Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

3. regijsko tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

29. marec 2003

NALOGE ZA PRVI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake od teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Vrednost izraza $|-3| + \Big||-1| - |2|\Big|$ je:

(**A**) -6 (**B**) -4 (**C**) 2 (**D**) 4 (**E**) 6

A2. Naravna števila, ki dajo pri deljenju s 7 ostanek 2, zapišemo:

(**A**) $7{,}2\,k,\ k \in \mathbb{N}$ (**B**) $2k+7,\ k \in \mathbb{N}$ (**C**) $\frac{2}{7}$
(**D**) $7{,}2$ (**E**) $7k+2,\ k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$

A3. Če izraz $(-x)^6 \cdot (-x)^5 \cdot \Big(-(-x)^4\Big)$ poenostavimo, dobimo:

(**A**) $-x^{15}$ (**B**) x^{15} (**C**) x^{120}
(**D**) $-x^{120}$ (**E**) nič od navedenega

A4. Rešitev neenačbe $8 - 16x \leq 4x^2 - (2x+1)^2$ je:

(**A**) $x > \frac{3}{4}$ (**B**) $x \leq \frac{3}{4}$ (**C**) $x \geq \frac{3}{4}$ (**D**) $x < 1$ (**E**) $0 < x \leq \frac{3}{4}$

A5. Bron je zlitina bakra in kositra v razmerju 47 : 3. Koliko kositra je v spomeniku iz brona, ki tehta 350 kg?

(**A**) 7 kg (**B**) 21 kg (**C**) 300 kg
(**D**) 329 kg (**E**) nič od navedenega

A6. Vrednost izraza $\dfrac{2^1 + 2^0 + 2^{-1}}{2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}}$ je enaka:

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) $\frac{31}{2}$ (**D**) 24 (**E**) 512

II. DEL

B1. Produkt dveh zaporednih naravnih števil za številom n je za 600 večji od produkta dveh zaporednih naravnih števil pred številom n. Določi število n. Zapiši rešitev.

B2. Planet Jupiter obkroži Sonce v 12 letih, planet Saturn pa v 30 letih. Leta 1941 sta bila oba na isti strani Sonca in smo ju z Zemlje videli oba skupaj. Katerega leta smo ju nazadnje videli skupaj? Katerega leta se bo dogodek prvič ponovil? Zapiši odgovora.

B3. Izračunaj vrednost izraza $(a^2 - ab + b^2) : (2a^2 - 6b)$, če je $a - b = 3$ in $\frac{2(a-b)}{3} - \frac{a+2b}{9} = 1$.

B4. Bazen polnijo tri cevi. Prva cev sama napolni bazen v štirih urah, druga v desetih, tretja pa v dvajsetih urah. Koliko odstotkov bazena je napolnjenega, če vse tri cevi odpremo za dve uri? Zapiši odgovor.

3. regijsko tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

29. marec 2003

NALOGE ZA DRUGI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake od teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Enačba premice, ki poteka skozi točko $A(\pi, 0)$ ter presečišče premic $y = \pi - 2x$ in $y = \pi - \frac{x}{2}$, je:

(**A**) $y = 2x + \pi$ (**B**) $y = -x + \pi$ (**C**) $y = x - \pi$
(**D**) $y = 2\pi$ (**E**) nič od navedenega

A2. Za premico z enačbo $\frac{3x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ velja:

(**A**) odreže odsek $\frac{3}{2}$ na osi x in $-\frac{1}{3}$ na osi y
(**B**) odreže odsek 2 na osi x in -3 na osi y
(**C**) odreže odsek $\frac{2}{3}$ na osi x in 3 na osi y
(**D**) odreže odsek $\frac{2}{3}$ na osi x in -3 na osi y
(**E**) ne seka osi x

A3. Za kateri n velja enakost $3^{2002} - 3^{2001} + 3^{2000} - 3^{1999} = n(3^{1999})$?

