**Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

# Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

1. regijsko tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol — 12. maj 2001

# NALOGE ZA PRVI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Če nalogo rešuješ na več načinov, mora biti nedvoumno označeno, kateri naj se upošteva.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

## I. DEL

**A1.** Riba ima 9 cm dolgo glavo. Njen rep je dolg toliko kot glava in pol telesa skupaj. Telo je dolgo kot glava in rep skupaj. Kako dolga je riba?

(**A**) 27 cm (**B**) 54 cm (**C**) 63 cm (**D**) 72 cm (**E**) 81 cm

**A2.** Če izraz $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$ zapišemo kot produkt, dobimo

(**A**) $(a+1)(b+c)(c-a)$ (**B**) $(b+c)(c-a)(a-b)$ (**C**) $(c-a)(b+c)(a-b)$
(**D**) $(a+b)(b+c)(c-a)$ (**E**) nič od navedenega

**A3.** Za katero vrednost parametra $m$ bosta premici z enačbama $y=(m+5)x+m-1$ in $y=(m-1)^2x-3m$ vzporedni?

(**A**) $m_1=1$, $m_2=-5$ (**B**) $m_1=-4$, $m_2=1$ (**C**) $m_1=1$, $m_2=\frac{1}{3}$
(**D**) $m=-\frac{1}{4}$ (**E**) nič od navedenega

**A4.** Trgovec je kupil 300 l vina. Od tega je 100 l vina prodal z dobičkom 15 % in 150 l z dobičkom 8 %, ostanek pa z izgubo 12 %. Kolikšen je bil njegov dobiček v %?

(**A**) 3 % (**B**) 5,1 % (**C**) 7,2 % (**D**) 9,1 %
(**E**) nič od navedenega

**A5.** Izberi $a$ tako, da bo vrednost izraza $(1-(1-a^{-1})^{-1})^{-1}$ enaka 3.

(**A**) $a=-2$ (**B**) $a=2$ (**C**) $a=\frac{1}{2}$ (**D**) $a=30$ (**E**) $a=0$

**A6.** Naj bo $x<-2$. Okrajšaj ulomek $\frac{x^2-1+|x+1|}{x^2-2x}$. Rezultat je

(**A**) $-\frac{x+1}{x-2}$ (**B**) $\frac{x+1}{x}$ (**C**) $-\frac{x+1}{x}$ (**D**) 1 (**E**) $-1$

## II. DEL

**B1.** Pred petimi leti je bilo razmerje števila let Klare, Jerce in Tine $9 : 10 : 13$. Čez 10 let bo razmerje njihovih let $14 : 15 : 18$. Koliko let imajo danes Klara, Jerca in Tina?

**B2.** Razstavi izraz $4^{2x+1} + 4^{x+2} - 84$.

**B3.** Ploščina trikotnika, ki ga oklepa premica s pozitivnima poltrakoma koordinatnih osi, je enaka 1. Premica poteka skozi točko $A(1, \frac{1}{2})$. Zapiši njeno enačbo.

**B4.** Kocka velikosti $9\ \text{cm} \times 9\ \text{cm} \times 9\ \text{cm}$ je sestavljena iz manjših kock velikosti $1\ \text{cm} \times 1\ \text{cm} \times 1\ \text{cm}$. Ploskve kocke obarvamo z rdečo barvo.

**(A)** Koliko manjših kock ostane nepobarvanih?

**(B)** Koliko manjših kock ima pobarvano le eno ploskev?

1. regijsko tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

12. maj 2001

# NALOGE ZA DRUGI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Če nalogo rešuješ na več načinov, mora biti nedvoumno označeno, kateri naj se upošteva.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

## I. DEL

**A1.** Imamo dva podobna pravokotna trikotnika. Prvi ima kateti dolgi 3 cm in 4 cm, v drugem meri hipotenuza 10 cm. Obseg drugega trikotnika je

(**A**) 6 cm (**B**) 24 cm (**C**) 25 cm (**D**) 17 cm
(**E**) nič od navedenega

**A2.** Vrednost izraza $\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}$ je

(**A**) $2\sqrt{3}$ (**B**) $\sqrt{10}$ (**C**) 3,46 (**D**) 2 (**E**) $\sqrt{6}$

**A3.** V pravokotniku meri ena stranica 24 cm, druga pa je za 8 cm krajša od diagonale. Izračunaj kot med diagonalo in dano stranico na minuto natančno.

