Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

10. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Področno tekmovanje, 31. marec 2010

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA PRVI LETNIK

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

B1	B2	B3	B4

A1. Katera trditev ni pravilna?

(**A**) Neničelni ulomek ima negativno vrednost, če imata števec in imenovalec različen predznak.

(**B**) Zmnožek sodega in lihega števila je sodo število.

(**C**) Število $5m$ je večkratnik števila m.

(**D**) Vrednost potence negativnega števila je pozitivna, če je eksponent sodo število.

(**E**) Če je število deljivo z 2, je zagotovo deljivo z 10.

A2. Če trikratnik števila x delimo z $x-4$, dobimo količnik 4 in ostanek $x-12$. Koliko je x?

(**A**) 16 (**B**) 14 (**C**) 12 (**D**) 10

(**E**) Nič od navedenega.

A3. Vrednost katerega izraza je celo število?

(**A**) $(\sqrt{2}-1)^2$ (**B**) $(\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)$ (**C**) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$

(**D**) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$ (**E**) $(\sqrt[3]{2})^2$

A4. Polovica petine dvakratnika kvadrata negativnega števila m je 242. Kolikšno je število m?

(**A**) $-2\sqrt{2}$ (**B**) 60 (**C**) $\sqrt{122}$ (**D**) $-11\sqrt{10}$ (**E**) $\sqrt{1210}$

A5. Koliko je vrednost izraza $2 \cdot \frac{0{,}\bar{6}-1{,}2^{-1}}{\frac{1}{3}-1}+(4-3)^2$?

(**A**) $0,5$ (**B**) 1 (**C**) $1,\bar{3}$ (**D**) $\frac{3}{2}$ (**E**) $\frac{5}{4}$

A6. Za naravna števila x, y in z velja $x<y<z$. Katera izmed naslednjih trditev je pravilna?

(**A**) $\frac{1}{y}<\frac{1}{z}$ (**B**) $-y>\frac{1}{z}$ (**C**) $-x>-z$ (**D**) $x<-\frac{1}{z}$ (**E**) $-x<-y$

© 2010 DMFA Slovenije, Komisija za tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

B1. Poenostavi izraz $\left(\frac{1}{2}-\frac{6}{a}+18a^{-2}\right)\cdot\frac{2a^2-4a}{a-6}:\left(a-\frac{36}{a}\right)$.

B2. Preglednica prikazuje barvo las dijakinj nekega razreda.

Barva las	**Število dijakinj**
blond	8
rjava	7
rdeča	3
črna	2

a) Zapiši odstotek dijakinj, ki imajo rdeče ali črne lase.

b) Zapiši odstotek dijakinj, ki bi si moralo spremeniti barvo v črno, da bi bilo v razredu $20\ \%$ dijakinj s črnimi lasmi.

c) Koliko rdečelask bi moralo priti v razred, da bi bilo v razredu $32\ \%$ rdečelask?

B3. Pastirja modrujeta. Prvi pravi: "Prodaj mi šest ovac, pa bom imel dvakrat tolikšno čredo kot ti." Drugi mu odgovori: "Če kupim tri tvoje ovce, bova imela enako veliki čredi." Kolikšni sta čredi?

B4. Zmnožek dveh zaporednih celih števil je za 128 večji od dvakratnika njune vsote. Kateri števili sta to? Zapiši vse možnosti.

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

10. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Področno tekmovanje, 31. marec 2010

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA DRUGI LETNIK

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

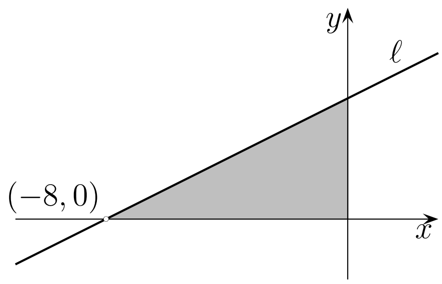
A1	A2	A3	A4	A5	A6

B1	B2	B3	B4

A1. Točka $S\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right)$ je središče daljice AB. Eno krajišče daljice je točka $A(3-2\sqrt{5}, 4-\sqrt{5})$. Katera točka je drugo krajišče te daljice?

(A) $B(-2-\sqrt{5}, 1+2\sqrt{5})$ **(B)** $B(1-7\sqrt{5}, 3+\sqrt{5})$ **(C)** $B(2+\sqrt{5}, 1-2\sqrt{5})$
(D) $B(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{-\sqrt{5}}{2})$ **(E)** $B(1-2\sqrt{5}, 2+\sqrt{5})$

A2. Ploščina osenčenega lika na sliki je 16 ploščinskih enot. Kolikšen je smerni koeficient premice ℓ?



(A) 4 **(B)** 2 **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $-\frac{1}{2}$
(E) Nemogoče je določiti.

A3. Trikotnik ABC je enakokrak pravokoten trikotnik s pravim kotom pri oglišču A. Na stranici BC leži takšna točka D, da je AD težiščnica trikotnika ABC. Katera izmed daljic je enako dolga kot daljica AD?

(A) AC **(B)** AB **(C)** BC **(D)** BD
(E) Nič od navedenega.

A4. Dve stranici trikotnika sta dolgi $7a-4b$ in $11a-3b$ enot, pri čemer sta a in b naravni števili. Kolikšna je tretja stranica, če je obseg $21a+2b$ enot?

(A) $15a+16b$ **(B)** $2a-21b$ **(C)** $3a+9b$ **(D)** $2a+5b$ **(E)** $3a-9b$

A5. Kolikšen je obseg pravokotnega trikotnika, če je en notranji kot velik $60°$, dolžini katet pa se razlikujeta za 2 enoti?

(A) $4\sqrt{3}+6$ **(B)** $4\sqrt{3}-6$ **(C)** $4\sqrt{3}+2$ **(D)** $4\sqrt{3}+4$ **(E)** 6

A6. Naj bo $m>1$. Kaj dobimo, če poenostavimo izraz $m^{0,5} : \sqrt{m^{-\frac{3}{4}} \cdot m^{\frac{1}{8}}}$?

