\sqrt[4]{x}$. Nato izračunamo vrednost izraza $\sqrt[3]{27x^{-3}+27x^{-2}+9x^{-1}+1} = \sqrt[3]{\frac{27+27x+9x^2+x^3}{x^3}} = \sqrt[3]{\frac{(x+3)^3}{x^3}} = \frac{x+3}{x}$. Nato racionaliziramo ulomek $\frac{3x}{\sqrt[4]{x^3}}$ in dobimo $\frac{3x}{\sqrt[4]{x^3}} = 3\cdot\sqrt[4]{x}$. Ko vse člene seštejemo, dobimo vrednost iskanega izraza, ki je enaka $\frac{x+3}{x}$.

Zapis izraza $(\sqrt{7}+2)$ pod korenom $(\sqrt{7}+2) = \sqrt{11+4\sqrt{7}}$ .... 1 točka
Množenje pod korenom .... 1* točka
Izračun izraza $(\sqrt{7}+2)\cdot\sqrt{11\sqrt{x}-4\sqrt{7x}} = 3\cdot\sqrt[4]{x}$ .... 1 točka
Upoštevanje, da je $\sqrt[3]{27x^{-3}+27x^{-2}+9x^{-1}+1} = \sqrt[3]{\frac{27+27x+9x^2+x^3}{x^3}}$ .... 1 točka
Zapis izraza $27+27x+9x^2+x^3$ kot kub vsote $(x+3)^3$ .... 1 točka
Izračun kubičnega korena $\sqrt[3]{27x^{-3}+27x^{-2}+9x^{-1}+1} = \sqrt[3]{\frac{(x+3)^3}{x^3}} = \frac{x+3}{x}$ .... 1 točka
Racionalizacija ulomka $\frac{3x}{\sqrt[4]{x^3}} = 3\cdot\sqrt[4]{x}$ .... 1 točka
Rezultat $\frac{x+3}{x}$ .... 1 točka

22. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 23. april 2022

Rešitve nalog za 3. letnik

A1	A2	A3
D	E	E

A1. Enačbo preoblikujemo v obliko $9^{\frac{x-3}{5}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ in nadaje v obliko $3^{\frac{2x-6}{5}} = 3^{-\frac{1}{2}}$. Ko rešimo to eksponentno enačbo, dobimo rešitev $\frac{7}{4}$. Pravilen je odgovor D.

A2. Če pravokotnik s stranicama $a = 2\ cm$ in $b = 3\ cm$ zavrtimo okoli simetrale krajše stranice, dobimo vrtenino v obliki valja s polmerom $r = 1\ cm$ in višino $v = 3\ cm$. Volumen valja izračunamo po obrazcu $V = \pi r^2 v = 3\pi\ cm^3$. Pravilen je odgovor E.

A3. Zapišemo enačbo $x^2 + x + 9 = 2x + n$ in jo preoblikujemo do oblike $x^2 - x + 9 - n = 0$. Potem upoštevamo pogoj, da ima kvadratna enačba eno dvojno realno rešitev, če je vrednost diskriminante kvadratne enačbe enaka 0. V ta pogoj vstavimo vrednosti parametrov in dobimo enačbo $1 - 4(9 - n) = 0$. Rešitev te enačbe je $n = \frac{35}{4}$ in tako je enačba tangente $8x - 4y + 35 = 0$. Pravilen je odgovor E.

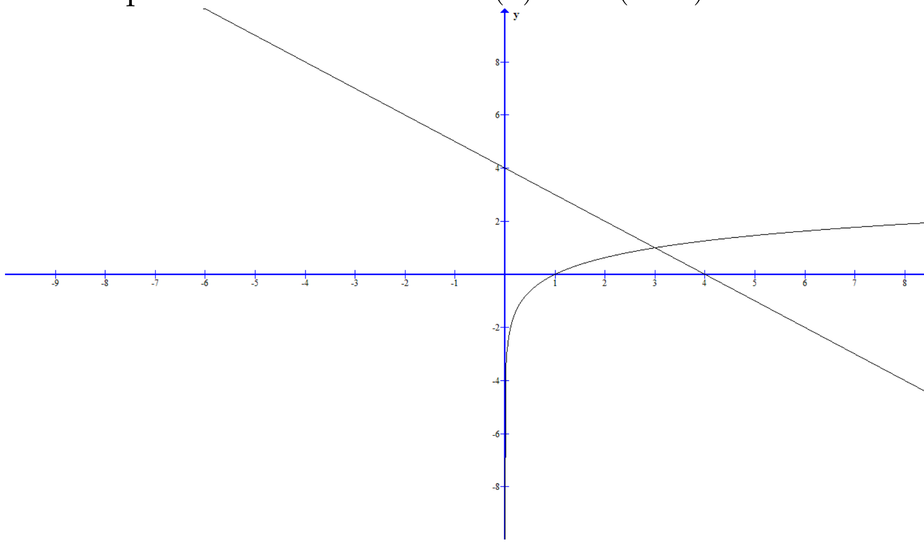
B1.