(**A**) $70°31'$ (**B**) $36°52'$ (**C**) $53°13'$ (**D**) $53°08'$
(**E**) nič od navedenega

**A4.** Zapiši izraz $\frac{0{,}4^{-2}\cdot(2\frac{1}{4})^{-1}}{(-\frac{1}{3})^3\cdot 0{,}1^{-2}}$ v obliki okrajšanega ulomka.

(**A**) 1 (**B**) $\frac{27}{8}$ (**C**) $-\frac{3}{4}$ (**D**) $-\frac{27}{8}$ (**E**) $-48$

**A5.** Okrajšaj ulomek $\frac{4x^2-4x-3}{6x^2-x-2}$.

(**A**) $\frac{2x-3}{3x-2}$ (**B**) $\frac{2x+3}{3x+2}$ (**C**) $\frac{x-4}{x-2}$ (**D**) $\frac{x+4}{x+2}$ (**E**) 1

**A6.** Določi pogoj za $c$ tako, da bo teme kvadratne parabole $f(x)=2x^2+3x+c$ ležalo v III. kvadrantu.

(**A**) $c=0$ (**B**) $c>-1$ (**C**) $c>1\frac{1}{8}$ (**D**) $c=1$ (**E**) $c<\frac{9}{8}$

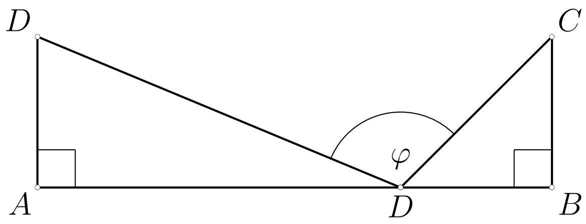
## II. DEL

**B1.** V pravokotniku $ABCD$ meri osnovnica 20 cm. Vsako oglišče je 12 cm oddaljeno od diagonale, na kateri ne leži. Izračunaj ploščino pravokotnika $ABCD$.

**B2.** Poenostavi izraz $\sqrt[3]{\frac{a+b}{(a-b)^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^3\sqrt[3]{b}}{a^2-b^2}} : \sqrt[6]{\frac{a^8b}{a+b}}$.

**B3.** Poišči vse realne rešitve enačbe $(x^2+x+3)^2+3(x^2+x-1)=28$.

**B4.** $|AE|>|EB|$, $|EB|=|BC|=|AD|$, $|AB|=17$ cm, $|ED|=13$ cm. Izračunaj kot $\varphi$ na minuto natančno. (Točke $A$, $E$ in $B$ so kolinearne).



1. regijsko tekmovanje v znanju matematike 12. maj 2001
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

# NALOGE ZA TRETJI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Če nalogo rešuješ na več načinov, mora biti nedvoumno označeno, kateri naj se upošteva.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

## I. DEL

**A1.** Katera od izjav je pravilna?

(**A**) Središče trikotniku očrtane krožnice leži vedno znotraj trikotnika.

(**B**) V vsakem rombu diagonali razpolavljata kote romba.

(**C**) Težišče in višinska točka v pravokotnem trikotniku sovpadata.

(**D**) Ploščina trikotnika s stranicami $a$, $b$ in $c$ je dana s Heronovo formulo

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

kjer je $s$ obseg trikotnika.

(**E**) V vsakem paralelogramu diagonali razpolavljata kote paralelograma.

**A2.** Katera od izjav je pravilna? Funkcija $f(x) = 2 + \sin 2x$

(**A**) nikoli ne zavzame vrednosti 2.
(**B**) je periodična z najmanjšo periodo $2\pi$.
(**C**) doseže največjo vrednost 4.
(**D**) je definirala le za $x < \frac{\pi}{4}$.
(**E**) nima ničel.

