**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

12. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Področno tekmovanje, 28. marec 2012

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA PRVI LETNIK

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bomo pravilen odgovor ovrednotili z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

B1	B2	B3	B4

A1 Koruzno zrno tehta približno $8 \cdot 10^{-2}$ g. Približno koliko koruznih zrn je v 1 toni koruze?

(**A**) $12\,500\,000$ (**B**) $1\,250$ (**C**) $1\,250\,000$
(**D**) $8\,000$ (**E**) $80\,000$

A2 Koliko deliteljev ima število 7425?

(**A**) 6 (**B**) 19 (**C**) 24 (**D**) 165 (**E**) več kot 200

A3 Če člani smučarskega kluba plačajo 100 evrov letne članarine, imajo $50\,\%$ popusta pri nakupu dnevne smučarske vozovnice. Če pa plačajo 200 evrov letne članarine, pa imajo $80\,\%$ popusta pri nakupu dnevne smučarske vozovnice. Dnevna vozovnica stane 30 evrov. Najmanj koliko dni na leto bi morali smučati, da jim je ugodneje plačati dražjo članarino?

(**A**) 50 (**B**) 12 (**C**) 18
(**D**) 20 (**E**) 15

A4 Napolnili smo 240 steklenic soka po $0{,}75$ litra. Koliko steklenic po $0{,}5$ litra potrebujemo, če jih želimo napolniti z isto količino soka?

(**A**) 120 (**B**) 36 (**C**) 180
(**D**) 360 (**E**) 280

A5 Katero izmed navedenih števil je iracionalno?

(**A**) $\left(\sqrt{2}\right)^6$ (**B**) $\sqrt{256}$ (**C**) $\sqrt{\sqrt{4}}$
(**D**) $\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$ (**E**) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^3$

A6 Rešitev enačbe $\frac{5y}{6} + \frac{11-3y}{4} = \frac{2y-5}{3} - \frac{1}{4}$ je:

(**A**) $y = \frac{41}{7}$ (**B**) $y = -\frac{56}{11}$ (**C**) $y = 8$
(**D**) $y = -41$ (**E**) enačba nima nobene rešitve

II. DEL

B1. Izračunaj količnik števil a in b, če je a vsota števil $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$, število b pa je razlika med številom 1 in količnikom števil $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$. *(6 točk)*

B2. Poenostavi izraz $\left(\frac{x}{3}-\frac{x+1}{4}-\frac{1}{3x}\right)^{-1}:\frac{12x^2-24x}{x^2-6x+8}$ in izračunaj njegovo vrednost za $x=-2\frac{3}{7}$. *(7 točk)*

B3. Jana in Jan sta ugotovila, da je število njunih prijateljev na družabnem omrežju v razmerju $5:4$. Če bi Jana imela $6\,\%$ manj prijateljev in Jan za $\frac{1}{20}$ več prijateljev, bi imela Jana še vedno 15 prijateljev več kot Jan. Koliko prijateljev ima Jana? *(7 točk)*

B4. Tone je lani kupil delnice nekega podjetja. Zanje je plačal 2504 evre. Nekaj jih je kupil po 26 evrov, ostale pa po 18 evrov. Če bi jih prodal danes, ko je cena ene delnice 21 evrov, bi za njih dobil 2436 evrov. Koliko delnic je Tone kupil po 26 evrov in koliko delnic po 18 evrov? *(6 točk)*

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

12. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Področno tekmovanje, 28. marec 2012

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA DRUGI LETNIK

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bomo pravilen odgovor ovrednotili z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

B1	B2	B3	B4

A1 Katera točka je enako oddaljena od točk $A(1,4)$ in $B(7,2)$ ter leži na nosilki daljice AB?

(**A**) $(4,3)$ (**B**) $(3,0)$ (**C**) $(3,3)$ (**D**) $(0,0)$ (**E**) $(5,6)$

A2 Katero izmed navedenih lastnosti ima funkcija f s predpisom $f(x) = 2(x-1) - 4$?

(**A**) Funkcija je padajoča.
(**B**) Začetna vrednost funkcije je -4.
(**C**) Smerni koeficient funkcije je 2.
(**D**) Graf funkcije seka abscisno os pri $x = -6$.
(**E**) Funkcija je pozitivna za vsa realna števila.

A3 Fotograf je na šoli fotografiral razredne skupnosti. Vsaki razredni skupnosti je zaračunal 2 evra za stroške fotografiranja, za vsako naročeno fotografijo pa še $0{,}70$ evrov. Katera funkcija nam opisuje odvisnost zneska, ki ga plača razredna skupnost, od števila naročenih fotografij?

(**A**) $f(x) = 2x + 0{,}70$ (**B**) $f(x) = 0{,}70x + 2$ (**C**) $f(x) = x + 2 + 0{,}70$
(**D**) $f(x) = x + 2$ (**E**) nobena izmed navedenih

A4 Katere izmed navedenih treh dolžin niso dolžine stranic pravokotnega trikotnika?

(**A**) 3 cm, 4 cm, 5 cm (**B**) 20 cm, 21 cm, 29 cm (**C**) 12 cm, 35 cm, 36 cm
(**D**) 9 cm, 40 cm, 41 cm (**E**) 5 cm, 12 cm, 13 cm

A5 Riba in pol stane $3\sqrt{5}$ evrov. Koliko stane ena riba?