(**A**) 18 (**B**) 19 (**C**) 20
(**D**) 21 (**E**) ne obstaja takšen n

A4. Če izraz $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ poenostavimo, dobimo:

(**A**) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ (**B**) $x + y$ (**C**) $2x - y$ (**D**) xy (**E**) $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

A5. Suplementarni kot kota α meri $78°18'53''$. Kot α meri:

(**A**) $102°42'7''$ (**B**) $12°42'7''$ (**C**) $11°41'7''$
(**D**) $53°$ (**E**) nič od navedenega

A6. Za koliko odstotkov se poveča oziroma zmanjša ploščina pravokotnika, če eno stranico podaljšamo za 20 % njene dolžine, drugo pa skrajšamo za četrtino njene dolžine?

(**A**) Poveča se za 5 %. (**B**) Zmanjša se za 10 %. (**C**) Poveča se za 15 %.
(**D**) Zmanjša se za 1 %. (**E**) Ploščina se ne spremeni.

II. DEL

B1. V enačbi premice $x + my - 4 = 0$ določi m tako, da bo razdalja med presečiščema premice s koordinatnima osema enaka $2\sqrt{5}$.

B2. Če koren nekega števila delimo z $\frac{1}{2}$, dobimo ravno toliko, kot če število zmanjšamo za 3. Katero število je to? Ali je takih števil več?

B3. V trikotniku ABC meri kot $\alpha = 58°$ in kot $\beta = 84°$. Koliko meri kot x med simetralo kota γ in višino na stranico c?

B4. Izračunaj natančno, brez uporabe žepnega računala: $\dfrac{(-2)^{-3}}{(-0,2)^3} - \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3} \cdot (-3)^{-2} \cdot 0,1^{-1}$.

3. regijsko tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

29. marec 2003

NALOGE ZA TRETJI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake od teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

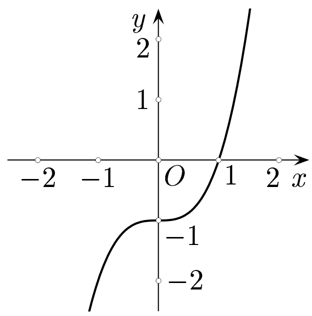
A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Dana je funkcija s predpisom $f(x) = -2(x+3)^2 + 2$. Katera trditev je pravilna?

(**A**) Funkcija je povsod padajoča.
(**B**) Teme je v točki $T(3, 2)$.
(**C**) Funkcija nima realnih ničel.
(**D**) Graf je parabola, ki je zrcalno simetrična glede na premico $x = -3$.
(**E**) Nobena izmed navedenih trditev ni pravilna.

A2. Na danem grafu je prikazana funkcija:



(**A**) $f(x) = x^3$ (**B**) $f(x) = -x^3 + 1$ (**C**) $f(x) = x^3 - 1$
(**D**) $f(x) = x^2$ (**E**) nič od navedenega

A3. Rešitev enačbe $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+5} = \sqrt{9^{6x-3}}$ je:

(**A**) $x = -\frac{1}{2}$ (**B**) $x = -\frac{1}{4}$ (**C**) $x = \frac{1}{4}$ (**D**) $x = \frac{1}{2}$ (**E**) $x = 1$

A4. Za števili $a = \log_3 x$ in $b = \log_4 x$ velja:

(**A**) $a < b$ za vsak $x > 1$ (**B**) $a > b$ za vsak $x > 1$
(**C**) $a \neq b$ za vsak $x > 0$ (**D**) $a \log 4 = b \log 3$ za vsak $x > 0$
(**E**) $ab = \log_{12} x$ za vsak $x > 0$

A5. Koliko je a, če ima enačba $x^2 = 3(ax - 3)$ natanko eno realno rešitev?

(**A**) $a = 2$ ali $a = -2$ (**B**) a je lahko le 2 (**C**) $a = 4$
(**D**) $a = 6$ ali $a = -6$ (**E**) $a = \frac{2}{3}$

A6. Funkcija $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 6x + 9}$ spremeni predznak:

(**A**) nikoli (**B**) enkrat (**C**) dvakrat (**D**) trikrat (**E**) štirikrat

II. DEL

B1. Krogu s ploščino 100π cm^2 včrtamo pravokotnik, katerega dolžini stranic se razlikujeta za 4 cm. Izračunaj ploščino pravokotnika.