**A3.** Ploščina trapeza s stranicami $a = 17$, $b = 15$, $c = 3$ in $d = 13$

(**A**) je 120 (**B**) je 132 (**C**) je 156 (**D**) je 192
(**E**) ni določena, ker ni znana njegova višina

**A4.** Edina rešitev enačbe $2 \cdot 3^{x-3} + 3^{x-2} + 3^{x-1} = 14 \cdot 3^5$ je

(**A**) $x = 2$ (**B**) $x = 8$ (**C**) $x = -8$ (**D**) $x = -2$ (**E**) $x = 0$

**A5.** Razmerje telesne in ploskovne diagonale v kocki je

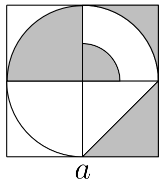
(**A**) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ (**B**) $2 : 3$ (**C**) $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ (**D**) $3 : 2$ (**E**) $\sqrt{2} : 1$

**A6.** Dana je družina funkcij $y = \log_a(3x^2 - 2x)$. Za kateri $a$ zavzame pripadajoča funkcija pri $x = 2$ vrednost 6?

(**A**) $a = 2$ (**B**) $a = \sqrt{2}$ (**C**) $a = 10$ (**D**) $a = \frac{1}{2}$
(**E**) nič od navedenega

## II. DEL

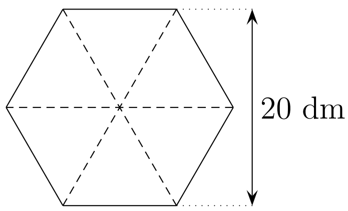
**B1.** Izračunaj ploščino osenčenega lika na sliki.



**B2.** Reši enačbo $\log_2(2\cos^2 x - 2\cos x + 1) = -1$.

**B3.** Naj bo $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a+2b}{a\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{b+2a}{b\sqrt{3}}$, $a > 0$, $b > 0$, $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Določi $\alpha + \beta$.

**B4.** Kozarec ima obliko pokončnega stožca. Ploščina osnega preseka pokončnega stožca meri $48\ \mathrm{dm}^2$, dolžina roba pa je $\frac{5}{3}$ polmera. Steklenica ima obliko enakorobe šeststrane prizme. (Potrebne podatke izračunaj s pomočjo skice osnovne ploske). Koliko kozarcev lahko napolniš iz polne steklenice?



1. regijsko tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

12. maj 2001

# NALOGE ZA ČETRTI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno. Če nalogo rešuješ na več načinov, mora biti nedvoumno označeno, kateri naj se upošteva.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

## I. DEL

**A1.** Odvod funkcije $f(x)=2e^{-\frac{1}{2}x}$ je enak

(**A**) $2e^{\frac{1}{2}x}$ (**B**) $-2e^{-\frac{1}{2}x}$ (**C**) $-e^{-\frac{1}{2}x}$ (**D**) $e^{-\frac{1}{2}x}$ (**E**) $2\ln(-\frac{1}{2}x)$

**A2.** Naklonski kot premice $x+y-3=0$ je

(**A**) $45°$ (**B**) $\frac{\pi}{2}$ (**C**) $135°$ (**D**) $-60°$ (**E**) drugo

**A3.** Dana je neskončna geometrijska vrsta $\frac{1}{2^x}+\frac{1}{2^{2x}}+\frac{1}{2^{3x}}+\cdots$. Za katero realno število $x$ je vsota vrste enaka $\frac{1}{7}$?

(**A**) $x=1$ (**B**) $x=2$ (**C**) $x=\frac{3}{2}$ (**D**) $x=3$ (**E**) $x=0$

**A4.** Rešitev enačbe $2^{x+1}=x^2+1$ leži na intervalu

(**A**) $[0,1)$ (**B**) $(-3,-1)$ (**C**) $[-1,0]$ (**D**) $(0,2)$ (**E**) $(-4,-3)$

**A5.** Racionalna funkcija $f(x)=\frac{x^2-9}{x-1}$ ima

(**A**) dva pola in eno ničlo.