(**A**) $2\sqrt{5}$ evrov (**B**) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ evrov (**C**) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ evrov (**D**) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ evrov (**E**) $6\sqrt{5}$ evrov

A6 Katera izmed navedenih enakosti ne velja?

(**A**) $\sqrt{32} + 3\sqrt{50} = 19\sqrt{2}$
(**B**) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right) = 2$
(**C**) $\frac{\sqrt{\sqrt{6^n}}}{\sqrt{6^n}} = \frac{1}{\sqrt[4]{6^n}}$
(**D**) $\sqrt{2012^{16}} = 2012^4$
(**E**) $\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} = 1$

II. DEL

B1. Nariši množico točk (x, y) v pravokotnem koordinatnem sistemu v ravnini, ki zadoščajo pogoju $(x \leq 4) \wedge (y \geq -1) \wedge (y \leq x)$. Izračunaj ploščino lika, ki ga množica točk predstavlja.

(6 točk)

B2. Premica je oddaljena 3 cm od središča kroga s premerom $6\sqrt{2}$ cm. Izračunaj dolžino tetive, ki je presečišče kroga in premice. Nariši skico. *(6 točk)*

B3. Izračunaj, za katere vrednosti parametra m sta premici z enačbama $y = (m+5)x + m - 1$ in $y = (m-1)^2 x - 3m - 6$ vzporedni. *(7 točk)*

B4. Poenostavi izraz $\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+a^2)^{\frac{1}{2}} + 6{,}25^{-\frac{1}{2}} \cdot 0{,}008^{-\frac{2}{3}}$ brez uporabe žepnega računala.

(7 točk)

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

12. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Področno tekmovanje, 28. marec 2012

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA TRETJI LETNIK

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bomo pravilen odgovor ovrednotili z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

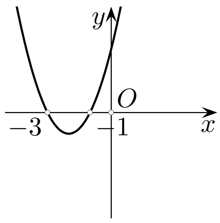
A1	A2	A3	A4	A5	A6

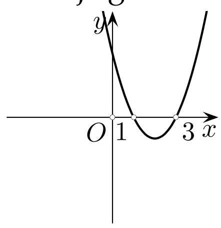
B1	B2	B3	B4

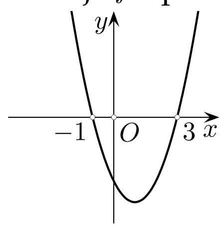
A1 Rešitev neenačbe $x^2 + 2x - 3 > x - 1$ so tista realna števila x, za katera velja:

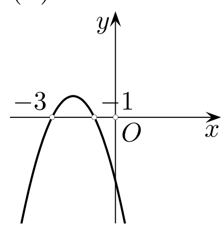
(A) $x < -2$ ali $x > 1$ **(B)** $x \geq 1$ **(C)** $x \geq -3$
(D) $x \in (-2, 1)$ **(E)** $x \in [-2, 1]$

A2 Kateri izmed narisanih grafov je graf kvadratne funkcije f s predpisom $f(x) = x^2 + 4x + 3$?

(A) 

(B) 

(C) 

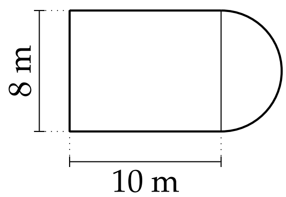
(D) 

(E) nobeden izmed narisanih

A3 Katera izmed navedenih točk ne leži na grafu funkcije f s predpisom $f(x) = \log_2(3x+2)+1$?

(A) $(2, 4)$ **(B)** $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ **(C)** $\left(\frac{2}{3}, 3\right)$ **(D)** $(10, 6)$ **(E)** $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

A4 Luka bo na svojem dvorišču prebarval igralno polje košarkarskega igrišča. Igralno polje tvorita pravokotnik in polkrog kot kaže slika. Ploščina igralnega polja je:



(A) 80 m^2 **(B)** $(80 + 8\pi)$ m^2 **(C)** $(80 + 16\pi)$ m^2
(D) $(80 + 64\pi)$ m^2 **(E)** 244π m^2

A5 Začetna vrednost funkcije f s predpisom $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot 5^x + 4$ je:

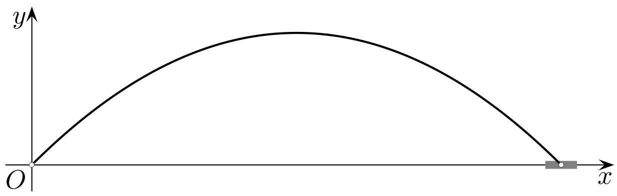
(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 0 **(D)** $-\frac{1}{2}$ **(E)** $\frac{7}{2}$

A6 Dolžina osnovnega roba a pravilne štiristrane piramide je $3\sqrt{2}$ cm, dolžina višine v_1 stranske ploskve pa $\frac{1}{2}\sqrt{30}$ cm. Velikost kota med stranskim robom in osnovno ploskvijo je:

(A) $45°$ **(B)** $22{,}5°$ **(C)** $60°$ **(D)** $120°$ **(E)** $30°$

B1. Mirko nastopa v cirkusu v točki »izstrelitev iz topa«. Njegovo gibanje, ki je prikazano na sliki, opisuje funkcija f s predpisom

$$f(x) = x - \frac{1}{50}x^2.$$



a) Kako daleč od izstrelitve mora biti postavljeno središče mreže, da bo Mirko varno padel vanjo?

b) Kolikšna je največja višina nad tlemi, ki jo Mirko doseže?