B2. Koliko je 12 % od števila $\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}+2^{-\log_{10} 0{,}01}$? Zapiši odgovor.

B3. Skiciraj graf funkcije $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x+2}$.

B4. Pokaži, da je polinom $p(x)=x^4-2x^3+5x^2-4x+4$ enak kvadratu nekega polinoma.

3. regijsko tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

29. marec 2003

NALOGE ZA ČETRTI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake od teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

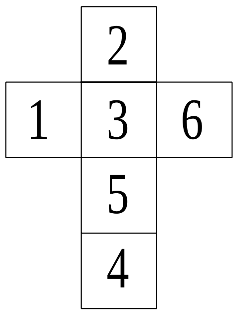
Čas za reševanje je 90 minut.

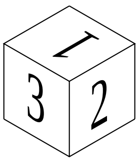
DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

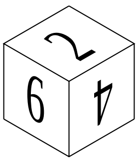
A1	A2	A3	A4	A5	A6

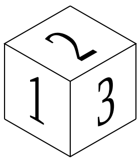
I. DEL

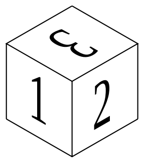
A1. Katera kocka je razgrnjena v mrežo?

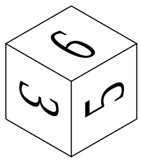


(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) 

A2. Največja vrednost funkcije $g(x) = 24 - 5\sin x$ je:

(**A**) 14 (**B**) 19 (**C**) 24
(**D**) 34 (**E**) nič od navedenega

A3. Telesna diagonala kocke z robom a je dolga:

(**A**) $3a$ (**B**) a^3 (**C**) $a\sqrt{2}$
(**D**) $a\sqrt{3}$ (**E**) nič od navedenega

A4. Tričleno naraščajoče aritmetično zaporedje s srednjim členom 10 postane geometrijsko, če ta člen zmanjšamo za 2. Sklepamo:

(**A**) aritmetično zaporedje je $3, 10, 17$ (**B**) aritmetično zaporedje je $4, 10, 16$
(**C**) geometrijsko zaporedje je $8, 8, 8$ (**D**) geometrijsko zaporedje je $1, 8, 64$
(**E**) iz aritmetičnega zaporedja na opisani način ni mogoče dobiti geometrijskega

A5. V skupini 20 fantov tehta vsak povprečno 62 kg. Če se fantom pridruži še učitelj, je vsak v povprečju težak 63 kg. Koliko tehta učitelj?

(**A**) 62 kg (**B**) 73 kg (**C**) 83 kg (**D**) 93 kg
(**E**) ni mogoče izračunati

A6. Če izraz $\left(\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right) : (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha - 1)$ poenostavimo, dobimo:

(**A**) $\sin^2\alpha + \cos\alpha$ (**B**) $\sin\alpha + \cos\alpha$ (**C**) $\operatorname{tg}\alpha$ (**D**) $\operatorname{ctg}\alpha - 1$ (**E**) 1

II. DEL

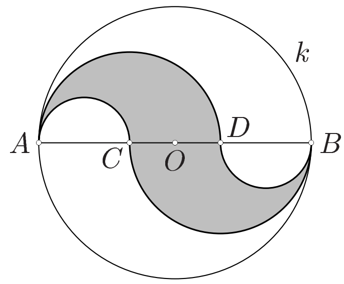
B1. Dani so izrazi $\frac{x+3}{x^2-4}$, $\frac{x-1}{x-2}$ in $\frac{x+3}{x+2}$. Določi x tako, da bo drugi izraz aritmetična sredina prvega in tretjega.

B2. Izračunaj $\sin(2\alpha+\pi)$, če je $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ in je α ostri kot.

B3. V mestni bolnišnici leži 120 bolnikov. Po jutranjem merjenju srčnega utripa je glavna sestra meritve uvrstila v 8 frekvenčnih razredov. Izračunaj aritmetično sredino meritev in standardni odklon.