(**B**) poševno asimptoto $y=x+1$ in pol v točki $x=1$.

(**C**) dvojno ničlo $x_{1,2}=3$.

(**D**) graf, ki ne seka ordinatne osi.

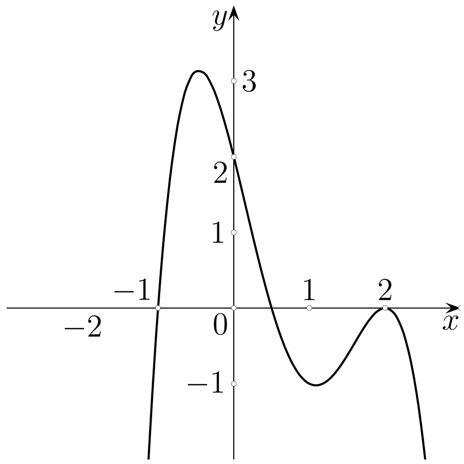
(**E**) nima realnih ničel in ima pol v točki $x=1$.

**A6.** Za kateri $x$ je zaporedje $\sqrt{x}$, $\sqrt{5x-4}$, $3\sqrt{x}$ aritmetično?

(**A**) $x=1$ (**B**) $x=2$ (**C**) $x=4$ (**D**) $x=6$ (**E**) $x=\frac{1}{4}$

**II. DEL**

**B1.** Narisan je graf polinoma četrte stopnje. Zapiši njegovo enačbo.




**B2.** Katera dva zaporedna člena geometrijskega zaporedja s količnikom 3 moramo zmnožiti, da dobimo 243-kratnik kvadrata prvega člena tega zaporedja?

**B3.** Določi definicijsko območje funkcije $f(x) = \ln \frac{1}{\cos x}$ ter zapiši v katerih točkah ima funkcija $f(x)$ tangente vzporedne simetrali sodih kvadrantov.

**B4.** Krožnica s polmerom $r = 4$ ima središče v enem od temen elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ in poteka skozi obe gorišči in skozi drugo teme. Zapiši enačbo elipse ($a > b$)!

1. regijsko tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol — 12. maj 2001

# Rešitve nalog

## Prvi letnik

I. DEL

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| D | D | E | E | A | B |

**A1.** Ker je rep ribe dolg kot glava in pol telesa skupaj, telo pa kot glava in rep skupaj, je telo dolgo kot 2 glavi in pol telesa skupaj. Zato je pol telesa dolgo za 2 glavi, torej 18 cm. Telo je dolgo $2 \cdot 18 = 36$ cm, rep pa $9 + 18 = 27$ cm. Riba je dolga $9 + 36 + 27 = 72$ cm.

**A2.** Izraz lahko zapišemo kot

$$bc(b+c) + c^2a - ca^2 - a^2b - ab^2 = bc(b+c) + a(c^2 - b^2) - a^2(c+b)$$
$$= (b+c)(bc - a^2) + a(c-b)(c+b) = (b+c)(bc - a^2 + ac - ab)$$
$$= (b+c)(b(c-a) + a(c-a)) = (b+c)(c-a)(b+a)$$

in tak produkt je zapisan v odgovoru (D).

**A3.** Premici sta vzporedni, če imata enak koeficient, torej $m + 5 = (m-1)^2$, od koder sledi $(m-4)(m+1) = 0$. Rešitvi sta $m_1 = 4$ in $m_2 = -1$, zato je pravilen odgovor (E).

**A4.** Dobiček trgovca je bil $\frac{100 \cdot 15 + 150 \cdot 8 + (300 - 100 - 150) \cdot (-12)}{300} = 7$ %. Pravilen odgovor je (E).

**A5.** Enačbo $(1 - (1 - \frac{1}{a})^{-1})^{-1} = 3$ preoblikujemo v

$$3 = (1 - (\frac{a-1}{a})^{-1})^{-1} = (1 - \frac{a}{a-1})^{-1} = (\frac{a-1-a}{a-1})^{-1} = \frac{a-1}{-1} = 1 - a$$

in dobimo $3 = 1 - a$ oziroma $a = -2$.