(6 točk)

B2. Grafično določi presečišče grafov funkcij f in g s predpisoma $f(x) = 3^x - 1$ in $g(x) = x^2 - 2x$. Rešitev računsko preveri. *(7 točk)*

B3. V kleti imamo poln sod vina s prostornino $\frac{3}{4}\pi\ \mathrm{m}^3$. Vino pretočimo v dve cisterni. Najprej napolnimo cisterno, ki ima obliko pravilne štiristrane prizme z osnovnim robom dolžine 1 m in višine 2 m. S preostankom pa napolnimo cisterno oblike valja, katerega višina je enaka polmeru. Kolikšna je višina valjaste cisterne? Rezultat zaokroži na centimeter natančno.

(6 točk)

B4. Izračunaj celoštevilsko rešitev enačbe $\log_2(x^2+7) = \frac{\log_2(x+1)}{\log_8 2} - \log_2 x$. *(7 točk)*

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

12. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Področno tekmovanje, 28. marec 2012

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA ČETRTI LETNIK

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bomo pravilen odgovor ovrednotili z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

B1	B2	B3	B4

A1 Katera izmed zapisanih funkcij ima največjo amplitudo in največjo osnovno periodo?

(**A**) $f(x) = 3\sin 3x$ (**B**) $f(x) = 2\sin\frac{x}{2}$ (**C**) $f(x) = -3\sin\frac{x}{4}$
(**D**) $f(x) = 3\cos 2x$ (**E**) $f(x) = 3\sin 4x$

A2 Polinoma p in q s predpisoma $p(x) = -2x^2 + 1 - 3x$ in $q(x) = a(2 - x^2) + b + c(2 - x)$ sta enaka, če je:

(**A**) $a = 4, b = 1, c = 3$ (**B**) $a = 2, b = 9, c = 3$ (**C**) $a = 2, b = -9, c = 3$
(**D**) $a = -4, b = 1, c = 3$ (**E**) $a = -2, b = 9, c = -3$

A3 Katere stopnje je polinom p s predpisom $p(x) = (x+1)(x^2+1)(x^3+1)...(x^{33}+1)$?

(**A**) 671 (**B**) 198 (**C**) 463
(**D**) 561 (**E**) 560

A4 Katera izmed naslednjih trditev velja za racionalno funkcijo f s predpisom $f(x) = x^{-1} - \frac{1}{x^3}$?

(**A**) Funkcija ima natanko eno ničlo $x = 1$. (**B**) Funkcija ima vodoravno asimptoto $y = -1$.
(**C**) Funkcija nima polov. (**D**) Definicijsko območje funkcije je $\mathbb{R} - \{0\}$.
(**E**) Funkcija nima asimptot.

A5 Poenostavljen izraz $(\sin x + 2\cos x)^2 + (2\sin x - \cos x)^2$ je enak:

(**A**) 0 (**B**) $3\sin x + \cos x$ (**C**) $\cos 2x$
(**D**) 1 (**E**) 5

A6 Podano je zaporedje $a_n, n \in \mathbb{N}$, za katerega velja $a_{n+1} - a_n = 5$ ter $a_1 = 37$. Katero izmed navedenih števil je člen tega zaporedja?

(**A**) 500 (**B**) 1000 (**C**) 1500
(**D**) 2000 (**E**) nobeno izmed navedenih

B1. Natančno, brez uporabe žepnega računala, izračunaj vrednost izraza

$$\frac{\cos 20^\circ - \sin 650^\circ}{\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos(-520^\circ)} + 2^2 \cdot \cos \frac{\pi}{4}.$$

Imenovalec racionaliziraj.

(7 točk)

B2. Določi tiste vrednosti spremenljivke x, za katere so vrednosti funkcije f s predpisom $f(x) = \frac{x-2}{x}$ večje od vrednosti funkcije g s predpisom $g(x) = 2x - 4$. *(7 točk)*

B3. Direktor je novo zaposlenemu Žanu obljubil, da bo dobil 500 evrov plače za prvi mesec, nato pa bo imel vsak naslednji mesec za $0{,}5\,\%$ višjo plačo. Čez koliko mesecev bo njegova plača presegla 1500 evrov? Izračunaj Žanovo povprečno plačo v tem obdobju (od prve plače do vključno tiste plače, ki prva preseže 1500 evrov). *(6 točk)*

B4. Za katera pozitivna realna števila x so vrednosti izrazov $3^{x^2-4}, 3^{-2}$ in $9^{-x-\frac{1}{2}}$ zaporedni členi geometrijskega zaporedja? *(6 točk)*

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

12. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Področno tekmovanje, 28. marec 2012

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, tako rešitev točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

Prvi letnik

Sklop A

A1	A2	A3	A4	A5	A6
A	C	B	D	C	C

A1. Število koruznih zrn je $\frac{1000 \quad kg}{8 \cdot 10^{-2} \quad g} = \frac{10^6 \quad g}{8 \cdot 10^{-2} \quad g} = 12\,500\,000$.

