Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

11. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol
Državno tekmovanje, 16. april 2011

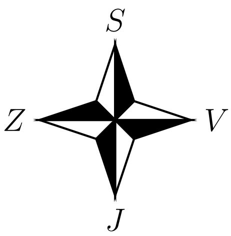
Prilepi nalepko s šifro

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilen odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilen odgovor pol točke odšteli. Naloge v sklopu B so vredne po 7 točk. Odgovore sklopa A vpišite v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

B1	B2	B3	B4

A1 Jana se odpravi iz šole z rolerji. Najprej rola 3 km proti zahodu, nato 1 km proti jugu, 3 km proti vzhodu in 1 km proti jugu. Kako daleč in v katero smer se mora odpraviti, da pride po najkrajši poti nazaj v šolo?



(**A**) 2 km proti severu (**B**) 2 km proti jugu (**C**) 2 m proti vzhodu
(**D**) 2 km proti zahodu (**E**) Ni mogoče določiti.

A2 V kinu so v zadnji vrsti še trije prosti sedeži. Na koliko različnih načinov se lahko posedejo trije prijatelji?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 6

A3 Katera enačba lahko predstavlja odvisnost med spremenljivkama x in y v tabeli?

x	y
1	1,5
2	3
3	4,5
4	6

(**A**) $y = x + 0{,}5$ (**B**) $y = 2x - 0{,}5$ (**C**) $y = 0{,}5x + 1$
(**D**) $y = 1{,}5x$ (**E**) $y = x^2 + 0{,}5$

A4 Na planetu Vegas računajo z znaki. Pravila za računske operacije so enaka kot v Sloveniji. Učitelj je napisal na tablo izraz $(\exists + \cup)^2$. Kateri rezultat je pravilen?

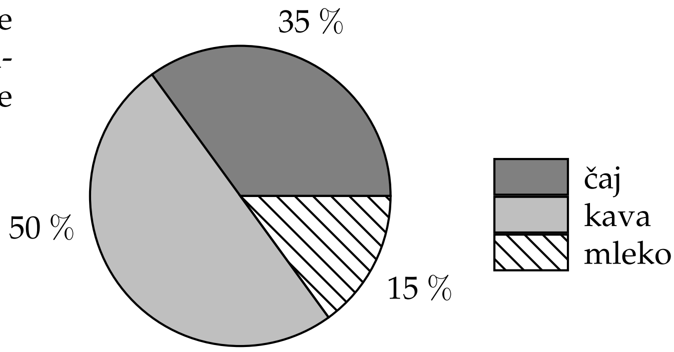
(**A**) $\exists^2 + \cup^2$ (**B**) $\exists^2 - \cup^2$ (**C**) $\exists^2 + 2\exists\cup - \cup^2$
(**D**) $\exists^2 + 2\exists\cup + \cup^2$ (**E**) $\exists^2 - 2\exists\cup + \cup^2$

A5 Pri gorskem kolesu smo izbrali tako prestavo, da velja: veliko zobato kolo se zavrti šestkrat, ko se malo zavrti petnajstkrat. Kolikokrat se mora zavrteti veliko zobato kolo, da se malo zavrti 100-krat?

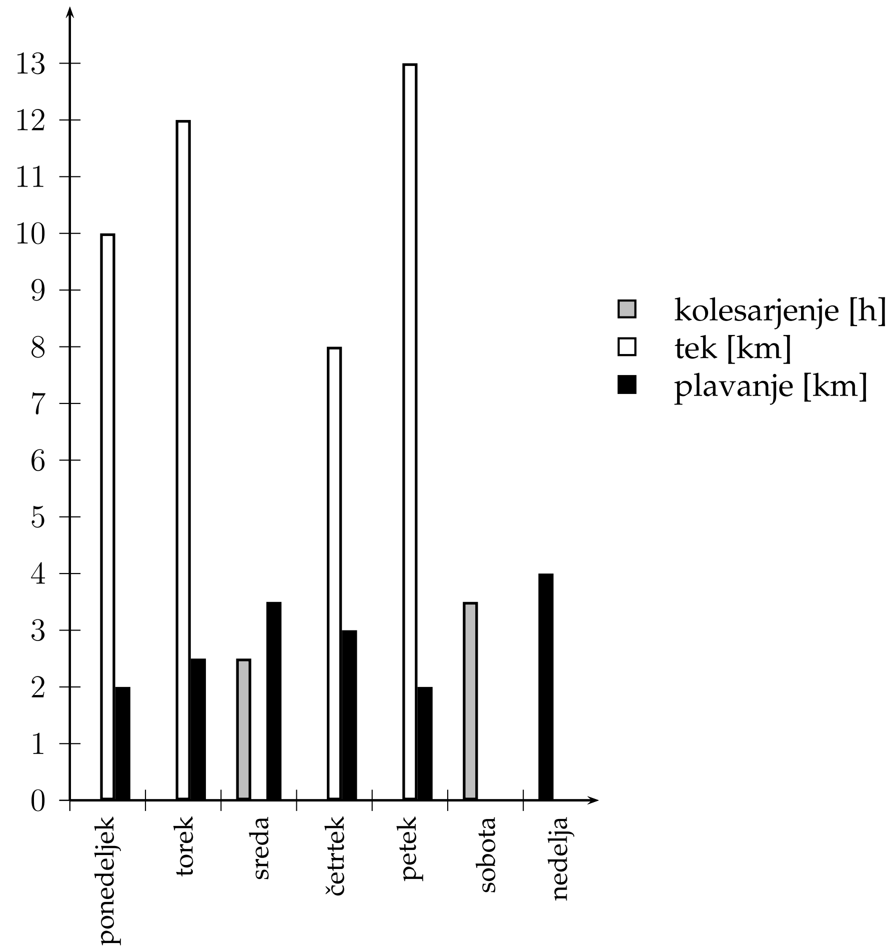
(**A**) 30 (**B**) 35 (**C**) 40 (**D**) 45 (**E**) 50