(A) 1 **(B)** m^2 **(C)** m^{-1} **(D)** m **(E)** -1

© 2010 DMFA Slovenije, Komisija za tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

B1. Zapiši enačbo premice, ki poteka skozi presečišče premic z enačbama $\frac{x}{2} + y : (-\frac{7}{2}) = 1$ in $y = 2x - 3$ ter je vzporedna simetrali lihih kvadrantov.

B2. Velikosti zunanjih kotov ob hipotenuzi pravokotnega trikotnika sta v razmerju $13 : 17$. Kolikšni so notranji koti tega trikotnika?

B3. Poenostavi izraz $\frac{(1-(\frac{x}{y})^2)\cdot y^2 \cdot (x-y)^{-1}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+\sqrt{4xy}}$, če je $x, y > 0$ in $x \neq y$.

B4. Enakokraki trapez $ABCD$ vrišemo v koordinatni sistem. Daljša osnovnica leži na abscisni osi, os simetrije trapeza pa je ordinatna os. Osnovnici sta dolgi $a = 10$ enot in $c = 6$ enot, kraka pa tvorita z daljšo osnovnico kot $60°$. Zapiši enačbe nosilk stranic, če leži oglišče C v I. kvadrantu.

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

10. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Področno tekmovanje, 31. marec 2010

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA TRETJI LETNIK

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

B1	B2	B3	B4

A1. Kolikšna je ploščina trikotnika, katerega oglišča so v temenu in presečiščih grafa kvadratne funkcije $f(x) = x^2 - 4x - 5$ z abscisno osjo?

(A) 15 **(B)** 18 **(C)** 24 **(D)** 27 **(E)** 30

A2. Peter je zapisal množico vseh števil, ki so večja od dvakratne vrednosti svojih kvadratov, v obliki intervala. Kaj je zapisal?

(A) $(0, 1)$ **(B)** $[0, 1]$ **(C)** $(0, \frac{1}{2})$ **(D)** $(\frac{1}{2}, 2)$ **(E)** $[\frac{1}{2}, 1]$

A3. Kolikšna je začetna vrednost eksponentne funkcije $f(x) = -2 \cdot 2^{5x-1} + 4$?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 3 **(D)** -2 **(E)** 0

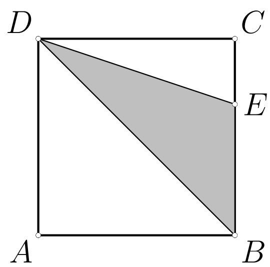
A4. Katera enakost ne velja?

(A) $\log_4 2 = 2$ **(B)** $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$ **(C)** $\log_{10} 0,1 = -1$ **(D)** $\log_7 7 = 1$ **(E)** $\log_5 1 = 0$

A5. Koliko evrov stane pleskanje okroglega podpornega stebra s premerom 9 dm in višino 32 dm, če je cena za kvadratni meter 6 evrov?

(A) $5428{,}67$ **(B)** $1809{,}56$ **(C)** $108{,}57$ **(D)** $54{,}29$ **(E)** $27{,}14$

A6. Ploščina kvadrata $ABCD$ je 36 m^2. Naj velja $|BE| = 2\,|EC|$. Kolikšen del ploščine kvadrata $ABCD$ zavzame trikotnik BED?



(A) $\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{2}{5}$ **(E)** $\frac{1}{3}$

© 2010 DMFA Slovenije, Komisija za tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

B1. Reši eksponentno enačbo $16 \cdot 16\sqrt{4^{5x}} = \sqrt[4]{4^{3x+10}} \cdot \sqrt[3]{4^{5x+1}}$.

B2. Dana je funkcija $f(x) = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$.

- **a)** Izračunaj koordinate presečišč grafa funkcije s koordinatnima osema.
- **b)** Nariši graf funkcije f in zapiši enačbo njene asimptote.
- **c)** Določi koordinati presečišča grafa funkcije f s premico $y = -1$.

B3. Dana je kvadratna funkcija $f(x) = 2x^2 - 2mx + m$.

- **a)** Za katere vrednosti parametra m se parabola dotika abscisne osi?
- **b)** Za katere vrednosti parametra m je ordinata temena parabole pozitivna?

B4. Krožni izsek s ploščino 375π cm^2 in polmerom 25 cm naj bo plašč pokončnega stožca. Natančno izračunaj površino in prostornino telesa.

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

10. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Področno tekmovanje, 31. marec 2010

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA ČETRTI LETNIK

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

B1	B2	B3	B4

A1. Kolikšen je vodilni koeficient polinoma $p(x) = \sqrt{18}x^4 - \sqrt{8}x^4 - 3x^2 + 3$?

(A) -3 **(B)** $\sqrt{10}$ **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** 3 **(E)** $-\sqrt{8}$

A2. Petra je zapisala množico vseh števil, ki zadoščajo neenačbi $\frac{6}{x-5} > 0$, v obliki intervala. Kaj je zapisala?

(A) $(11, \infty)$ **(B)** $(-\infty, 11)$ **(C)** $(5, \infty)$ **(D)** $(-\infty, \infty)$

(E) Neenačba nima rešitev.

A3. Koliko je vrednost izraza $\frac{\sin 2\alpha}{1+\tan\alpha} + (\cos\alpha + \sin^2\alpha)^2$ za $\alpha = \frac{\pi}{4}$?

(A) $\frac{\sqrt{2}+5}{4}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}+6}{4}$ **(C)** $\frac{5+2\sqrt{2}}{4}$ **(D)** $\frac{5-2\sqrt{2}}{4}$ **(E)** $5 + 2\sqrt{2}$

A4. Definicijsko območje funkcije $f(x) = \frac{3}{2-\cos x}$ je

(A) $[-1, 1]$ **(B)** $\mathbb{R}^+$

(C) $\mathbb{R} - \{x;\ x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ **(D)** $\mathbb{R}$

(E) Nič od navedenenga.