**A6.** Če je $x < -2$, je $x + 1 < -1 < 0$, zato je $|x+1| = -(x+1)$ in je ulomek enak

$$\frac{x^2 - 1 - (x+1)}{x^2 - 2x} = \frac{(x+1)(x-1) - (x-1)}{x(x-2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{x+1}{x}.$$

II. DEL

**B1.** Naj bodo $x$ starost Klare, $y$ Jerce in $z$ Tine. Pred petimi leti so bile njihove starosti $x - 5$, $y - 5$ in $z - 5$. Zanje velja

$$x - 5 = 9t, \quad y - 5 = 10t, \quad z - 5 = 13t.$$

Čez 10 let bodo njihove starosti $x + 10$, $y + 10$ in $z + 10$ ter bo veljalo

$$x + 10 = 14s, \quad y + 10 = 15s, \quad z + 10 = 18s.$$

Torej je $x = 9t + 5 = 14s - 10$, od koder sledi $t = \frac{14s-15}{9}$. Podobno je $y = 10t + 5 = 15s - 10$, torej $t = \frac{15s-15}{10}$. Če primerjamo, dobimo $\frac{14s-15}{9} = \frac{15s-15}{10}$ oziroma $s = 3$. Njihove starosti so $x = 14 \cdot 3 - 10 = 32$, $y = 15 \cdot 3 - 10 = 35$ in $z = 18 \cdot 3 - 10 = 44$.

**B2.** Vpeljimo novo spremenljivko $a = 4^x$. Dobimo

$$4^{2x+1} + 4^{x+2} - 84 = 4 \cdot a^2 + 4^2 \cdot a - 4 \cdot 21 =$$

$$= 4(a^2 + 4a - 21) = 4(a + 7)(a - 3)$$

oziroma $4^{2x+1} + 4^{x+2} - 84 = 4(4^x + 7)(4^x - 3)$.

**B3.** Naj premica seka koordinatni osi v točkah $(m, 0)$ in $(0, n)$. Enačba premice je potem $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$. Ker je ploščina trikotnika enaka $1 = \frac{mn}{2}$, sledi $n = \frac{2}{m}$ in $\frac{x}{m} + \frac{my}{2} = 1$. Upoštevajmo še, da na premici leži točka $A(1, \frac{1}{2})$. Dobimo $\frac{1}{m} + \frac{m}{4} = 1$ oziroma $0 = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2$. Torej je $m = 2$, enačba premice pa $\frac{x}{2} + y = 1$.

**B4.** **(A)** Nepobarvane ostanejo vse kocke, ki so v notranjosti, torej v kocki, katere rob je za 2 krajši od roba velike kocke. To pomeni, da jih je $7^3 = 343$.

**(B)** Na vsaki ploskvi velike kocke imajo pobarvano natanko eno ploskev tiste kocke, ki niso skupne dvema ploskvama. Takih je $(9-2) \cdot (9-2) = 49$ na vsaki ploskvi, torej skupaj $49 \cdot 6 = 294$.

## Drugi letnik

I. DEL

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| B | B | D | C | A | E |

**A1.** Hipotenuza prvega pravokotnega trikotnika je $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, zato so stranice drugega ravno dvakrat daljše. Obseg drugega trikotnika je dvakratnik obsega prvega, torej $2(3 + 4 + 5) = 24$ cm.

**A2.** Izračunajmo vrednost kvadrata izraza, torej

$$\left(\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 = 3 - \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}} + 3 + \sqrt{5} =$$

$$= 6 + 2\sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = 6 + 2\sqrt{9-5} = 10,$$

zato je vrednost izraza enaka $\sqrt{10}$.

**A3.** Naj bo $x$ dolžina diagonale. Za stranici in diagonalo lahko zapišemo Pitagorov izrek $24^2 + (x-8)^2 = x^2$, od koder sledi $x = 32$. Kot $\varphi$ med diagonalo in dano stranico zadošča $\cos\varphi = \frac{24}{32}$, zato je $\varphi = \arccos\frac{24}{32} = 53°08'$.