A6 V raziskavi o najljubši jutranji pijači je sodelovalo 60 ljudi. Frekvenčni kolač prikazuje izsledke raziskave: Koliko več ljudi pije čaj kot mleko?

(**A**) 9 (**B**) 12 (**C**) 15
(**D**) 21 (**E**) 35



B1 Matej trenira triatlon. Spodnji grafikon prikazuje njegov tedenski trening.



A Koliko km je Matej v prikazanem času pretekel in koliko preplaval?

B Koliko km je prekolesaril, če je kolesaril s povprečno hitrostjo 25 $\frac{km}{h}$?

C Izračunajte povprečni čas treninga na dan. Upoštevajte, da Matej preteče 1 km v povprečju v 4,5 min, v 13 min pa preplava 750 m. Rezultate zaokrožite na minuto natančno.

B2 V trgovini imajo tri akvarije v obliki kvadrov, vse z enako prostornino. Nekatere notranje mere akvarijev prikazuje tabela.

	dolžina	širina	višina
1. akvarij	$4\ dm$	$6\ dm$	$0,5\ m$
2. akvarij	$2\ dm$	$10\ dm$	
3. akvarij			

A Največ koliko litrov vode lahko nalijemo v vsak akvarij?

B Kolikšna je notranja višina 2. akvarija?

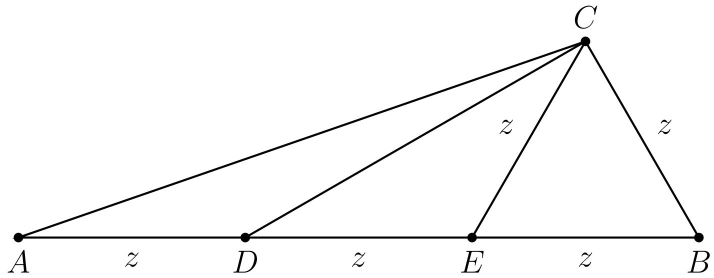
C Tretji akvarij ima obliko kocke. Na milimeter natančno določite zunanjo dolžino dna akvarija, če je steklo debelo 6 mm!

D V prvem akvariju so 75 % prostornine napolnili z vodo. Do katere višine sega voda v akvariju?

E Na največ koliko različnih načinov lahko vse tri akvarije razstavijo v vrsto na polico, če je akvarij v obliki kocke na prvem mestu z leve ali z desne?

F Če prazen akvarij polnimo s petimi enakimi izviri, se napolni v 1,2 minute. V kolikem času se bo prazen akvarij napolnil, če ga polnimo le z dvema izviroma?

B3 Dan je trikotnik $\triangle ABC$ (glej sliko), pri čemer je $z = 4$ cm.



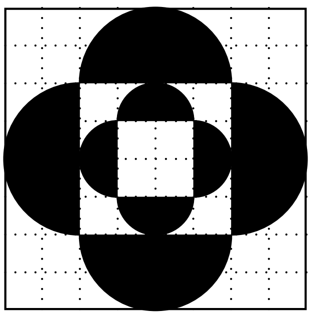
A Koliko je vseh trikotnikov na sliki?

B Kako se glede na dolžine stranic imenuje trikotnik $\triangle EBC$?

C Kako se glede na dolžine stranic imenuje trikotnik $\triangle DEC$?