a) V razmerje $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$ uvedemo novo spremenljivko npr. t in upoštevamo, da je vsota notranjih kotov trikotnika $180°$. Dobimo enačbo $2t + 3t + 4t = 180°$, katere rešitev je $t = 20°$. Tako izračunamo velikost kotov in dobimo rezultat $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$ in $\gamma = 80°$. Najdaljša stranica trikotnika je c, saj leži nasproti največjega kota $\gamma = 80°$. Stranica c je tudi stranica trikotnika ABS. Kot nasproti stranice c v trikotniku ABS, je središčni kot obodnega kota $\gamma = 80°$ in meri $\angle ASB = 160°$, . Trikotnik ABS je enakokraki trikotnik s krakom $5\ cm$ in kotom ob vrhu $160°$. S pomočjo kosinusnega izreka $c^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot cos 160°$ ali pa uporabo kotnih funkcij $sin\frac{160°}{2} = \frac{\frac{c}{2}}{5}$ izračunamo stranico $c \doteq 9,85\ cm$.

b) Plašč stožca je enak ploščini krožnega izseka. Krožni izsek ima središčni kot $160°$ in polmer $5\ cm$. Ploščino krožnega izseka izračunamo po formuli $S_i = \frac{\pi r^2 \alpha_s}{360°} = \frac{\pi 5^2 \cdot 160°}{360°}$ in dobimo $S_{pl} = \frac{100\pi}{9}\ cm^2$.

Pravilen izračun vseh treh kotov $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$ in $\gamma = 80°$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je najdaljša stranica c .... 1 točka
Izračun velikosti središčnega kota $\angle ASB = 160°$ .... 1 točka
Uporaba obrazca $c^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot cos 160°$ ali $sin\frac{160°}{2} = \frac{\frac{c}{2}}{5}$ .... 1 točka
Izračun $c \doteq 9,85\ cm$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je ploščina krožnega izseka enaka površini plašča stožca .... 1 točka
Uporaba formule za ploščino krožnega izseka $S_i = \frac{\pi r^2 \alpha_s}{360°}$ .... 1 točka
Izračun $S_{pl} = \frac{100\pi}{9}\ cm^2$ .... 1 točka

B2. S pomočjo grafov funkcij $f(x) = log_3 x$ in $g(x) = -x + 4$ poiščemo teme iskane kvadratne funkcije, ki je $T(3, 1)$. V temensko obliko $h(x) = a(x - p)^2 + q$ vstavimo koordinati temena in začetne vrednosti in izračunamo $a = -2$. Zapišemo temensko obliko $h(x) = -2(x-3)^2+1$ in



splošno obliko $h(x) = -2x^2+12x-17$.

Narisan graf funkcije $f(x) = log_3 x$ .... 1 točka
Narisan graf funkcije $g(x) = -x + 4$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba presečišča $T(3, 1)$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba temenske oblika $h(x) = a(x - p)^2 + q$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba začetne vrednosti $N(0, -17)$ .... 1 točka
Izračun $a = -2$ .... 1 točka
Zapis temenske oblike $h(x) = -2(x - 3)^2 + 1$ .... 1 točka
Zapis splošne oblike $h(x) = -2x^2 + 12x - 17$ .... 1 točka

B3. Najprej zapišemo $25^x = 5^{2x}$, $16^x = 4^{2x}$ in $20^x = (4 \cdot 5)^x$. Enačbo potem preoblikujemo v obliko $4 \cdot 5^{2x} - 4 \cdot (4 \cdot 5)^x + 5 \cdot 4^{2x} - 5 \cdot (4 \cdot 5)^x = 0$ in izpostavimo skupni faktor $4 \cdot 5^x(5^x - 4^x) + 5 \cdot 4^x(4^x - 5^x) = 0$. Potem preoblikujemo enačbo do oblike $(5^x - 4^x)(4 \cdot 5^x - 5 \cdot 4^x) = 0$. Iz prvega oklepaja dobimo rešitev $x_1 = 0$, iz drugega pa rešitev $x_2 = 1$.