**A4.** Izraz je enak

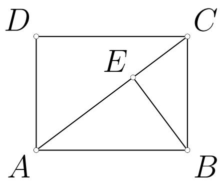
$$\frac{(\frac{4}{10})^{-2} \cdot (\frac{9}{4})^{-1}}{(-\frac{1}{3})^3 \cdot (\frac{1}{10})^{-2}} = \frac{(\frac{10}{4})^2 \cdot \frac{4}{9}}{-\frac{1}{27} \cdot 10^2} = -\frac{10^2 \cdot 4 \cdot 27}{4^2 \cdot 10^2 \cdot 9} = -\frac{3}{4}.$$

**A5.** Pišimo $\frac{4x^2-4x-3}{6x^2-x-2} = \frac{(2x-3)(2x+1)}{(2x+1)(3x-2)} = \frac{2x-3}{3x-2}$.

**A6.** Velja $f(x) = 2x^2 + 3x + c = 2(x^2 + \frac{3}{2}x) + c = 2(x + \frac{3}{4})^2 + c - \frac{9}{8}$. Teme je pri $x = -\frac{3}{4}$ in takrat je $y = c - \frac{9}{8}$, torej bo v III. kvadrantu, če je $c - \frac{9}{8} < 0$, torej $c < \frac{9}{8}$.

II. DEL

**B1.** Ker je trikotnik $ABE$ pravokoten, je $|AE| = \sqrt{|AB|^2 - |BE|^2} = 16$ cm. Nadalje je $|AE| : |AB| = |BE| : |BC|$, od koder sledi $|BC| = 15$ cm in $S = ab = |AB| \cdot |BC| = 300$ cm$^2$.




**B2.** Izračunamo lahko

$$\sqrt[3]{\frac{a+b}{(a-b)^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^3\sqrt[3]{b}}{a^2-b^2}} : \sqrt[6]{\frac{a^8 b}{a+b}} = \sqrt[6]{\frac{(a+b)^2}{(a-b)^4} \cdot \frac{a^9 b}{(a-b)^3(a+b)^3} \cdot \frac{a+b}{a^8 b}} = \sqrt[6]{\frac{a}{(a-b)^7}}.$$

**B3.** Enačbo zapišemo v obliki $(x^2+x+3)^2 + 3(x^2+x+3) - 40 = 0$ in za izraz v oklepaju uvedemo novo neznanko $u$. Enačba $u^2 + 3u - 40 = 0$ ima dve rešitvi $u_1 = -8$ in $u_2 = 5$. Od tod dobimo dve enačbi za $x$ in sicer $x^2 + x + 3 = -8$, ki nima rešitve, in $x^2 + x + 3 = 5$, ki ima dve realni rešitvi $x_1 = -2$ in $x_2 = 1$.

**B4.** Označimo $|EB| = |BC| = |AD| = x$ in uporabimo Pitagorov izrek za trikotnik $AED$, torej $13^2 = x^2 + (17-x)^2$. Enačba ima dve rešitvi, $x_1 = 12$, ki ne ustreza prvemu pogoju naloge, in $x_2 = 5$. Sledi $\sin\alpha = \sin\angle AED = \frac{5}{13}$ in $\alpha = 22°38'$ ter $\varphi = 180° - \alpha - 45° = 112°22'$.

## Tretji letnik

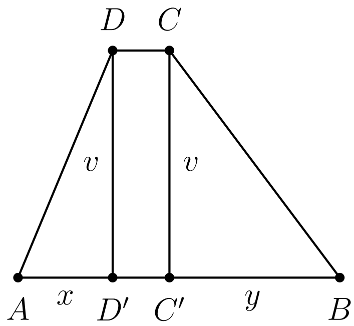
I. DEL

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| B | E | A | B | C | B |

**A1.** Pravilna je le izjava (B).

**A2.** Ker je $f(0) = 2$, funkcija zavzame vrednost 2. Najmanjša perioda je $\pi$ in funkcija je definirana za vsa realna števila. Ker je $\sin 2x \leq 1$, je največja vrednost 3. Pravilna izjava je, da funkcija nima ničel.