A5. Kakšno zaporedje tvorijo ničle polinoma $p(x) = -2x^3 + 6x$?

(A) aritmetično zaporedje **(B)** geometrijsko zaporedje **(C)** neskončno zaporedje

(D) konstantno zaporedje **(E)** alternirajoče zaporedje

A6. Prva dva člena geometrijskega zaporedja sta $a_1 = \tan\frac{\pi}{6}$ in $a_2 = \sin\frac{\pi}{3}$. Koliko je tretji člen tega zaporedja?

(A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ **(B)** $\frac{\sqrt{6}}{4}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(D)** 1 **(E)** $\frac{2\sqrt{3}}{4}$

© 2010 DMFA Slovenije, Komisija za tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

B1. Rešitvi enačbe $8 \cdot 2^x = \sqrt[x]{16}$ sta realni ničli polinoma $p(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + 51x + b$. Izračunaj a in b ter poišči ostali dve ničli.

B2. Določi taki števili a in b, da ima kvadratna funkcija $g(x) = \frac{-1}{9}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{5}{9}$ teme v točki $T(a, b)$. Pri tako določenih a in b nariši graf funkcije $f(x) = \frac{x^2+a}{x^2+b}$.

B3. Dana je funkcija $f(x) = |\sin x|$. Določi vse točke iz intervala $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, za katere je $f(x) \leq \frac{1}{2}$.

B4. Starosti vnuka, mame in babice predstavljajo prve tri člene aritmetičnega zaporedja. Vnuk in babica sta skupaj stara pol stoletja. Starosti vnuka, vnukinje in babice pa predstavljajo prve tri člene geometrijskega zaporedja. Koliko so stari vnuk, vnukinja, mama in babica, če sta vnuk in vnukinja skupaj stara 8 let?

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

10. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Področno tekmovanje, 31. marec 2010

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, tako rešitev točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

Sklop A

A1	A2	A3	A4	A5	A6
E	B	C	D	D	C

A1. Nepravilna je trditev (**E**), saj število, ki je deljivo z 2 ni nujno deljivo z 10.

A2. Upoštevamo osnovni izrek o deljenju in nastavimo enakost $3x = 4(x-4) + x - 12$. Enačbo rešimo in dobimo rešitev 14.

A3. Pri poenostavljanju izrazov dobimo edino pri (**C**) vrednost 1, ki je edina celoštevilska rešitev.

A4. Upoštevamo besedilo naloge in nastavimo enačbo $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2m^2 = 242$. Enačbo uredimo in dobimo enačbo $m^2 = 1210$. Rešitvi sta $m_{1,2} = \pm\sqrt{1210} = \pm 11\sqrt{10}$. Ker iščemo negativno število m, je ustrezna rešitev $-11\sqrt{10}$.

A5. V ulomku zapišemo $0,\overline{6}$ z okrajšanim ulomkom $\frac{2}{3}$. Prav tako $1,2$ zapišemo z okrajšanim ulomkom in upoštevamo negativni eksponent. Uredimo dvojni ulomek in dobimo $\frac{1}{4}$. Nato pomnožimo tega še z 2 in prištejemo rezultat izraza v oklepaju, kar je 1. Vrednost izraza je $\frac{3}{2}$.

A6. Če je x manjši od z, potem je zagotovo $-x$ večji od $-z$. Pravilen odgovor je torej C.

Sklop B

© 2010 DMFA Slovenije, Komisija za tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

B1. Poenostavimo izraz v oklepaju in dobimo $\frac{a^2-12a+36}{2a^2}$. Poenostavimo tudi izraz v drugem oklepaju in dobimo $\frac{a^2-36}{a}$. Deljenje prevedemo v množenje z obratno vrednostjo, torej z $\frac{a}{a^2-36}$. Števce in imenovalce vseh ulomkov razstavimo $\frac{(a-6)(a+6)}{2a^2} \cdot \frac{2a(a-2)}{a-6} \cdot \frac{a}{(a-6)(a+6)}$, okrajšamo in dobimo rešitev $\frac{a-2}{a+6}$.

Poenostavitev prvega oklepaja $\frac{1}{2} - \frac{6}{a} + 18a^{-2} = \frac{a^2-12a+36}{2a^2}$ .... 1 točka
Poenostavitev drugega oklepaja $a - \frac{36}{a} = \frac{a^2-36}{a}$ .... 1 točka
Razstavljanje prvega ulomka $\frac{a^2-12a+36}{2a^2} = \frac{(a-6)(a+6)}{2a^2}$ .... 1 točka
Razstavljanje drugega ulomka $\frac{2a^2-4a}{a-6} = \frac{2a(a-2)}{a-6}$ .... 1 točka
Preoblikovanje deljanja v produkt $\frac{(a-6)(a+6)}{2a^2} \cdot \frac{2a(a-2)}{a-6} \cdot \frac{a}{(a-6)(a+6)}$ .... 1 točka
Rezultat $\frac{a-2}{a+6}$ .... 1 točka

B2. **a)** Rdeče ali črne lase ima 5 dijakinj, kar je $\frac{5}{20}$ oziroma 25% vseh dijakinj.

b) 20% črnolask v razredu ustreza 4 dijakinjam, kar pomeni, da si morata še dve dijakinji prebarvati lase v črno, torej 10%.

c) Če se razredu pridruži x dijakinj z rdečimi lasmi, jih bo v razredu $x+3$. Število dijakinj bo $x+20$. Ker je $32\% = \frac{8}{25}$, zapišemo enačbo $\frac{3+x}{20+x} = \frac{8}{25}$. Rešitev enačbe je 5.