Zapis $25^x = 5^{2x}$, $16^x = 4^{2x}$ .... 1 točka
Zapis $20^x = (4 \cdot 5)^x$ .... 1 točka
Ugotovitev, da lahko enačbo iz tričlene zapišemo na štiričleno .... 1 točka
Zapis $4 \cdot 5^x(5^x - 4^x) + 5 \cdot 4^x(4^x - 5^x) = 0$ .... 1 točka
Zapis $(5^x - 4^x)(4 \cdot 5^x - 5 \cdot 4^x) = 0$ .... 1 točka
Prva rešitev enačbe $x_1 = 0$ .... 1 točka
Druga rešitev enačbe $x_2 = 1$ .... (1+1) 2 točki
Če rešitvi ugane, v celoti dobi le dve točki.

22. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 23. april 2022

Rešitve nalog za 4. letnik

A1	A2	A3
E	D	B

A1. Izrazimo $\cos x = -\frac{12}{13}$ in uporabimo zvezo $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Izračunamo $\sin^2 x$: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - (-\frac{12}{13})^2 = \frac{25}{169}$. Ker je $\sin x = \pm\frac{5}{13}$, je vrednost izraza $\frac{13}{5}\sin x = \frac{13}{5}\cdot(\pm\frac{5}{13}) = \pm 1$. Pravilen je odgovor E.

A2. Ugotovimo, da gre za aritmetično zaporedje s prvim členom 18 in diferenco 4 ter vsoto prvih n členov 2000. Zapišemo njegov splošni člen $a_n = 18 + (n-1)4$ in formulo za vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = 2000$. Dobimo enačbo oblike $n^2 + 8n - 1000 = 0$. Rešitvi enačbe sta $n_1 \doteq 27,87$ in $n_1 \doteq -35,87$. Ugotovimo, da ustreza samo pozitivna rešitev, torej da bi 20 m šala spletli v 28 dneh. Pravilen je odgovor D.

A3. Vsoto 10 pik dobimo v šestih možnih izidih, in sicer, v izidih $\{1,3,6\}$, $\{1,4,5\}$ in $\{2,3,5\}$ vsakič $3! = 6$, v izidih $\{2,2,6\}$, $\{3,3,4\}$ in $\{4,4,2\}$ pa vsakič $\frac{3!}{2!} = 3$. Če seštejemo vse možnosti $6\cdot 3 + 3\cdot 3$ dobimo 27 možnosti. Pravilen je odgovor B.

B1. Enačbo $\sqrt{16y+9} - \sqrt{y-1} = \sqrt{9y+10}$ kvadriramo in dobimo $16y + 9 + y - 1 - 2\sqrt{(16y+9)(y-1)} = 9y + 10$. Uredimo jo do oblike $-2\sqrt{16y^2 - 7y - 9} = -8y + 2$ in delimo z -2. Dobljeno enačbo $\sqrt{16y^2 - 7y - 9} = 4y - 1$ kvadriramo in dobimo enačbo $16y^2 - 7y - 9 = 16y^2 - 8y + 1$. Rešitev enačbe je $y = 10$. Enačbo $4^{y-1} - 2^{2y-3} - 16^4 = 4^{y-2}$ uredimo v obliko $2^{2y-2} - 2^{2y-3} - 2^{2y-4} = 16^4$. Po izpostavljanju skupnega faktorja in ureditvi dobimo $2^{2y-4}\cdot(4 - 2 - 1) = 16^4$ in naprej $2^{2y-4} = 2^{16}$, enačimo eksponente $2y - 4 = 16$ in dobimo rešitev je $y = 10$. Rešitev prve enačbe kvadriramo in zapišemo enačbo $a_4 + a_6 = 100$, nato zapišemo še drugo enačbo sistema $a_5 - a_3 = 10$. Po upoštevanju splošnega člena aritmetičnega zaporedja sledi zapis enačb v obliki $a_1 + 3d + a_1 + 5d = 100$ in $a_1 + 4d - a_1 - 2d = 10$. Dobimo rešitvi $d = 5$ in $a_1 = 30$. Izračunamo vsoto prvih tridesetih členov po obrazcu $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ in dobimo $S_{30} = \frac{30}{2}(2\cdot 30 + (30-1)5) = 3075$.