**A3.** Naj bo $v$ višina trapeza. Po Pitagorovem izreku (glej sliko) je $v^2 = 15^2 - y^2$ in $v^2 = 13^2 - x^2$. Ker pa je $x + y + 3 = 17$, sledi $y = 14 - x$ in zato je $15^2 - (14-x)^2 = 13^2 - x^2$, od koder sledi $x = 5$. Torej je $v = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Ploščina trapeza pa je $\frac{v(a+c)}{2} = 120$.



**A4.** Pišimo $14 \cdot 3^5 = 3^{x-3}(2+3+3^2) = 14 \cdot 3^{x-3}$. Sledi $3^5 = 3^{x-3}$ oziroma $x = 8$.

**A5.** Če je $a$ dolžina roba ploskve, je dolžina ploskovne diagonale $\sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2}a$, telesne pa $\sqrt{a^2+a^2+a^2} = \sqrt{3}a$, torej je razmerje med telesno in ploskovno diagonalo enako $\sqrt{3} : \sqrt{2}$.

**A6.** Rešimo $6 = \log_a(3 \cdot 4 - 2 \cdot 2) = \log_a 8$. To pomeni $a^6 = 8$ oziroma $a = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$.

II. DEL

**B1.** Osenčeni del zunaj kroga v drugem kvadratku in osenčeni del v prvem kvadratku skupaj pokrijeta ravno cel kvadratek, torej $\frac{1}{4}a^2$. Osenčeni del v četrtem kvadratku pokrije polovico kvadratka, to je $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}a^2$. Preostane le še četrtina kroga v drugem kvadratku. Ker je polmer enak $\frac{a}{4}$, je ploščina tega dela $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (\frac{a}{4})^2$. Ploščina osenčenega lika je torej $\frac{a^2(\pi+24)}{64}$.

**B2.** Pišimo $y = 2\cos^2 x - 2\cos x + 1$. Potem je $\log_2 y = -1$, zato je $y = 2^{-1} = \frac{1}{2}$. Sledi $\frac{1}{2} = 2\cos^2 x - 2\cos x + 1$ oziroma $(2\cos x - 1)^2 = 0$. Torej je $\cos x = \frac{1}{2}$ in zato $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$.

**B3.** Velja

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{a+2b}{a\sqrt{3}} + \frac{b+2a}{b\sqrt{3}}}{1 - \frac{(a+2b)(b+2a)}{3ab}},$$

kar lahko poenostavimo v $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\sqrt{3}$. Edina možnost je $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$.

**B4.** Naj bo $r$ polmer stožca. Dolžina roba je potem $\frac{5}{3}r$, zato je po Pitagorovem izreku višina enaka $\sqrt{(\frac{5}{3}r)^2 - r^2} = \frac{4}{3}r$. Ker je osni presek enak $\frac{1}{2} \cdot \frac{4r}{3} \cdot 2r = 48 \text{ dm}^2$, sledi $r = 6$ dm. Volumen kozarca je tako $\frac{1}{3}\pi r^2 \doteq 301{,}44 \text{ dm}^2$.

Iz skice za steklenico vidimo, da je višina enega enakostraničnega trikotnika enaka 10 dm, zato je stranica $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 10 = \frac{20}{\sqrt{3}}$ dm. Ker je prizma enakoroba, je višina enake dolžine kot stranica, volumen pa je enak

$$\frac{20}{\sqrt{3}} \cdot 6 \cdot \frac{20}{\sqrt{3}} \cdot 10 = 4000 \text{ dm}^3.$$

Imamo $\frac{4000}{301{,}44} \doteq 13{,}27$, zato lahko napolnimo 13 kozarcev.

## Četrti letnik

I. DEL

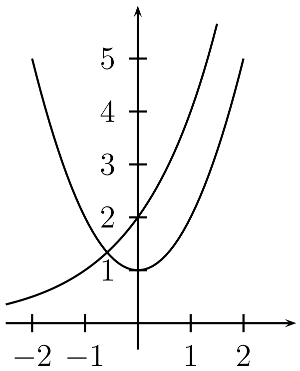
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| C | C | D | C | B | C |

**A1.** Odvod te funkcije je $f'(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (-\frac{1}{2}) = -e^{-\frac{1}{2}x}$.