Ugotovitev, da je $d = 5$ in $o = 20$ .... 1 točka
Izračun odstotka $\frac{5}{20} = 25\%$ .... 1 točka
Ugotovitev, da 20% pomeni 4 dijakinje .... 1 točka
Izračuna odstotka .... 1 točka
Nastavitev enačbe $\frac{3+x}{20+x} = \frac{8}{25}$ .... 1 točka
Rezultat $x = 5$ .... 1 točka

B3. Naj bo x število ovac prvega pastirja in y število ovac drugega pastirja. Upoštevamo modrovanje prvega pastirja in zapišemo enačbo $x-6 = 2(y-6)$. Iz odgovora drugega pastirja zapišemo enakost $x-3 = y+3$. Rešimo nastali sistem dveh enačb z dvema neznankama. Dobimo rešitvi $x = 30$ in $y = 24$.

Nastavitev enačbe $x+6 = 2(y-6)$ .... 1 točka
Nastavitev druge enačbe $x-3 = y+3$ .... 1 točka
Pravilno reševanje sistema .... 1 točka
Izračunani rešitvi $x = 30$ in $y = 24$ .... 1 + 1 točka
Zapisan odgovor .... 1 točka
OPOMBA: V primeru uganjene rešitve, mora dijak rešitev preveriti. Če rešitev samo ugane in je ne preveri, dobi 4 točke.

B4. Naj bosta n in $n+1$ zaporedni celi števili. Upoštevamo besedilo naloge in zapišemo enačbo $n(n+1) = 2(n+n+1)+128$. Odpravimo oklepaje in enačbo poenostavimo do oblike $n^2-3n-130 = 0$. Enačbo rešimo z Vietovim pravilom $(n-13)(n+10)$, odčitamo rešitvi $n_1 = -10$ in $n_2 = 13$. Pra iskanih števila sta 13 in14 ter -10 in -9.

Zapis enačbe $n(n+1) = 2(n+n+1)+128$ .... 1 točka
Poenostavitev enačbe $n^2-3n-130 = 0$ .... 1 točka

Razcep leve strani enačbe $(n-13)(n+10)$ .... 1 točka
Rešitvi enačbe $n_1=-10$ in $n_2=13$ .... 1 točka
Zapis zaporednih števil $n_1+1=-9$ in $n_2+1=14$ .... 1 točka
Zapisan odgovor .... 1 točka
OPOMBA: Zaporedni števili lahko zapišemo tudi kot $n-1$ in n.
V primeru zapisa samo enega para rešitve, dobi tekmovalec 1 točko manj.

Drugi letnik

Sklop A

A1	A2	A3	A4	A5	A6
C	C	D	C	A	D

A1. Uporabimo formulo za izračuna središča oziroma razpolovišča daljice $S(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$. Zapišemo zvezo $\frac{3-2\sqrt{5}+x_1}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ in $\frac{4-\sqrt{5}+y_1}{2} = \frac{3-3\sqrt{5}}{2}$. Rešimo nastali enačbi in dobimo rešitvi $x_1 = 2+\sqrt{5}$ in $y_1 = 1-2\sqrt{5}$.

A2. Iz slike razberemo, da je $x = -8$, kar pomeni, da je dolžina ene katete trikotnika 8 enot. Drugo stranico, ki je tudi začetna vrednost, izračunamo iz zveze $\frac{x \cdot y}{2} = 16$. Izračunamo $n = y = 4$. Izračunamo še smerni koeficient, lahko kar iz naslednje zveze $y = kx + n$. Vstavimo znane podatke: $x = -8, y = 0$ in $n = 4$. Tako dobimo $0 = k \cdot (-8) + 4$ in iz tega izrazimo $k = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$.

A3. Ugotovimo, da je enakokraki pravokotni trikotnik polovica kvadrata s stranoico a in da je hipotenuza diagonala tega kvadrata. Težiščnica PT razpolavlja hipotenuzo in je zaradi enakokrakih katet tudi pravokotna nanjo. Iz tega razvidimo, da je težiščnica polovica diagonale kvadrata. Tako je njena dolžina enaka kot je dolžina daljice QT ali RT.

A4. Uporabimo formulo za obseg trikotnika $o = a + b + c$, vstavimo podatke $21a + 2b = 7a - 4b + 11a - 3b + c$. Izračunamo, da je $c = 3a + 9b$.

A5. Upoštevamo, da je dolžina katet x in $x + 2$. Uporabimo kotno funkcijo $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Nastavimo enakost $\sqrt{3} = \frac{x+2}{x}$. Enačbo množimo s skupnim imenovalcem x. Dobimo enačbo $\sqrt{3}x = x + 2$, jo uredimo $x(\sqrt{3} - 1) = 2$. Izrazimo $x = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$, racionaliziramo z $\sqrt{3} + 1$ in dobimo $x = \sqrt{3} + 1$. Nato izračunamo še obseg trikotnika $o = a + b + c = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 3 + 2\sqrt{3} + 2 = 4\sqrt{3} + 6$.

A6. Izraz poenostavimo tako, da eksponente zapišemo z ulomki $m^{\frac{1}{2}} : m^{-\frac{3}{8}} \cdot m^{\frac{1}{8}}$. Upoštevamo pravila za računanje s potencami $m^{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}} = m^{\frac{4+3+1}{8}}$ in dobimo rešitev m.

Sklop B

B1. Rešimo sistem dveh enačb z dvema neznankama na zamenjalni način in dobimo $\frac{x}{2} - \frac{2(2x-3)}{7} = 1$. Enačbo uredimo $7x - 8x + 12 = 14$ in dobimo rešitev $x = -2$. Izračunamo še $y = -7$. Koordinati presečišča sta $(-2, -7)$. Določimo smerni koeficient, ki ga razberemo iz simetrale lihih kvadrantov $y = x$, $k = 1$. Uporabimo zvezo $y = kx + n$, vstavimo podatke $-7 = 1 \cdot (-2) + n$ in izračunamo $n = -5$. Zapišemo enačbo premice $y = x - 5$.