D Izračunajte ploščino trikotnika $\triangle ABC$! Rezultat zaokrožite na cm^2 natančno.

B4 Vrtnarji bodo v središču mesta uredili gredico rož. Gredica je kvadratne oblike s stranico dolžine 4 metre. Odločili so se, da se bodo poigrali z zasaditvijo tulipanov. Na osenčeni del bodo zasadili čebulice rdečih tulipanov, na neosenčeni del pa čebulice belih tulipanov (glej sliko).



A Izračunajte ploščino osenčenega in ploščino neosenčenega dela gredice na cm^2 natančno.

B V vrtnariji pakirajo čebulice tulipanov v večje in manjše vrečke. V večji vrečki po ceni 13 EUR je 10 čebulic rdečih in 20 čebulic belih tulipanov. Cena manjše vrečke je 3 EUR, v njej pa je 5 čebulic rdečih in 3 čebulice belih tulipanov. Kolikšna je cena posamezne čebulice rdečega tulipana in kolikšna posamezne čebulice belega tulipana?

C Kako dolga bi bila nova povečana kvadratna gredica, če bi vrtnarji za en korak nadaljevali narisan vzorec?

dMFA

11. tekmovanje v znanju matematike
za dijake poklicnih šol
Državno tekmovanje, 16. april 2011

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

V tabeli so zapisani pravilni odgovori izbirnih nalog. Vsak pravilen odgovor točkujemo z 2 točkama, nepravilen z -0.5 točke, če naloga ni rešena, 0 točk. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 3 točke.

A1	A2	A3	A4	A5	A6
A	E	D	D	C	B

A1 V mreži si narišemo začetno točko. Iz te točke 3 enote levo, 1 enoto dol, 3 enote desno in 1 enoto dol v končno točko. Iz končne v začetno točko pridemo za 2 enoti gor oz. 2 km severno.

A2 Prvi prijatelj izbira med 3 sedeži, drugi med dvema in tretjemu ostane še en sedež. Torej $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možnosti.

A3 Vse točke iz tabele: $(1, 1.5)$, $(2, 3)$, $(3, 4.5)$ in $(4, 6)$ pripadajo le premici $y = 1.5x$.

A4 Izraz $(\exists + \bigcup)^2$ kvadriramo po pravilu $(\exists + \bigcup)^2 = \exists^2 + 2\exists \bigcup + \bigcup^2$.

A5 Frekvenci vrtenja velikega in malega kolesa sta v premem sorazmerju. Koeficient za malo kolo je $\frac{100}{15} = \frac{20}{3}$, zato je frekvenca vrtenja velikega kolesa $6 \cdot \frac{20}{3} = 40$.

A6 Čaj pije $35\,\%$ od $60 = 21$ ljudi. Mleko pije $15\,\%$ od $60 = 9$ ljudi. 12 ljudi več pije čaj kot mleko.

DALJŠE NALOGE

B1 Matejev trening tekanja in plavanja prikazuje tabela:

	PON	TOR	SRE	ČET	PET	SOB	NED	Skupaj
tek[km]	10	12	0	8	13	0	0	43 km
plavanje[km]	2	2.5	3.5	3	2	0	4	17 km

Kolesaril je v sredo 2.5 h in v soboto 3.5 h, to je 6 h v prikazanem tednu. Prekolesaril je pot $s = \bar{v} \cdot t = 25\ \frac{km}{h} \cdot 6\ h = 150\ km$.
Čas, ki ga je Matej porabil za tek: $\frac{43\ km}{1\ km} \cdot 4.5\ min = 193.5\ min \approx 194\ min$.
Čas, ki ga je Matej porabil za plavanje: $\frac{17\ km}{0.75\ km} \cdot 13\ min \approx 295\ min$.
Kolesaril je $6\ h = 360\ min$.
Povprečni čas treninga na dan $\bar{t} = \frac{194\ min + 295\ min + 360\ min}{7} \approx 121\ min$.

A Matej je preplaval 17 km. .... **1 t**
Matej je pretekel 43 km. .... **1 t**

B Prekolesaril je 150 km. .... **1 t**

C Čas, ki ga je porabil za tek: 194 min .... **1 t**
Čas, ki ga je porabil za plavanje: 295 min. .... **1 t**
Povprečni čas treninga na dan: 121 min .... **2 t**

Op.: Če rezultati niso zaokroženi na minuto natančno, tekmovalcu odštejemo 1 točko.