A2. Število 7425 razcepimo na prafaktorje $7425 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11$. Izračunamo število deliteljev $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

A3. Če plačamo 200 evrov članarine, je cena vozovnice 6 evrov. Če pa plačamo 100 evrov članarine je cena vozovnice 15 evrov. Sklepamo, da se nam nakup izplača, če velja $100 + x \cdot 15 > 200 + x \cdot 6$. Neenačbo uredimo $9x > 100$ in rešimo $x > 11\frac{1}{9}$. Sklepamo, da se nam nakup izplača, če bomo smučali vsaj 12 dni.

A4. Izračunamo količino soka $240 \cdot 0{,}75$ l$= 180$ l, kar razdelimo v pol litrske steklenice. Tako je $180 \cdot 2 = 360$ steklenic.

A5. Izračunamo vrednosti posameznih izrazov. $\left(\sqrt{2}\right)^6 = 2^3 = 8$, $\sqrt{256} = 16$, $\sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt{2}$, $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$, $\left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = 3$. Torej je iracionalno število $\sqrt{\sqrt{4}}$.

A6. V enačbi odpravimo ulomke, tako da množimo z 12. Dobimo $10y + 66 - 18y = 16y - 40 - 6$. Enačbo uredimo $-24y = -112$ in izračunamo $y = 8$.

Sklop B

B1. Izračunamo $a = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$ ter $b = 1 - \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$. Izračunamo $\frac{a}{b} = \frac{17}{12} : \frac{1}{9} = \frac{17}{12} \cdot 9 = \frac{51}{4}$.

Zapis števila $a = \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ .... 1 točka
Izračun števila $a = \frac{17}{12}$ .... 1 točka
Zapis števila $b = 1 - \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ .... 1 točka
Izračun števila $b = \frac{1}{9}$ .... 1 točka
Deljenje ulomkov $\frac{17}{12} : \frac{1}{9}$ .... 1 točka
Rezultat $\frac{51}{4}$ .... 1 točka

B2. V oklepaju razširimo ulomke na skupni imenovalec $12x$. Dobimo $\frac{4x^2-3x^2-3x-4}{12x}$ oziroma $\frac{x^2-3x-4}{12x}$ in upoštevamo negativni eksponent. Drugi ulomek razstavimo $\frac{12x(x-2)}{(x-4)(x-2)}$ in ga okrajšamo, dobimo $\frac{12x}{x-4}$. V izrazu upoštevamo deljenje in dobimo $\frac{12x}{x^2-3x-4} \cdot \frac{x-4}{12x}$. Razstavimo še imenovalec prvega ulomka $\frac{12x}{(x-4)(x+1)} \cdot \frac{x-4}{12x}$. Ulomka okrajšamo in dobimo $\frac{1}{x+1}$. Izračunamo še vrednost izraza za $x = -2\frac{3}{7}$. Dobimo $\frac{1}{-2\frac{3}{7}+1}$ in poenostavimo$\frac{1}{-1\frac{3}{7}} = \frac{1}{-\frac{10}{7}}$. Razrešimo še dvojni ulomek ter dobimo $-\frac{7}{10}$.

Razširitev na skupni imenovalec $\frac{4x^2-3x^2-3x-4}{12x}$ .... 1 točka
Poenostavitev $\frac{x^2-3x-4}{12x}$ .... 1 točka
Razširitev drugega ulomka $\frac{12x(x-2)}{(x-4)(x-2)}$ .... 1 točka
Upoštevanje negativnega eksponenta in deljenja ulomkov $\frac{12x}{x^2-3x-4} \cdot \frac{x-4}{12x}$ .... 1 točka
Krajšanje ulomkov .... 1 točka
Rezultat $\frac{1}{x+1}$ .... 1 točka
Rezultat $-\frac{7}{10}$ .... 1 točka

B3. Zapišemo Jana : Jan = $5 : 4$ oziroma Jana $= 5x$ in Jan $= 4x$. Zapišemo enačbo z ulomki ali s procenti: $5x - \frac{6}{100} \cdot 5x = 4x + \frac{1}{20} \cdot 4x + 15$ ali $5x - 6\,\% \cdot 5x = 4x + 5\,\% \cdot 4x + 15$. Linearno enačbo uredimo $5x - \frac{3}{10}x = 4x + \frac{x}{5} + 15$, množimo z 10 in dobimo $50x - 3x = 40x + 2x + 150$. Rešitev enačbe je $x = 30$. Torej ima Jana 150 prijateljev in Jan 120 prijateljev.

Zapis razmerja Jana: $5x$ in Jan: $4x$ .... 1 točka
Zapis enačbe $5x - \frac{6}{100} \cdot 5x = 4x + \frac{1}{20} \cdot 4x + 15$ .... $1 + 1$ točka
Poenostavitev leve in desne strani enačbe .... $(1 + 1)^*$ točka
Izračun $x = 30$ .... 1^* točka
Zapis odgovora: Jana ima 150 prijateljev. .... 1 točka

B4. Če z x označimo število kupljenih delnic po 26 evrov in z y število kupljenih delnic po 18 evrov, lahko nakup delnic zapišemo z enačbo $26x + 18y = 2504$. Če upoštevamo ceno 21 evrov in vrednost delnic 2436 evrov, dobimo skupno število delnic $x + y = 2436 : 21 = 116$. Rešimo dobljeni sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama in dobimo $x = 52$ in $y = 64$.