Rešitev sistema $\frac{x}{2} - \frac{2(2x-3)}{7} = 1$ .... 1 točka
Rešitev $x = -2$ .... 1 točka
Rešitev $y = -7$ .... 1 točka
Določitev $k = 1$ .... 1 točka
Izračun $n = -5$ .... 1* točka
Zapis enačbe premice $y = x - 5$ .... 1 točka

B2. I. način

Zapišemo razmerje zunanjih kotov trikotnika $\alpha' : \beta' = 13 : 17$. Upoštevamo zvezo med notranjim in zunanjim kotom trikotnika $\alpha + \alpha' = 180^\circ$ in in odnos med zunanjim kotom in pripadajočimi notranjimi koti $\beta' = 90^\circ + \alpha$. Vstavimo v razmerje in dobimo enačbo $\frac{180^\circ - \alpha}{90^\circ + \alpha} = \frac{13}{17}$. Odpravimo ulomka in dobimo $17(180^\circ - \alpha) = 13(90^\circ - \alpha)$. Uredimo in izračunamo $\alpha = 63^\circ$ ter $\beta = 27^\circ$.

Zapis razmerja $\alpha' : \beta' = 13 : 17$ ... 1 točka
Uporaba zveze $\alpha' = 180^\circ - \alpha$ ... 1 točka
Uporaba zveze $\beta' = 90^\circ + \alpha$ ... 1 točka
Zapis enačbe $\frac{180^\circ - \alpha}{90^\circ + \alpha} = \frac{13}{17}$ ... 1 točka
Izračun $\alpha = 63^\circ$ ... 1 točka
Izračun $\beta = 27^\circ$ ... 1 točka

II: način

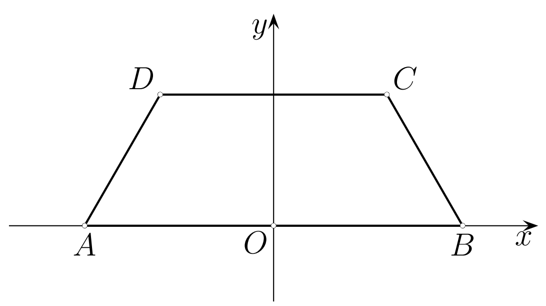
Uporabimo zvezo za vsoto zunanjih kotov $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$ in upoštevamo enakost $\gamma = \gamma' = 90^\circ$. Nastavimo zvezo $13k + 17k + 90^\circ = 360^\circ$. Uredimo $30k = 270^\circ$ in izračunamo $k = 9^\circ$. Izračunamo $\alpha' = 13 \cdot 9^\circ = 117^\circ$ ter $\beta' = 17 \cdot 9^\circ = 153^\circ$. Nato izračunamo še $\alpha = 180^\circ - \alpha' = 63^\circ$ ter $\beta = 180^\circ - \beta' = 27^\circ$.

Zapis razmerja $\alpha' : \beta' = 13 : 17$ ... 1 točka
Uporaba zveze $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$ ... 1 točka
Izračun $k = 9^\circ$ ... 1 točka
Izračun $\alpha' = 13 \cdot 9^\circ = 117^\circ$ ter $\beta' = 17 \cdot 9^\circ = 153^\circ$ ... 1 točka
Izračun $\alpha = 63^\circ$ ... 1 točka
Izračun $\beta = 27^\circ$ ... 1 točka

B3. Opravimo množenje in upoštevamo negativni eksponent v števcu $(1 - (\frac{x}{y})^2 \cdot y^2 \cdot (x - y)^{-1} = (y^2 - x^2) \cdot \frac{1}{x-y}$. Kvadriramo in delno korenimo v imenovalcu $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + \sqrt{4xy} = x - 2\sqrt{xy} + y + 2\sqrt{xy}$. Razstavimo števec in skrčimo imenovalec $\frac{(y-x)(y+x)\frac{1}{x-y}}{x+y}$. Okrajšamo in dobimo $(y - x)\frac{1}{x-y} = \frac{y-x}{x-y}$, ponovno okrajšamo in dobimo -1.

Kvadriranje v imenovalcu $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y$ ... 1 točka
Množenje v števcu $(1 - (\frac{x}{y})^2 \cdot y^2 = (y^2 - x^2)$ ... 1 točka
Ureditev imenovalca $x - 2\sqrt{xy} + y + 2\sqrt{xy} = x + y$ ... 1 točka
Razstavljanje v števcu $(y - x)(y + x)$ ... 1 točka
Ureditev dvojnega ulomka ... 1 točka
Rezultat -1 ... 1 točka

B4. Narišemo skico po podatkih naloge.



Točki A in B imata znane koordinate $A(-5,0)$ in $B(5,0)$. Upoštevamo kot $60°$ in v trapez vrišemo pravokotni trikotnik NBC. Dolžina stranice $|BN| = \frac{a-c}{2}$, kar je 2 enoti. Uporabimo kotno funkcijo $\tan 60° = \frac{v}{2}$. Izračunamo $v = 2\sqrt{3}$. Upoštevamo,da je $y = v$ in iz tega dobimo koordinate točk $C(3, 2\sqrt{3})$ in $D(-3, 2\sqrt{3})$. Nosilka stranice a je os x, tako je njena enačba $y = 0$, nosilka stranice c je vzporednica osi x in poteka skozi ordinato $y = 2\sqrt{3}$, tako je njena enačba $y = 2\sqrt{3}$. Nosilka daljice BC ima smerni koeficient $k = \frac{2\sqrt{3}-0}{3-5} = -\sqrt{3}$. Izračunamo začetno vrednost iz zveze $0 = -\sqrt{3} \cdot 5 + n$. Dobimo $n = 5\sqrt{3}$. Enačba nosilke je torej $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$. Nosilka daljice AD je zrcalna slika nosilke daljice BC glede na os y, torej ima enačbo $y = \sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$.