B2 Vsak akvarij drži $V = 4\ dm \cdot 6\ dm \cdot 5\ dm = 120\ l$. Prostornina drugega akvarija je 120 dm^3.
Iz enačbe $120\ dm^3 = 2\ dm \cdot 10\ dm \cdot v$ izračunamo višino $v = 6\ dm$.
Iz enačbe za prostornino kocke $120\ dm^3 = a^3$ izračunamo notranji rob $a = 4.93\ dm$. Upoštevamo debelino stekla 6 mm, pa je zunanji rob akvarija $4.93\ dm + 2 \cdot 0.06\ dm = 5.05\ dm$.
75 % vode od $120\ l = 90\ l$. Iz enačbe za prostornino akvarija $90\ l = 4\ dm \cdot 6\ dm \cdot v$ izračunamo višino akvarija $v = 3.75\ dm$.
Če je kockast akvarij na prvem mestu z leve, se ostala dva lahko razvrščata na 2 načina. Če je kockast akvarij na prvem mestu z desne, to pomeni še dva različna načina. Skupaj se lahko razvrstijo na 4 različne načine.
Če polnijo akvarij z enim izvirom, se polni $1,2\ min \cdot 5 = 6\ min$. Ko ga polnimo z dvema izviroma, pa je čas dvakrat krajši, to je 3 min.

A Ugotovitev: Prostornina vsakega akvarija je 120 l. .... **1 t**

B Drugi akvarij je visok 6 dm. .... **1 t**

C Dolžina zunanjega roba je 5.05 dm. .... **2 t**

D Voda sega do višine 3.75 dm. .... **1 t**

E Razvrstimo jih lahko na največ 4 načine. .... **1 t**

F Akvarij se polni 3 min. .... **1 t**

B3 Na sliki je 6 trikotnikov: $\triangle ABC$, $\triangle AEC$, $\triangle DBC$, $\triangle ADC$, $\triangle DEC$, $\triangle EBC$. Trikotnik $\triangle EBC$ je enakokrak in enakostranični, trikotnik $\triangle DEC$ pa enakokraki. Ploščino trikotnika $\triangle ABC$ izračunamo po formuli $S_\triangle = \frac{\bar{AB} \cdot v_{\triangle ABC}}{2}$, kjer je $\bar{AB} = 3z = 12\ cm$ in $v_{\triangle ABC} = v_{\triangle EBC} = \frac{z\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ cm$. Ploščina trikotnika $\triangle ABC$ je $S_{\triangle ABC} = \frac{\bar{AB} \cdot v_{\triangle ABC}}{2} = \frac{12\ cm \cdot 2\sqrt{3}\ cm}{2} = 12\sqrt{3}\ cm^2 \approx 21\ cm^2$.

A Na sliki je 6 trikotnikov. .... **1 t**

B Trikotnik $\triangle EBC$ je enakokraki in enakostranični. .... **1 t**

C Trikotnik $\triangle DEC$ je enakokraki. .... **1 t**

D Izračun stranice $\bar{AB}$ trikotnika $\triangle ABC$: $12\ cm$. .... **1 t**
Določitev višine trikotnika $\triangle ABC$: $2\sqrt{3}\ cm \approx 3.5\ cm$ .... **1 t**
Izračun ploščine trikotnika $\triangle ABC$: $21\ cm^2$. .... **2 t**

Op.: Če ploščina ni zaokrožena na cm^2, tekmovalcu odštejemo 1 točko.

B4 Osenčeni del gredice lahko sestavimo v dva kroga s polmerom 0,5 m in dva kroga s polmerom 1 m. Ploščina osenčenega dela, ki so ga zasadili s čebulicami rdečih tulipanov, je enaka vsoti ploščin dveh večjih in dveh manjših krogov: $S = 2\pi(0.5\ m)^2 + 2\pi(1\ m)^2 = 7.85\ m^2$. Celotna gredica je kvadratne oblike s ploščino $(4\ m)^2 = 16\ m^2$. Ploščina neosenčenega dela gredice, zasajenega s čebulicami belih tulipanov, je $16\ m^2 - 7.85\ m^2 = 8.15\ m^2$.
Z x označimo ceno čebulice za rdeč, z y pa za beli tulipan. Po besedilu nastavimo sistem enačb:

$$10x + 20y = 13$$

$$5x + 3y = 3$$

Od tod izračunamo, da je $x = 0.3$ EUR in $y = 0.5$ EUR.
Če bi vrtnarji nadaljevali narisani vzorec za 1 korak, bi bila gredica dolga 8 m.

A Izračun ploščine osenčenega dela: $7.85\ m^2$. .... **2 t**
Izračun ploščine neosenčenega dela: $8.15\ m^2$ .... **2 t**

B Cena čebulice rdečega tulipana je 0.3 EUR .... **1 t**
Cena čebulice belega tulipana je 0.5 EUR. .... **1 t**

C Dolžina nove gredice bi bila 8 m .... **1 t**