Zapis enačbe $26x + 18y = 2504$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je skupaj 116 delnic .... 1 točka

Zapis enačbe $x + y = 116$ . . . . 1 točka
Rešitev $x = 52$ . . . . 1 točka
Rešitev $y = 64$ . . . . 1 točka
Zapis odgovora . . . . 1 točka

Drugi letnik

Sklop A

A1	A2	A3	A4	A5	A6
A	C	B	C	A	D

A1. Točko izračunamo po formuli $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Odgovor je točka $(4,3)$.

A2. Poenostavimo predpis funkcije in dobimo $f(x) = 2x - 6$. Smerni koeficient funkcije je 2.

A3. Zapišemo predpis za linearno funkcijo z začetno vrednostjo 2 in smernim koeficientom $0{,}7$: $f(x) = 0{,}7x + 2$.

A4. S pomočjo Pitagorovega izreka ugotovimo, da 12 cm, 35 cm in 36 cm niso dolžine stranic pravokotnega trikotnika.

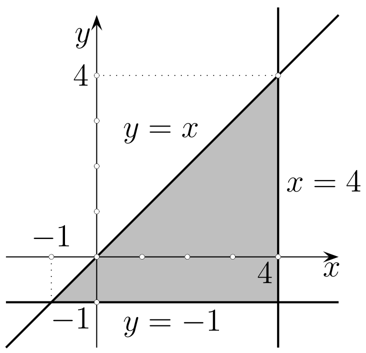
A5. Ena riba stane $\frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{5}$ evrov $= 2\sqrt{5}$ evrov.

A6. Enakosti preverimo z izračunom.

Sklop B

B1. Narišemo polravnine z enačbami $x \leq 4$, $y \geq -1$ in $y \leq x$ (robovi polravnin so premice z enačbami $x = 4$, $y = -1$, $y = x$) in označimo presečišče polravnin - pravokotni trikotnik. Ploščina pravokotnega trikotnika je $S = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}$.

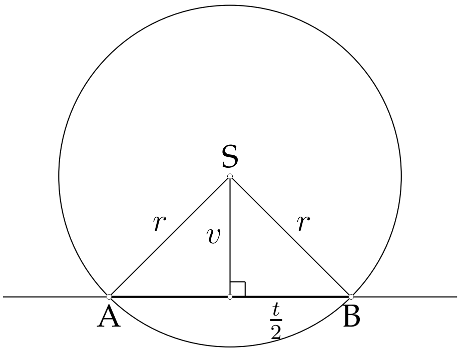
Pravilno narisane premice $x = 4, y = -1$ in $y = x$ .... $1 + 1 + 1$ točka
Pravilno označen trikotnik.. 1 točka
Izračun ploščine trikotnika $S = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}$ .... $1 + 1^*$ točka



B2. Naj bo S središče kroga, A in B pa krajišči tetive t. Daljici SA in SB sta polmera kroga. Torej je triklotnik ABS enakokrak. Višina na osnovnico trikotnika ABS razpolovi tetivo t in je dolga 3 cm (razdalja od S do premice). Uporabimo Pitagorov izrek $\left(\frac{t}{2}\right)^2 = r^2 - v^2$ oziroma $\left(\frac{t}{2}\right)^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 3^2$. Enačbo uredimo $\left(\frac{t}{2}\right)^2 = 9$. Rešitev enačbe je $t = 6$.

Narisana ustrezna skica .... 1 točka
Zapisan ali upoštevan polmer kroga $r = 3\sqrt{2}$ cm .... 1 točka
Ugotovitev ali uporaba, da višina v razpolovi tetivo t .... 1 točka
Uporaba Pitagorovega izreka $\left(\frac{t}{2}\right)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 3^2$ .... 1 točka
Ureditev $\left(\frac{t}{2}\right)^2 = 9$ .... 1 točka

Rešitev $t = 6$ cm .... 1 točka



B3. Vzporedni premici imata enak smerni koeficient. Torej mora veljati $m+5 = (m-1)^2$. Enačbo preoblikujemo v $m^2 - 3m - 4 = 0$ in razstavimo $(m-4)(m+1) = 0$. Rešitvi sta $m = 4$ in $m = -1$.

Ugotovitev ali uporaba, da sta smerna koeficienta enaka $k_1 = k_2$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba smernih koeficientov $k_1 = m+5$ in $k_2 = (m-1)^2$ .... 1 + 1 točka
Zapis urejene kvadratne enačbe $m^2 - 3m - 4 = 0$ .... 1 točka
Zapis $(m-4)(m+1) = 0$ .... 1 točka
Rešitvi $m = 4$ in $m = -1$ .... 1 + 1 točka

B4. Izraz v prvem oklepaju $1 + \frac{1}{a^2}$ poenostavimo v $\frac{a^2+1}{a^2}$. Upoštevamo definicijo potence z racionalnim eksponentom in poenostavimo izraz $\frac{1}{a}\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{a\sqrt{a^2+1}}$. Poenostavimo oba oklepaja v $\frac{a}{a\sqrt{a^2+1}} \cdot \sqrt{1+a^2} = 1$. Izračunamo $6{,}25^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$ in $0{,}008^{-\frac{2}{3}} = 25$. Izračunamo $\frac{2}{5} \cdot 25 = 10$. Seštejemo in dobimo rezultat 11.