Določeni koordinati točk $C(3, 2\sqrt{3})$ in $D(-3, 2\sqrt{3})$ ali izračunana višina $v = 2\sqrt{3}$ ... 1 točka
Enačba nosilke stranice a je $y = 0$ .... 1 točka
Enačba nosilke stranice c je $y = 2\sqrt{3}$ .... 1 točka
Izračun vsaj enega izmed smernih koeficientov $k = \sqrt{3}$ ali $k = -\sqrt{3}$ .... 1 točka
Enačba nosilke stranice BC je $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$ .... 1 točka
Enačba nosilke stranice AD je $y = \sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$ .... 1 točka

Tretji letnik

Sklop A

A1	A2	A3	A4	A5	A6
D	C	C	A	D	E

A1. Ničli kvadratne funkcije sta $x_1 = 5$ in $x_2 = -1$, teme pa je $T(2, -9)$. Ploščina trikotnika, ki ga oblikujejo te točke, je $S = \frac{6 \cdot 9}{2} = 27$.

A2. Zapišemo neenakost $x > 2 \cdot x^2$. Neenačbo uredimo in razstavimo $x(1 - 2x) > 0$. Odčitamo ničli $x_1 = 0$ in $x_2 = \frac{1}{2}$. Na številski premici označimo predznake in ugotovimo, da je rešitev interval $(0, \frac{1}{2})$.

A3. Za izračun začetne vrednosti vstavimo $x = 0$ in izračunamo vrednost funkcije $f(0) = -2 \cdot 2^{5 \cdot 0 - 1} + 4 = -2 \cdot 2^{-1} + 4 = 3$.

A4. Nepravilna je prva neenakost, saj velja $\log_4 2 = \frac{1}{2}$, ker je $4^{\frac{1}{2}} = 2$.

A5. Izračunamo površino stebra, ki ga je potrebno pleskati, kar je plašč valja $S_{pl} = 2\pi r \cdot v = \pi d v$, kjer je $d = 2r$. Vstavimo podatke $S_{pl} = \pi \cdot 9 \cdot 32\ \text{dm}^2$. Nato izračunamo še ceno pleskanja $C = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 32 \cdot 6}{100} = 54,29$ evra.

A6. Ploščino trikotnika BEC je $S = 6\ \text{m}^2$, trikotnika BAD pa $S = 18\ \text{m}^2$. Iskana ploščina trikotnika BED je $36 - 18 - 6 = 12\ \text{m}^2$. Pripadajoče razmerje ploščin je $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

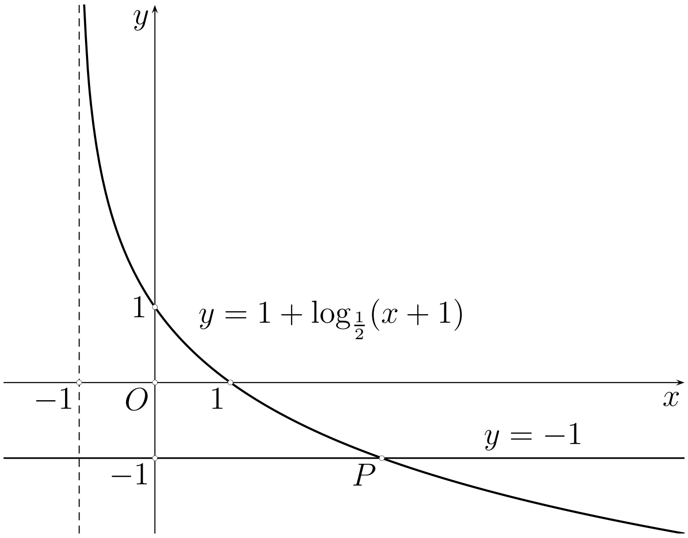
Sklop B

B1. Enačbo preuredimo, tako da levo in desno stran zapišemo v obliki potence $4^{4+\frac{5x}{2}} = 4^{\frac{3x+10}{4}} \cdot 4^{\frac{5x+1}{3}}$. Na desni strani opravimo množenje potenc in dobimo $4^{4+\frac{5x}{2}} = 4^{\frac{29x+34}{12}}$. Upoštevamo pravilo za reševanje eksponentnih enačb in enačimo eksponente $4 + \frac{5x}{2} = \frac{29x+34}{12}$. Znebimo se ulomka $48 + 30x = 29x + 34$, uredimo nastalo linearno enačbo in dobimo rešitev $x = -14$.

Zapis leve strani enačbe v obliki potence $4^{4+\frac{5x}{2}}$ .... 1 točka
Zapis desne strani enačbe s potenco $4^{\frac{3x+10}{4}} \cdot 4^{\frac{5x+1}{3}}$ .... 1 točka
Množenje potenc z isto osnovo $4^{\frac{3x+10}{4}} \cdot 4^{\frac{5x+1}{3}} = 4^{\frac{29x+34}{12}}$ .... 1 točka
Enačenje eksponentov $4 + \frac{5x}{2} = \frac{29x+34}{12}$ .... 1 točka
Reševanje linearne enačbe .... 1 točka
Rešitev $x = -14$ .... 1 točka

B2. **a)** Za izračun presečišča grafa funkcije z osjo x zapišemo enačbo $1 + \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) = 0$. Enačbo uredimo $(\frac{1}{2})^{-1} = x + 1$. Rešitev enačbe je $x = 1$. Za presečišče z osjo y izračunamo začetno vrednost $f(0) = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(0 + 1) = 1 + 0 = 1$. Presečišči sta točki $M(1, 0)$ in $N(1, 0)$.

b) Odčitamo enačbo asimptote $x = -1$ in narišemo graf funkcije.

c) 

I. način
Izračunamo presečišče grafa funkcije s premico $y = -1$, tako da rešimo enačbo $1+\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -1$. Enačbo uredimo $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -2$, zapišemo enakost $(\frac{1}{2})^{-2} = x+1$. Rešitev nastale enačbe je $x = 3$. Presečišče je točka $P(3, -1)$.