Število utripov na minuto	Frekvenca
$60-64{,}9$	23
$65-69,9$	16
$70-74{,}9$	15
$75-79{,}9$	32
$80-84{,}9$	24
$85-89{,}9$	6
$90-94{,}9$	2
$95-99{,}9$	2

B4. Dana je krožnica k s polmerom R. Na premeru AB sta taki točki C in D, da velja $|AC|=|CD|=|DB|$. Nad AC in AD sta narisani polkrožnici na eni strani daljice AB, nad DB in CB pa na drugi strani (glej sliko). Izrazi ploščino osenčenega lika z R.



3. regijsko tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

29. marec 2003

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

I. DEL

Naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Odgovor	D	E	B	C	B	B

A4. Neenačbo preoblikujemo v $8 - 16x \leq -4x - 1$, ki ima rešitev $x \geq \frac{3}{4}$.

A5. Zaradi razmerja 47 : 3 je v 50 kg brona 3 kg kositra, v 350 kg brona pa 21 kg kositra.

II. DEL

B1. Naj bo iskano naravno število n. Tedaj je $(n-2)\cdot(n-1)+600 = (n+1)\cdot(n+2)$, od koder dobimo $n^2 - 3n + 2 + 600 = n^2 + 3n + 2$ in izrazimo $n = 100$.

Zapisano zaporedje naravnih števil: $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ .... 1 točka
Zapis enačbe: $(n-2)\cdot(n-1)+600 = (n+1)\cdot(n+2)$ .... 1 + 1 točka
Odprava oklepajev .... 1 točka
Rešitev $n = 100$ .... 1 točka
Odgovor .... 1 točka

B2. Ker je najmanjši skupni večkratnik števil 12 in 30 enak 60, vidimo Jupiter in Saturn skupaj na isti strani Sonca vsakih 60 let. Nazadnje je bilo to leta $1941 + 60 = 2001$, prvič pa se bo dogodek ponovil leta $2001 + 60 = 2061$.

Reševanje naloge z iskanjem najmanjšega skupnega večkratnika .... 1 točka
Določitev $v(12, 30) = 60$ .... 2 točki
Sklep $1941 + 60 = 2001$ .... 1 točka
Sklep $2001 + 60 = 2061$ .... 1 točka
Zapisana odgovora .... 1 točka

B3. Iz $a-b=3$ izrazimo $a=b+3$ in vstavimo v enačbo $\frac{2(a-b)}{3}-\frac{a+2b}{9}=1$, od koder dobimo $b=2$ in je torej $a=5$. Izračunani vrednosti vstavimo v izraz $(a^2-ab+b^2):(2a^2-6b)$ in dobimo rezultat $\frac{1}{2}$.

Zapis $a=b+3$ .... 1 točka
Vstavitev neznanke a v enačbo $\frac{2(a-b)}{3}-\frac{a+2b}{9}=1$ .... 1 točka
(Oziroma pravilno reševanje sistema .... 2 točki)
Za izračunano neznanko $b=2$ .... 1 točka
Za izračunano neznanko $a=5$ .... 1 točka
Vstavljanje vrednosti za a in b .... 1 točka
Rezultat: $\frac{1}{2}$ (ulomek mora biti okrajšan) .... 1 točka

B4. V eni uri napolni prva cev $\frac{1}{4}$ bazena, druga $\frac{1}{10}$ in tretja $\frac{1}{20}$ bazena. Če vse tri cevi odpremo za dve uri, napolnijo $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{8}{10}$ bazena, kar je 80 %.

Pravilen zapis za vse tri cevi v eni uri .... 1 točka
Pravilen zapis za vse tri cevi v dveh urah .... 1 točka
Zapis vsote $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$ .... 1 točka
Rezultat $\frac{8}{10}$ .... 1 točka
Rezultat 80 % .... 1 točka
Zapisan odgovor .... 1 točka

Drugi letnik

I. DEL

Naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Odgovor	B	D	C	A	E	B

A1. Premici z enačbama $y=\pi-2x$ in $y=\pi-\frac{x}{2}$ se sekata v točki $B(0,\pi)$. Enačba premice skozi točki $A(\pi,0)$ in $B(0,\pi)$ je $y=-x+\pi$.