Poenostavitev prvem oklepaja $1 + \frac{1}{a^2} = \frac{a^2+1}{a^2}$ .... 1 točka
Izračun $6{,}25^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$ .... 1 točka
Iračun $0{,}008^{-\frac{2}{3}} = 25$ .... 1 točka
Poenostavljen izraz $\frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{a\sqrt{a^2+1}}$ .... 1 točka
Poenostavitev prvega sumanda $\frac{a}{a\sqrt{a^2+1}} \cdot \sqrt{1+a^2} = 1$ .... 1 točka
Izračun $\frac{2}{5} \cdot 25 = 10$ .... 1 točka
Rezultat 11 .... 1 točka

Tretji letnik

Sklop A

A1	A2	A3	A4	A5	A6
A	A	E	B	E	E

A1. Neenačbo uredimo $x^2+x-2>0$. Razstavimo levo stran neenačaja $(x+2)(x-1)>0$. Ničli kvadratne funkcije na levi strani neenačaja sta $x_1=-2$ in $x_2=1$. Iz skice odčitamo $x<-2$ ali $x>1$.

A2. Predpis dane funkcije zapišemo v obliki za ničle $f(x)=(x+3)(x+1)$. Ničli sta $x_1=-3$ in $x_2=-1$, začetna vrednost je 3. Upoštevamo, da je za $a>0$ parabola obrnjena navzgor, torej je pravilen odgovor A.

A3. Vstavimo abscise vsake izmed točk v predpis funkcije in izračunamo vrednosti. Ugotovimo, da točka $\left(\frac{1}{3},0\right)$ ne leži na grafu.

A4. Igralno polje igrišča je sestavljeno iz pravokotnika s ploščino $80\ \mathrm{m}^2$ in iz polkroga s ploščino $\frac{\pi\cdot 4^2}{2}=8\pi$. Seštejemo obe ploščini in dobimo ploščino igralnega polja $(80+8\pi)\ \mathrm{m}^2$.

A5. Izračunamo $f(0)=-\frac{1}{2}\cdot 5^0+4=-\frac{1}{2}+4=\frac{7}{2}$.

A6. Po Pitagorovem izreku izračunamo dolžino stranskega roba $s=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+v_1^2}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{30}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{2}+\frac{15}{2}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. Izračunamo dolžino diagonale osnovne ploskve kvadrata $d=a\sqrt{2}=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=6$. Z uporabo kotnih funkcij izračunamo $\cos\alpha=\frac{\frac{d}{2}}{s}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, torej je kot $\alpha=30°$.

Sklop B

B1. **a)** Središče mreže je od izstrelišča topa oddaljeno za pozitivno ničlo funkcije f, ki je rešitev enačbe $x-\frac{1}{50}x^2=0$. Rešitvi sta $x_1=0$ in $x_2=50$. Središče mreže je torej oddaljeno 50 m.

Zapis ali uporaba enakosti $f(x)=0$ .... 1 točka
Izračun obeh ničel $x_1=0$ in $x_2=50$ .... 1 točka
Odgovor: Središče mreže je oddaljeno 50 m .... 1 točka

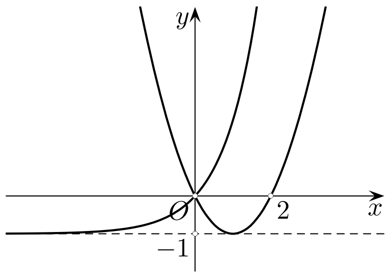
b) Največja višina, ki jo Mirko doseže je maksimum dane funkcije f. Izračunamo drugo koordinato temena $q=12{,}5$. Največja višina, ki jo Mirko doseže, je 12,5 m.

Uporaba obrazca $q=-\frac{D}{4a}$ .... 1 točka
Izračun q .... 1 točka
Odgovor: Mirko doseže največjo višino 12,5 m. .... 1 točka

ali
Izračun $p=\frac{x_1+x_2}{2}=25$ .... 1 točka
Izračun $q=f(25)=25-\frac{625}{50}=12{,}5$ .... 1 točka
Odgovor .... 1 točka

B2. Narišemo asimptoto $y = -1$, presečišče z ordinato $(0, 0)$ in izračunamo še dodatno točko npr. $(1, 2)$ ter narišemo graf eksponentne funkcije. Za kvadratno funkcijo izračunamo ničli $x_1 = 0$ in $x_2 = 2$ ter teme $(1, 1)$ in narišemo njen graf. Odčitamo presečišče $(0, 0)$. Računsko preverimo rešitev: $f(0) = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ in $g(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$.