II. način
Narišemo premico $y = -1$ v isti koordinatni sistem kot je narisan graf dane funkcije f ter odčitamo koordinati presečišča $P(3, -1)$.

Izračun presečišča z x osjo $M(1, 0)$ .... 1 točka
Izračun presečišča z y osjo $N(0, 1)$ .... 1 točka
Enačba asimptote $x = -1$ .... 1 točka
Narisan graf funkcije .... 1 točka
Izračun presečišča s premico ali narisana premica $y = -1$ .... 1 točka
Zapis presečišča $P(3, -1)$ .... 1 točka

B3. **a)** Zapišemo pogoj $D = 0$. Vstavimo podatke in zapišemo enačbo $4m^2 - 8m = 0$. Enačbo rešimo in dobimo rešitvi $m_1 = 0$ in $m_2 = 2$.

b) Zapišemo pogoj $q > 0$ ali $\frac{-D}{4a} > 0$. Vstavimo podatke $-\frac{4m^2-8m}{4} > 0$. Rešimo nastalo neenačbo, tako da odpravimo ulomek in dobimo $m^2 - 2m < 0$. Odčitamo $m_1 = 0$ in $m_2 = 2$ ter na številski premici preverimo predznak funkcije na posameznih intervalih. Odčitamo rešitev $0 < x < 2$.

Zapis pogoja $D = 0$ .... 1 točka
Izračuna $m_1 = 0$ in $m_2 = 2$ .... 1 točka
Zapis pogoja $q > 0$ ali $\frac{-D}{4a} > 0$ .... 1 točka
Uporaba podatkov $-\frac{4m^2-8m}{4} > 0$ .... 1 točka
Ureditev neenačbe $m^2 - 2m < 0$ .... 1 točka
Rešitev $0 < x < 2$ ali $x \in (0, 2)$ .... 1 točka

B4. Uporabimo obrazec za ploščino plašča stožca $S_{pl} = \pi r s$. Upoštevamo, da je stranica stožca enaka polmeru krožnega izseka $s = 25$ cm. Izračunamo polmer stožca $r = \frac{S_{pl}}{\pi} = 15$ cm.

Uporabimo obrazec za izračun površine stožca $P = \pi r^2 + S_{pl}$ in izračunamo $P = 600\pi$ cm^2. Uporabimo Pitagorov izrek za izračun višine stožca $v^2 = s^2 - r^2$. $v = 20$ cm. Uporabimo obrazec za izračun prostornine $V = \frac{\pi r^2 v}{3} = 1500\pi$ cm^3.

Ugotovitev, da je polmer izseka stranica stožca $s = 25$ cm .... 1 točka
Izračun polmera stožca $r = \frac{S_{pl}}{\pi} = 15$ cm .... 1 točka
Izračun površine $P = 600\pi$ cm^2 .... 1 točka
Uporaba Pitagorovega izreka $v^2 = s^2 - r^2$ .... 1 točka
Izračun višine $v = 20$ cm .... 1 točka
Izračun prostornine $V = \frac{\pi r^2 v}{3} = 1500\pi$ cm^3 .... 1 točka
OPOMBA: Če rezultata nista natančna se odšteje ena točka.

Četrti letnik

Sklop A

A1	A2	A3	A4	A5	A6
C	C	C	D	A	A

A1. Vodilni koeficient polinoma $p(x)$ je $\sqrt{18}-\sqrt{8}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

A2. Racionalna funkcija ima pol v $x=5$, pozitivna je za $x>5$.

A3. Vstavimo kot $\alpha=\frac{\pi}{4}$ v izraz in dobimo $\frac{1}{1+1}+(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2})^2$. Kvadriramo $\frac{2+2\sqrt{2}+1}{4}$, ulomka seštejemo $\frac{2+2+2\sqrt{2}+1}{4}=\frac{5+2\sqrt{2}}{4}$.

A4. Definicijsko območje dane funkcije so vsa realna števila, saj enačba $2-\cos x=0$ nima rešitve.

A5. Ničle polinoma $p(x)$ so $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$, kar so členi aritmetičnega zaporedja. Tako velja $d=0-(-\sqrt{3})\sqrt{3}$ ali $d=\sqrt{3}-0=\sqrt{3}$.

A6. Prvi člen zaporedja je $a_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$, drugi člen $a_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$, kar pomeni, da je $q=\frac{3}{2}$. Tako je $a_3=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Sklop B

B1. Rešimo eksponentno enačbo $2^{x+3}=2^{\frac{4}{x}}$. Enačimo eksponenta $x+3=\frac{4}{x}$. Odpravimo ulomek $x^2+3x=4$ in dobimo kvadratno enačbo $x^2+3x-4=0$. Rešitvi sta $x_1=-4$ in $x_2=1$. Uporabimo Hornerjev algoritem ali pa nastavimo sistem dveh enačb z dvedema neznankama. Rešimo sistem enačb

$$-3a-39=0$$
$$a+b+49=0.$$

Dobimo rešitvi $a=-13$ in $b=-36$. Količnik pri deljenju polinoma $p(x)$ s polinomom $q(x)=(x+4)(x-1)$, ki ga dobimo iz rešitev eksponentne enačbe, je enak x^2-6x+9. Iz tega dobimo še preostali ničli polinoma $x_{3,4}=3$.