A2. Dano enačbo premice lahko preoblikujemo v odsekovno obliko $\frac{x}{\frac{2}{3}}+\frac{y}{-3}=1$, od koder preberemo odseka: $\frac{2}{3}$ na osi x in -3 na osi y.

A3. Če na levi strani enakosti izpostavimo 3^{1999}, dobimo $3^{1999}\cdot(3^3-3^2+3-1)=20\cdot 3^{1999}$.

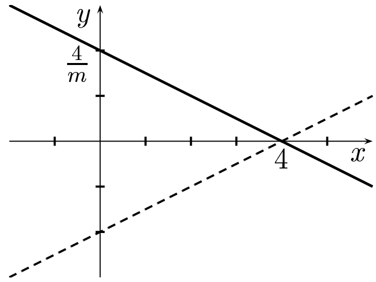
A4. Izraz v števcu zapišemo kot razliko kvadratov, ki jo razstavimo: $\frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

A5. Suplementarni kot kota $78°18'53''$ je $101°41'7''$, zato je pravilen odgovor (E).

A6. Ploščina pravokotnika s stranicana $1.2a$ in $0.75b$ je $\frac{12}{10}\frac{3}{4}\cdot ab=\frac{9}{10}\cdot ab$, torej je za 10 % manjša od ploščine pravokotnika s stranicama a in b.

II. DEL

B1. Očitno mora biti $m \neq 0$, sicer premica ne bi sekala ordinatne osi. Pri tem pogoju premica seka ordinatno os v točki $N(0, \frac{4}{m})$. Abscisno os seka v točki $M(4,0)$. Veljati mora $\sqrt{16 + \frac{16}{m^2}} = 2\sqrt{5}$, od koder izrazimo $m^2 = 4$ oziroma $m = \pm 2$.

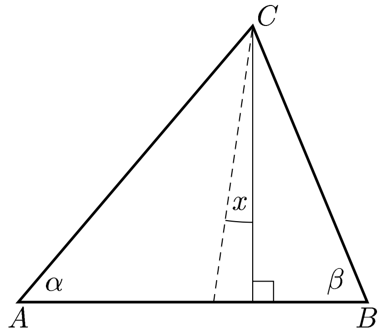


Presečišči s koordinatnima osema: $N(0, \frac{4}{m})$ in $M(4,0)$ .... $1+1$ točka
Točki, vstavljeni v obrazec $d(M,N) = \sqrt{16 + \frac{16}{m^2}} = \sqrt{\frac{16m^2+16}{m^2}}$ .... 1 točka
Enačba: $\sqrt{\frac{16m^2+16}{m^2}} = 2\sqrt{5}$ .... 1 točka
Odprava korenov $\frac{16m^2+16}{m^2} = 20$ .... 1 točka
Rešitvi $m = \pm 2$ .... 1 točka
OPOMBA: če ne zapiše obeh rešitev, zadnje točke ne dobi

B2. Enačbo $\sqrt{x} : \frac{1}{2} = x - 3$ preoblikujemo v $x^2 - 10x + 9 = 0$, ki ima rešitvi $x_1 = 9$ in $x_2 = 1$. Število 9 ustreza pogoju naloge, saj je $\sqrt{9} : \frac{1}{2} = 9 - 3$, število 1 pa ne, saj imamo $\sqrt{1} : \frac{1}{2} \neq 1 - 3$.

Zapisana enačba $\sqrt{x} : \frac{1}{2} = x - 3$ .... $1+1$ točka
Pravilno kvadrirana enačba $4x = x^2 - 6x + 9$ .... 1 točka
Rešitvi kvadratne enačbe $x^2 - 10x + 9 = 0$; $x_1 = 9, x_2 = 1$ .... 1 točka
Preizkus .... 1 točka
Odgovor: Iskano število je 9. .... 1 točka

B3. Kot x lahko izračunamo na dva načina, in sicer $x = \frac{\gamma}{2} - (90^\circ - \beta) = 19^\circ - 6^\circ = 13^\circ$ ali $x = 90^\circ - \alpha - \frac{\gamma}{2} = 32^\circ - 19^\circ = 13^\circ$.