Reševanje enačbe $\sqrt{16y+9} - \sqrt{y-1} = \sqrt{9y+10}$ .... 1* točka
Rešitev enačbe $y = 10$. .... 1 točka
Reševanje enačbe $4^{y-1} - 2^{2y-3} - 16^4 = 4^{y-2}$. .... 1* točka
Rešitev enačbe $y = 10$ .... 1 točka
Nastavitev sistema enačb $a_4 + a_6 = 100$ in $a_5 - a_3 = 10$ .... 1 točka
Reševanje sistema enačb .... 1* točka
Izračunani rešitvi $d = 5$ in $a_1 = 30$. .... 1 točka
Izračun vsote členov $S_{30} = \frac{30}{2}(2\cdot 30 + (30-1)5) = 3075$ .... 1 točka

B2. Uredimo enačbo: $x^6 - 5x^3 - 14 = 0$. Uvedemo novo neznanko npr. $y = x^3$ in zapišemo novo enačbo: $y^2 - 5y - 14 = 0$. Rešimo kvadratno enačbo npr. z razstavljanjem po Vietovem pravilu: $(y-7)(y+2) = 0$. Rešitvi enačbe z novo neznanko sta $y_1 = 7$ in $y_2 = -2$. Vstavimo novo neznanko: $x^3 = 7$ in $x^3 = -2$. Zapišemo natančni rešitvi enačbe: $x_1 = \sqrt[3]{7}$ in $x_2 = -\sqrt[3]{2}$.

Ureditev enačbe $x^6 - 5x^3 - 14 = 0$ .... 1 točka
Uvedba nove neznanke npr. $y = x^3$ .... 1 točka

Zapis enačbe z novo neznanko $y^2 - 5y - 14 = 0$ .... 1 točka
Reševanje enačbe npr. po Vietovem pravilu $(y-7)(y+2) = 0$ .... 1* točka
Zapis rešitev $y_1 = 7$ in $y_2 = -2$ .... 1 točka
Vstavitev novih neznank: $x^3 = 7$ in $x^3 = -2$ .... 1 točka
Zapis natančnih rešitev enačbe: $x_1 = \sqrt[3]{7}$ in $x_2 = -\sqrt[3]{2}$. .... 1+1 točka

B3. a) Enačbi krivulj enačimo $-x^{-2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$, nato množimo s skupnim imenovalcem in uredimo do oblike $x^4 - x^2 - 2 = 0$. Zapišemo v obliki produkta $(x^2-2)(x^2+1) = 0$, nato razstavimo še prvi oklepaj na $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+1) = 0$. Dobimo rešitvi $x_1 = \sqrt{2}$ in $x_2 = -\sqrt{2}$. Izračunammo ustrezni ordinati in zapišemo presečišči $P_1(\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$ in $P_2(-\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$. Odvajamo prvo krivuljo $y' = 2x^{-3}$ in zapišemo njen smerni koeficient $k_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Odvajamo drugo krivuljo $y' = -x$ in zapišemo njen smerni koeficient $k_2 = -\sqrt{2}$. Vstavimo podatke v obrazec za izračun kota med krivuljama in dobimo $tan\alpha = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1 \cdot k_2}\right| = \left|\frac{-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right)}\right| = \infty$. Kot med krivuljama je $\alpha = 90°$.

b) Funkcija ni definirana v polu pri $x = 1$. Zapišemo definicijsko območje funkcije $D_f = (0,1) \cup (1,\infty)$. Funkcijo odvajamo in dobimo odvod $f'(x) = \frac{lnx-1}{(lnx)^2}$. Izračunamo ničlo odvoda $lnx = 1$ in dobimo rešitev $x = e$. Pol funkcije je pri $x = 1$. Določimo interval naraščanja (e,∞) in intervala padanja $(0,1)\cup(1,e)$.

Reševanje enačbe $-x^{-2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ .... 1 točka
Izračuna $k_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ in $k_2 = -\sqrt{2}$ .... 1 točka
Zapis presečišč $P_1(\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$ in $P_2(-\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$ .... 1 točka
Izračun kota med krivuljama $\alpha = 90°$ .... 1 točka
Zapis definicijskega območja funkcije $D_f = (0,1) \cup (1,\infty)$ .... 1 točka
Zapisan odvod funkcije $f'(x) = \frac{lnx-1}{(lnx)^2}$ .... 1 točka
Zapis intervala naraščanja (e,∞) .... 1 točka
Zapis intervalov padanja $(0,1)\cup(1,e)$ .... 1* točka