Reševanje eksponentne enačbe .... 1^* točka
Rešitev eksponentne enačbe $x^2+3x-4=0$ .... 1 točka
Zapis in reševanje sistema enačb

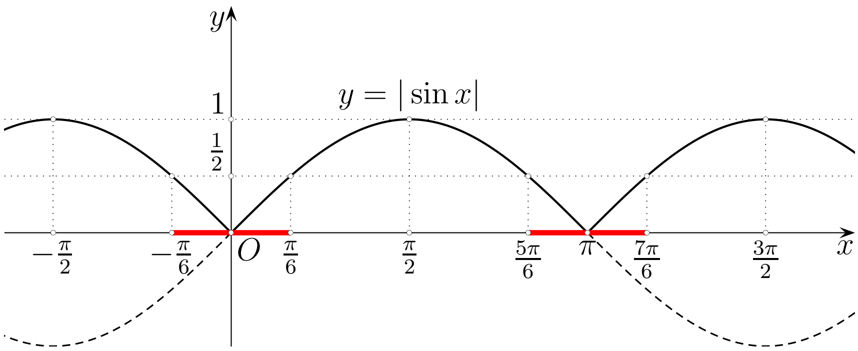
$$-3a-39=0$$
$$a+b+49=0.$$

.... $1+1$ točka
Zapis količnika x^2-6x+9 .... 1 točka
Izračun ničel $x_{3,4}=3$ .... 1 točka

B2. Izračunamo teme kvadratne funkcije $g(x)$, ki je $T(-2,1)$. Upoštevamo besedilo naloge in zapišemo enačbo funkcije $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+1}$. Izračunamo ničli $x_1=\sqrt{2}$ in $x_2=-\sqrt{2}$. Ugotovimo, da funkcija nima polov, da je asimptota $y=1$ in presečišče z ordinatno osjo $(0,-2)$. Narišemo graf.

Izračun temena $T(-2,1)$ .... 1 točka
Zapis enačbe $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+1}$ .... 1 točka
Izračun ničel $x_1=\sqrt{2}$ in $x_2=-\sqrt{2}$ .... 1 točka
Izračun oziroma upoštevanje na grafu $f(0)=-2$ .... 1 točka
Upoštevanje vodoravne asimptote $y=-2$ .... 1 točka
Narisan graf .... 1 točka

B3. Narišemo graf funkcije $f(x)=\sin x$.



Upoštevamo absolutno vrednost, tako da graf prezrcalimo preko abscisne osi navzgor. Označimo dela grafa, ki ustrezata pogoju $|\sin x|\leq\frac{1}{2}$. To sta dela iz intervala $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$ ter $[\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}]$.

Upoštevan interval $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ .... 1 točka
Narisan graf $f(x)=\sin x$ .... 1 točka
Narisan graf $f(x)=|\sin x|$ .... 1 točka
Upoštevanje $|\sin x|\leq\frac{1}{2}$ .... 1 točka
Označeno na krivulji $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$ in $[\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}]$ .... $1+1$ točka

B4. I. način
Izberemo spremenljivke npr.: x je starost vnuka, y je starost mame, z je starost babice in t je starost vnukinje. Zapišemo enakosti $x+z=50$ in $x-2y-z=0$, kar so lastnosti aritmetičnega zaporedja. Zapišemo enačbi $x+t=8$ in $t^2=x\cdot z$, kar so lastnosti geometrijskega zaporedja.Rešimo sistem npr. $(8-x)^2=x(50-x)$, ga preoblikujemo v $x^2-33x+32=0$. Poiščemo rešitvi $x_1=1$ in $x_2=32$. Izločimo rešitev $x=32$. Poiščemo starosti babice, mame in vnukinje.

Zapis enakosti $x+z=50$ in $x-2y-z=0$ .... 1 točka
Zapis enakosti $x+t=8$ in $t^2=x\cdot z$ .... 1 točka
Reševanje sistema $(8-x)^2=x(50-x)$ .... 1 točka
Rešitev $x_1=1$ .... 1 točka
Izračun starosti babice $z=49$ .... 1 točka
Izračun starosti mame $y=25$ in vnukinje $t=7$ .... 1 točka
Odgovor: Če rešitev ugane in jih preveri, dobi tekmovalec vse točke.

II. način
Naj bo a_1 starost vnuka, a_2 starost mame in a_3 starost babice, ki predstavljajo člene aritmetičnega zaporedja. Upoštevamo besedilo naloge in zapišemo zvezo $a_1+a_3=50$. Naj bo b_1

starost vnuka, b_2 starost vnukinje in b_3 starost babice, ki predstavljajo člene geometrijskega zaporedja. Upoštevamo besedilo naloge $b_1 + b_2 = 8$. Upoštevamo, da je $b_2 = 8 - a_1$ in da je $b_2 = a_1 \cdot k$. Izrazimo $k = \frac{8-a_1}{a_1}$. Upoštevamo, da je $a_3 = a_1 \cdot (\frac{8-a_1}{a_1})^2 = 50 - a_1$. Uredimo enačbo $\frac{64-16a_1+a_1^2}{a_1} = 50 - a_1$. Odpravimo ulomek in uredimo enačbo $2a_1^2 - 66a_1 + 64 = 0$, jo okrajšamo in razstavimo $(a_1 - 1)(a_1 - 32)$. Rešitev je $a_1 = 1$, saj rešitev $a_1 = 32$ odpade. Zdaj izračunamo starost babice $a_3 = 50 - 1 = 49$ ter nato še starost mame $a_2 = \frac{a_1+a_2}{2} = 25$ in vnukinje $b_2 = 8 - 1 = 7$.

Zapis zveze $a_1 + a_3 = 50$ .... 1 točka
Zapis zveze $b_1 + b_2 = 8$ .... 1 točka
Zapis enačbe $a_1 \cdot (\frac{8-a_1}{a_1})^2 = 50 - a_1$ .... 1 točka
Rešitev $a_1 = 1$ .... 1 točka
Izračun starosti babice $a_3 = 50 - 1 = 49$ .... 1 točka
Izračun starosti mame $a_2 = \frac{a_1+a_2}{2} = 25$ in vnukinje $b_2 = 8 - 1 = 7$ .... 1 točka