Ustrezna skica .... 1 točka
Izračunan kot $\gamma = 38^0$ .... 1 točka
Izračunan kot v pravokotnem trikotniku 6^0 ali 32^0 .... 2 točki
Iskani kot 13^0 .... 2 točki

B4. Računamo: $\dfrac{(-2)^{-3}}{(-0,2)^3} - (\dfrac{2}{5})^{-3} \cdot (-3)^{-2} \cdot 0,1^{-1} = \dfrac{-\frac{1}{8}}{-\frac{1}{125}} - \dfrac{125}{8} \cdot \dfrac{1}{9} \cdot 10 = \dfrac{125}{8} \cdot \left(1 - \dfrac{10}{9}\right) = -\dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{125}{8} = -\dfrac{125}{72}$.

Poenostavitev prvega ulomka $\dfrac{-\frac{1}{8}}{-0,008}$ .... 1 točka
Poenostavitev $(\dfrac{2}{5})^{-3} = \dfrac{125}{8}$ .... 1 točka
Poenostavitev $(-3)^{-2} \cdot 0,1^{-1} = \frac{1}{9} \cdot 10$ .... 1 točka
Odprava dvojnega ulomka .... 1 točka
Razširjanje na skupni imenovalec .... 1 točka
Rezultat: $-\dfrac{125}{72}$ (ulomek mora biti okrajšan) .... 1 točka

Tretji letnik

I. DEL

Naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Odgovor	D	C	B	B	A	C

A1. Iz zapisa funkcije vidimo, da je njen graf parabola s temenom $T(-3,2)$ in je zrcalno simerična glede na premico $x = -3$.

A3. Enačbo preoblikujemo v $3^{-2x-5} = 3^{6x-3}$, zato je $-2x - 5 = 6x - 3$, odtod pa $x = -\frac{1}{4}$.

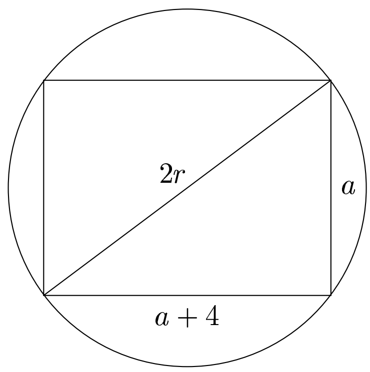
A4. Logaritemska funkcija z višjo osnovo počasneje narašča kot funkcija z nižjo osnovo, zato je $a > b$ za vsak $x > 1$.

A5. Dano enačbo preoblikujemo v $x^2 - 3ax + 9 = 0$. Njena diskriminanta je $D = 9a^2 - 36$ in je enaka nič, če je $a = 2$ ali $a = -2$.

A6. Ker je $f(x) = \dfrac{x^2+5x+4}{x^2+6x+9} = \dfrac{(x+4)(x+1)}{(x+3)^2}$, ima graf te racionalne funkcije dve ničli prve stopnje in en pol druge stopnje, zato dvakrat spremeni predznak.

II. DEL

B1. Iz $\pi r^2 = 100\pi$ izračunamo $r = 10$ cm, nato pa uporabimo Pitagorov izrek: $a^2 + (a+4)^2 = (2r)^2$. Od tod izračunamo $a_1 = 12$ in $a_2 = -16$. Upoštevamo le pozitivno rešitev: stranici pravokotnika sta dolgi 12 cm in 16 cm, njegova ploščina je 192 cm^2.
Ko Pitagorov izrek preoblikujemo v kvadratno enačbo $a^2 + 4a - 192 = 0$, vidimo, da je $a(a+4) = 192$. Slednje je ravno zapis ploščine pravokotnika s stranicama a in $a+4$. Ne da bi izračunali dolžini stranic, vemo, da je ploščina 192 cm^2.