**A2.** Naj bo $\varphi$ naklonski kot. Premico zapišemo v obliki $y = 3 - x$. Vodilni koeficient je $-1$, torej je $\operatorname{tg}\varphi = -1$, od koder sledi $\varphi = 135°$.

**A3.** Vrsto lahko zapišemo kot $\frac{1}{2^x}\left(1 + \frac{1}{2^x} + \left(\frac{1}{2^x}\right)^2 + \ldots\right) = \frac{1}{2^x} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2^x}} = \frac{1}{2^x-1}$. Iz $\frac{1}{7} = \frac{1}{2^x-1}$ sledi $x = 3$.

**A4.** Narišemo približna grafa funkcij $f(x) = x^2 + 1$ in $g(x) = 2^{x+1}$. Vidimo, da se sekata na intervalu $[-1, 0]$.




**A5.** Racionalna funkcija $f(x) = \frac{x^2-9}{x-1}$ ima en pol v $x = 1$, ničli v $x = 3$ in $x = -3$. Pri $x = 0$ seka ordinatno os. Ker je $\frac{x^2-9}{x-1} = \frac{x^2-1-8}{x-1} = x + 1 - \frac{8}{x-1}$, je $y = x + 1$ poševna asimptota. Pravilen odgovor je (B).

**A6.** Zaporedje je aritmetično, če velja $3\sqrt{x} - \sqrt{5x-4} = \sqrt{5x-4} - \sqrt{x}$. Od tod sledi $2\sqrt{x} = \sqrt{5x-4}$ oziroma $4x = 5x - 4$, torej $x = 4$.

II. DEL

**B1.** Vidimo, da ima polinom dvojno ničlo v $x = 2$, ničlo v $x = -1$ in ničlo v $x = \frac{1}{2}$. Zato bo $p(x) = a(x-2)^2(x+1)(x-\frac{1}{2})$. Ker je $p(1) = -1$, sledi $a = -1$ in $p(x) = -(x-2)^2(x+1)(x-\frac{1}{2})$.

**B2.** Naj bo $a_1$ začetni člen. Potem je $a_n = a_1 \cdot 3^{n-1}$ splošni člen. Produkt dveh zaporednih členov je $a_n a_{n+1} = a_1^2 \cdot 3^{2n-1}$ in ta je enak $243a_1^2$, ko je $3^{2n-1} = 243 = 3^5$, se pravi pri $n = 3$. Zmnožiti moramo tretji in četrti člen.

**B3.** Da bo $f(x) = \ln\frac{1}{\cos x}$ definirana, mora veljati $\frac{1}{\cos x} > 0$ oziroma $\cos x > 0$. Definicijsko območje je tako unija intervalov oblike $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ za vsa cela števila $k$.

Tangenta bo vzporedna simetrali sodih kvadrantov, če je njen naklon $-1$, torej $f'(x) = -1$. Sledi $-1 = \frac{1}{\frac{1}{\cos x}} \cdot \frac{-1}{\cos^2 x}(-\sin x) = \operatorname{tg} x$, torej so dobri tisti $x$ iz definicijskega območja, za katere je $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Pri teh $x$ velja še $f(x) = \ln(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})}) = \frac{1}{2}\ln 2$. Dobimo točke $T(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\,,\, \frac{1}{2}\ln 2)$.

**B4.** Vidimo, da mora središče krožnice ležati v $(0, b)$ ali $(0, -b)$. Zaradi simetrije lahko vzamemo prvo točko. Ker sta gorišči na abscisi, mora krožnica skozi teme na ordinati, zato je $r = 2b$ oziroma $b = 2$.

Vsota razdalj poljubne točke na elipsi od gorišč je enaka $2a$. Torej je $2a = 2r$ oziroma $a = 4$. Enačba elipse je $4x^2 + 16y^2 = 4 \cdot 16$ oziroma $x^2 + 4y^2 = 16$.