Narisana asimptota $y = 1$ . . . . 1 točka
Narisano presečišče z ordinato $(0, 0)$ . . . . 1 točka
Izračunani in narisani ničli kvadratne funkcije $x_1 = 0$ in $x_2 = 2$ . . . . $1 + 1$ točka
Odčitani koordinati presečišča $(0, 0)$ . . . . 1 točka
Računsko preverjeni rešitvi . . . . $1 + 1$ točka



B3. Izračunamo prostornino prizme $V_1 = a^2 \cdot v = 2\ \text{m}^3$. Razlika prostornin $V - V_1 = \left(\frac{3}{4}\pi - 2\right)\ \text{m}^3 \doteq 0{,}3562\ \text{m}^3$ je preostanek vina, ki ga pretočimo v valjasto posodo s prostornino $V_2 = \pi r^2 \cdot v = \pi r^3$. Iz enačbe izrazimo polmer oziroma višino cisterne $v = r \doteq \sqrt[3]{\frac{0{,}3562\ \text{m}^3}{\pi}} \doteq 0{,}484$ m. Tako je višina valjaste cisterne 48 cm.

Izračun prostornine prizme $V_1 = a^2 \cdot v = 2\ \text{m}^2$ . . . . 1 točka
Izračun razlike prostornin $V - V_1 = \left(\frac{3}{4}\pi - 2\right)\ \text{m}^3 \doteq 0{,}3562\ \text{m}^3$ . . . . 1 točka
Prostornina valjaste posode $V_2 = \pi r^3$ . . . . 1 točka
Upoštevan volumen valja $V_v = \pi r^2 v$ . . . . 1 točka
Izračun polmera cisterne $v = r \doteq \sqrt[3]{\frac{0{,}3562\ \text{m}^3}{\pi}} \doteq 0{,}484$ m. . . . . 1 točka
Zapisan odgovor: Višina valjaste cisterne je 48 cm. . . . . 1 točka

B4. Uporabimo pravila za računanje z logaritmi: $\log_8 2 = \frac{1}{3}$, zato je desna stran enačbe enaka $3\log_2(x+1) - \log_2 x$. Na desni strani uporabimo še pravilo za logaritem potence, torej je desna stran enačbe enaka: $\log_2(x+1)^3 - \log_2 x$. Razliko preoblikujemo v $\log_2 \frac{(x+1)^3}{x}$. Ko enačbo antilogaritmiramo, dobimo $x^2 + 7 = \frac{(x+1)^3}{x}$. Enačbo preoblikujemo in dobimo kvadratno enačbo $3x^2 - 4x + 1 = 0$. Rešitvi enačbe sta $x_1 = 1$ in $x_2 = \frac{1}{3}$. Celoštevilska rešitev enačbe je 1.

Izračunan logaritem $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ . . . . 1 točka
Poenostavljena desna stran enačbe $\log_2(x+1)^3 - \log_2 x$ . . . . 1 točka
Kubiranje . . . . 1 točka
Preoblikovanje v kvadratno enačbo $3x^2 - 4x + 1 = 0$ . . . . 1 točka
Reševanje enačbe . . . . 1* točka
Rešitvi $x_1 = 1$ in $x_2 = \frac{1}{3}$ . . . . 1 točka
Odgovor: Celoštevilska rešitev enačbe je 1 . . . . 1 točka

Četrti letnik

Sklop A

A1	A2	A3	A4	A5	A6
C	C	D	D	E	E

A1. Pri vsakem primeru določimo amplitudo in osnovno periodo ter ugotovimo, da je pravilni odgovor C.

A2. Uredimo polinom q: $q(x) = 2a - ax^2 + b + 2c - cx = -ax^2 - cx + 2a + b + 2c$. Enačimo koeficiente polinomov $-2 = -a, -3 = -c$ in $1 = 2a + b + 2c$. Izračunamo $a = 2, c = 3$ in $2 \cdot 2 + b + 2 \cdot 3 = 1$, iz česar izračunamo $b = -9$.

A3. Stopnja polinoma je vsota stopenj vseh faktorjev $1 + 2 + 3 + \cdots + 33 = 561$.

A4. Enačbo racionalne funkcije preoblikujemo v obliko $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3}$ in ugotovimo, da je pravilen odgovor D.

A5. V izrazu odpravimo oklepaje in dobimo $5\sin^2 x + 5\cos^2 x = 5(\sin^2 x + \cos^2 x) = 5 \cdot 1 = 5$.

A6. Ugotovimo, da je to aritmetično zaporedje s prvim členom 37 in diferenco 5. Splošni člen je $a_n = 37 + (n-1) \cdot 5 = 32 + 5n = 5(6+n) + 2$. Nobeno izmed navedenih števil nima pri deljenju s 5 ostanka 2, zato je pravilni odgovor E.

Sklop B

B1. Kotne funkcije poljubnih kotov izrazimo s kotnimi funkcijami ostrih kotov: $\sin 650° = \sin(650° - 2 \cdot 360°) = \sin(-70°) = -\sin 70° = -\cos 20°$, $\cos(-520°) = \cos 520° = \cos(520° - 360°) = \cos 160° = -\cos 20°$. Za $\sin \frac{\pi}{2}$ uporabimo adicijski izrek: $\sin \frac{\pi}{12} = \sin 15° = \sin(45° - 30°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Izračunamo drugi sumand $4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Vstavimo podatke v izraz in izraz poenostavimo $\frac{\cos 20° + \cos 20°}{-\cos 20° \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} + 2\sqrt{2} = \frac{2\cos 20°}{-\cos 20° \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} + 2\sqrt{2} = -\frac{2 \cdot 4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$. Racionaliziramo imenovalec $-\frac{2 \cdot 4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = -\frac{8(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + 2\sqrt{2}$, krajšamo in dobimo $-2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = -2\sqrt{6}$.