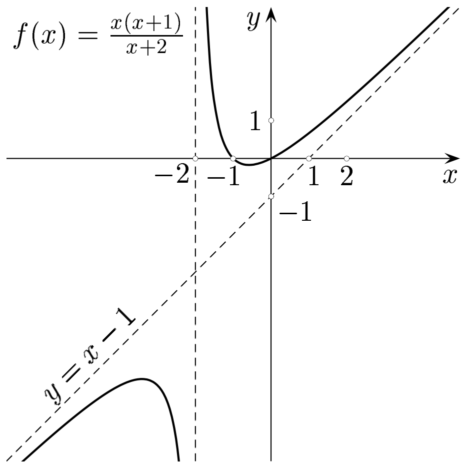


Izračunan polmer $r = 10$ cm .... 1 točka
Stranici pravokotnika $a = x, b = x + 4$ .... 1 točka
Sklep $(2r)^2 = a^2 + b^2$ .... 1 točka
Enačba $x^2 + 4x - 192 = 0$ .... 1 točka
Rešitvi enačbe: $x_1 = 12, x_2 = -16$ .... 1 točka
Ploščina pravokotnika $S = 12 \cdot 16 = 192$ cm^2 .... 1 točka

B2. Izračunamo najprej $\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} + 2^{-\log_{10} 0{,}01} = \sqrt[3]{1} + 2^{\log_{10} 100} = 1 + 4 = 5$, nato pa poiščemo $\frac{12}{100} \cdot 5 = \frac{3}{5}$.

Poenostavitev logaritma in rešitev $10^x = 10^{-2} \Rightarrow x = -2$ .... 1 + 1 točka
Odprava oklepajev $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) = 1$ .... 1 točka
Vrednost izraza 5 .... 1 točka
Zapis 12 % od 5 .... 1 točka
Odgovor: 12 % od danega izraza je $0{,}6$. .... 1 točka

B3. Iz zapisa $f(x) = \frac{x(x+1)}{x+2}$ vidimo, da ima graf funkcije ničli $x_1 = 0$ in $x_2 = -1$ ter pol $x_p = -2$. Če zapis preoblikujemo v $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x+2}$ ugotovimo, da ima graf funkcije asimptoto $y = x - 1$ in da le-te ne seka. Nato še skiciramo graf.



Ničli 0 in 1 .... 1 točka
Pol -2 .... 1 točka
Izračunana asimptota $y = x - 1$ .... 1 točka
Narisana asimptota .... 1 točka
Skiciran graf (vsaka veja grafa) .... 1 + 1 točka

B4. Če zapišemo $p(x) = (q(x))^2$, domnevamo, da je $q(x) = x^2 + ax \pm 2$. Tedaj je $(q(x))^2 = x^4 + 2ax^3 + (a^2 \pm 4)x^2 \pm 4ax + 4$. Če primerjamo koeficienta pri x^3 polinomov $p(x)$ in $(q(x))^2$, ugotovimo, da mora biti $a = -1$, če pa primerjamo še koeficienta pri x^2 oziroma x, ugotovimo, da ima stalni člen polinoma $q(x)$ pozitiven predznak. Imamo torej eno samo rešitev: $p(x) = (x^2 - x + 2)^2$.

Zapis $p(x) = (q(x))^2$ .... 1 točka
Domneva: $q(x) = x^2 + ax \pm 2$ .... 1 točka
Izračun kvadrata $q(x)$ .... 1 točka
Primerjava koeficientov $2a = -2, a^2 \pm 4 = 5, \pm 4a = -4$ .... 1 točka
Edina rešitev $a = -1$ .... 1 točka
Sklep $p(x) = (x^2 - x + 2)^2$ .... 1 točka

Četrti letnik

I. DEL

Naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Odgovor	C	E	D	B	C	B

A2. Največja vrednost funkcije $g(x)$ je 29, zato je pravilen odgovor (E).

A4. Tričleno naraščajoče aritmetično zaporedje s srednjim členom 10 lahko zapišemo $10-d$, 10, $10+d$, kjer je $d>0$. Ustrezno geometrijsko zaporedje je $10-d$, 8, $10+d$ in velja $\frac{8}{10-d}=\frac{10+d}{8}$, od koder je $d^2=36$, zaradi pogoja $d>0$ pa imamo le rešitev $d=6$. Aritmetično zaporedje je torej 4, 10, 16.

A5. Vsi fantje skupaj tehtajo $20\cdot 62=1240$ kg, skupaj z učiteljem pa $21\cdot 63=1323$ kg. Učitelj tehta 83 kg.

A6. Pišemo: $\left(\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right):(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha-1)=\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right):\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-1\right)=$ $\frac{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha.$

II. DEL

B1. Pogoju naloge je zadoščeno, če velja $\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{\frac{x+3}{x^2-4}+\frac{x+3}{x+2}}{2}$, enačbo pa lahko preuredimo v $x^2=1$, ki ima rešitvi $x_1=1$ in $x_2=-1$.

Zapis $\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{\frac{x+3}{x^2-4}+\frac{x+3}{x+2}}{2}$ .... 1 točka
Pogoj $x\neq\pm 2$ .... 1 točka
Odprava ulomkov .... 1 točka
Pravilno reševanje enačbe .... 1 točka
Sklep $x^2-1=0$ .... 1 točka
Rešitvi $x_1=1, x_2=-1$ .... 1 točka

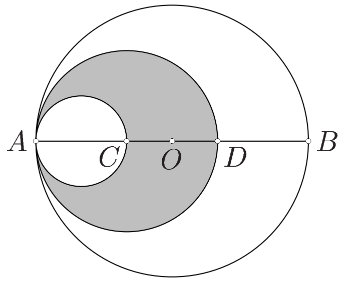
B2. Ker je α oster kot, je $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{12}{13}$. Nato izračunamo $\sin(2\alpha+\pi)=-\sin 2\alpha=$ $-2\sin\alpha\cos\alpha=-2\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{12}{13}=-\frac{120}{169}$.

Sklep $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ .... 1 točka
Zveza $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ .... 1 točka
Sklep $\sin 2\alpha=\frac{120}{169}$ .... 1 točka
Zveza $\sin(2\alpha+\pi)=\sin 2\alpha\cos\pi+\cos 2\alpha\sin\pi$ .... 1 točka
Upoštevanje $\cos\pi=-1, \sin\pi=0$ .... 1 točka
Rezultat $\sin(2\alpha+\pi)=-\frac{120}{169}$ .... 1 točka

B3. Najprej izračunamo sredine razredov, nato pa $\overline{x} = \frac{1}{120} \cdot (62.45 \cdot 23 + 67.45 \cdot 16 + 72.45 \cdot 15 + 77.45 \cdot 32 + 82.45 \cdot 24 + 87.45 \cdot 6 + 92.45 \cdot 2 + 97.45 \cdot 2) = \frac{1}{120} \cdot 8964 = 74.7$. Po formuli $\sigma = \sqrt{\frac{1}{120} \cdot (23 \cdot (74.7 - 62.45)^2 + 16 \cdot (74.7 - 67.45)^2 + \cdots + 2 \cdot (74.7 - 97.45)^2)} = 8.5$ izračunamo še standardni odklon.

Izračunana sredina razredov .... 1 točka
Poznavanje obrazca za aritmetično sredino .... 1 točka
Rezultat $\overline{x} = 74.7$ .... 1 točka
Poznavanje obrazca za standardni odklon .... 1 točka
Postopek .... 1 točka
Razultat $\sigma = 8.5$ .... 1 točka

B4. Ploščina osenčenega lika iz naloge je enaka ploščini osenčenega lika na desni sliki, to je razliki med ploščino kroga s polmerom $\frac{2}{3}R$ in ploščino kroga s polmerom $\frac{1}{3}R$: $S = \pi(\frac{4}{9}R^2 - \frac{1}{9}R^2) = \frac{\pi}{3}R^2$.



Zveza $r_1 = \frac{1}{3}R$ .... 1 točka
Zveza $r_2 = \frac{2}{3}R$ .... 1 točka
Poznavanje obrazca za ploščino kroga .... 1 točka
Sklep $S = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 =$ .... 1 točka
$= \pi\left(\frac{4}{9}R^2 - \frac{1}{9}R^2\right) = \frac{\pi}{3}R^2$ .... 1 + 1 točka