Zapis $\sin 650° = \sin(650° - 2 \cdot 360°) = \sin(-70°) = -\sin 70° = -\cos 20°$ .... 1 točka
Zapis $\cos(-520°) = \cos 520° = \cos(520° - 360°) = \cos 160° = -\cos 20°$ .... 1 točka
Zapis $\sin \frac{\pi}{12} = \sin 15° = \sin(45° - 30°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ .... 1 točka
Krajšanje in ureditev $\frac{-8}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ .... 1 točka
Vstavljeni podatki $\frac{\cos 20° + \cos 20°}{-\cos 20° \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} + 2\sqrt{2}$ .... 1 točka
Racionalizacija imenovalca .... 1* točka
Rezultat $-2\sqrt{6}$ .... 1 točka

B2. Zapišemo neenačbo $\frac{x-2}{x} > 2x - 4$ in jo uredimo $\frac{x-2}{x} - 2x + 4 > 0$. Levo stran neenačaja razširimo na skupni imenovalec $\frac{x-2-2x^2+4x}{x} > 0$ oziroma $\frac{2x^2-5x+2}{x} < 0$. Izračunamo ničli racionalne funkcije $x_1 = 2$ in $x_2 = \frac{1}{2}$ ter pol $x = 0$. Iz skice odčitamo rešitev $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Zapis neenačbe $\frac{x-2}{x} > 2x - 4$ .... 1 točka

Razširitev na skupni imenovalec $\frac{x-2-2x^2+4x}{x}<0$ .... 1 točka
Ureditev neenačbe $\frac{2x^2-5x+2}{x}>0$ .... 1 točka
Izračun ničel $x_1=2$ in $x_2=\frac{1}{2}$ .... 1 točka
Določitev polov $x=0$ .... 1 točka
Skica .... 1 točka
Zapisana rešitev $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},2\right)$ .... 1 točka

B3. Upoštevamo obrestno obrestni račun $G_t=G_1\cdot r^{t-1}$, pri čemer je $r=1+\frac{0{,}5}{100}=1{,}005$. Zapišemo eksponentno enačbo $1500=500\cdot 1{,}005^{t-1}$, ki jo preoblikujemo v $3=1{,}005^{t-1}$. Enačbo logaritmiramo in dobimo $t=\frac{\log 3}{\log 1{,}005}+1\doteq 221{,}3$. Prva plača, ki bo večja od 1500 evrov, bo šele čez 222 mesecev. Za izračun povprečne plače moramo vsoto vseh plač deliti s številom plač, to je 222. Uporabimo formulo za vsoto n členov geometrijskega zaporedja in dobimo $S_{222}=500\cdot\frac{1{,}005^{222}-1}{1{,}005-1}\doteq 202597{,}76$. Vsoto delimo z 222. Povprečna Žanova plača je torej 912,60 evrov.

Zapisan ali upoštevan obrestno obrestni račun $G_t=G_1\cdot r^{t-1}$ .... 1 točka
Nastavljena enačba $1500=500\cdot 1{,}005^{t-1}$ .... 1 točka
Izračun $t=\frac{\log 3}{\log 1{,}005}+1\doteq 221{,}3$ .... 1 točka
Odgovor: Čez 222 mesecev .... 1 točka
Izračun $S_{222}=500\cdot\frac{1{,}005^{222}-1}{1{,}005-1}\doteq 202597{,}76$ .... 1 točka
Izračun povprečne plače 912,60 evrov .... 1 točka

B4. Upoštevamo, da je kvocient sosednjih členov konstanten $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$. Dobimo $\frac{3^{-2}}{3^{x^2-4}}=\frac{9^{-x-\frac{1}{2}}}{3^{-2}}$. Dobljeno enačbo preoblikujemo do oblike $\frac{1}{81}=3^{x^2-4}\cdot 9^{-x-\frac{1}{2}}$ ali $3^{-4}=3^{x^2-4}\cdot 3^{2(-x-\frac{1}{2})}$. Uredimo desno stran enačbe ter dobimo $3^{-4}=3^{x^2-2x-5}$. Enačimo eksponenta $x^2-2x-5=-4$ ter rešimo nastalo kvadratno enačbo $x^2-2x-1=0$. Rešitvi enačbe sta $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2}$. Rešitev naloge je le $x=1+\sqrt{2}$, saj je $1-\sqrt{2}<0$.

Upoštevanje $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$ .... 1 točka
Ureditev enačbe $3^{-4}=3^{x^2-4}\cdot 3^{2(-x-\frac{1}{2})}$ .... 1 točka
Ureditev enačbe $3^{-4}=3^{x^2-2x-5}$ .... 1* točka
Zapis kvadratne enačbe $x^2-2x-1=0$ .... 1* točka
Rešitvi $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2}$ .... 1 točka
Upoštevana ustrezna rešitev $x=1+\sqrt{2}$ .... 1 točka