Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

18. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol
Državno tekmovanje, 21. april 2018

Prilepi nalepko s šifro

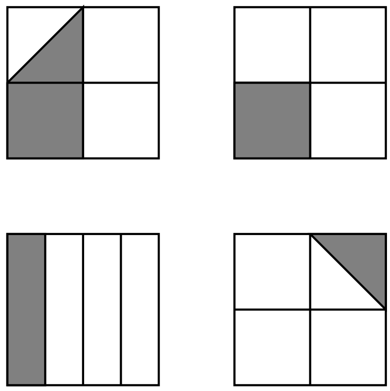
Naloge za 1. in 2. letnik

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpišite v levo tabelo. V sklopu B bomo pravilni odgovor ovrednotili z največ sedmimi točkami.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

A1. Kolikšen odstotek celotne površine vseh likov na sliki je osenčen?



(**A**) 12,5 (**B**) 20 (**C**) 25 (**D**) $33\frac{1}{3}$ (**E**) $37\frac{1}{2}$

A2. Večkrat vržemo dve igralni kocki hkrati in vsakič seštejemo števili pik na obeh zgornjih ploskvah. Največ koliko različnih vsot pik dobimo?

(**A**) 6 (**B**) 11 (**C**) 12 (**D**) 18 (**E**) 20

A3. V skupini je osem dijakov. Njihova povprečna starost je 16 let. Na podlagi tega podatka zagotovo vemo, da:

(**A**) so prav vsi dijaki v skupini stari 16 let, (**B**) so vsi dijaki v skupini stari približno 16 let, (**C**) je največ dijakov v skupini starih 16 let. (**D**) je vsota starosti vseh dijakov v skupini 128 let, (**E**) je polovica dijakov stara manj kot 16, polovica pa več kot 16 let,

A4. Davor je iz papirja izrezal pravokotnik in ga nad mizo obračal in vrtel. Z lučko iz mobitela je svetil na ta pravokotnik ter opazoval nastajajoče sence na mizi. Senca zagotovo ni mogla imeti oblike:

(**A**) romba, (**B**) trikotnika, (**C**) kvadrata, (**D**) pravokotnika, (**E**) daljice.

A5. Kateri izraz nima vrednosti 1?

(**A**) $-\frac{\sqrt{64}}{(-2)^3}$ (**B**) $-(-1)^4$ (**C**) $(-1)^{2018}$ (**D**) 1^{-10} (**E**) 2018^0

A6. Enačba premice, ki ima ničlo pri $x=-1$, je:

(**A**) $y=x-1$ (**B**) $y=2x-2$ (**C**) $y=-1x$ (**D**) $\frac{x}{-1}+\frac{y}{1}=-1$ (**E**) $6y+3x+3=0$

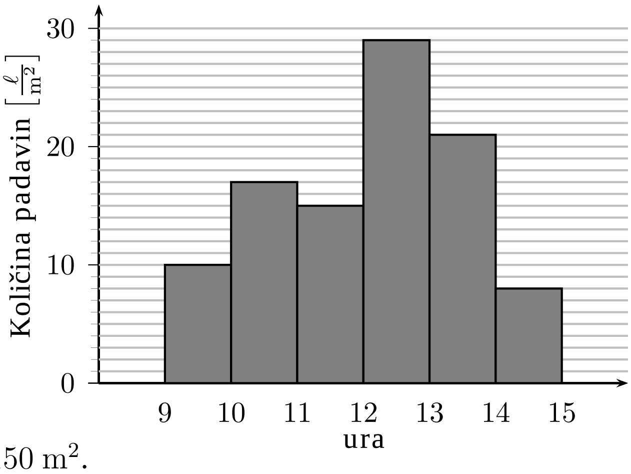
A7. Največji evropski proizvajalec avtomobilov je kljub recesiji v letu 2009 prodal rekordnih 6,29 milijona vozil. Leto prej je bilo prodanih za 1 odstotek avtomobilov manj, kar pomeni približno:

(**A**) 62 avtomobilov, (**B**) 630 avtomobilov, (**C**) 6300 avtomobilov, (**D**) 63000 avtomobilov, (**E**) 1 milijon avtomobilov.

A8. Če je $F=400$ in velja $5\leq a\leq 10$ ter $20\geq b\geq 8$, je razlika med največjo možno vrednostjo izraza $\frac{F}{ab}$ in najmanjšo možno vrednostjo tega izraza:

(**A**) 1 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 160

B1. V kraju Mokri breg pade v povprečju $250\ \frac{\ell}{\mathrm{m}^2}$ padavin na mesec. S prikaza je razvidno, koliko padavin je v tem kraju padlo vsako uro nekega dne od 9. do 15. ure.



A. Med katerima urama je padla največja količina padavin?

B. Koliko litrov dežja na kvadratni meter je padlo tega dne od 9. do 15. ure?

C. Koliko odstotkov mesečnega povprečja je padlo v tem času?

D. Hiša tete Amalije ima streho s površino $150\ \mathrm{m}^2$. Koliko kubičnih metrov dežja je od 9. do 15. ure tega dne padlo na streho njene hiše?

E. Četrtino vode, ki je v tem času odtekla s strehe, je teta Amalija zbrala v rezervoarju, ki ima obliko pokončnega valja s premerom $2\ \mathrm{m}$. Koliko centimetrov je bila gladina vode nad dnom rezervoarja, če je bil pred tem rezervoar prazen?

B2. Označimo s p Petrovo, z r Rokovo in s s Simonovo starost v letih, pri čemer so njihove starosti rešitve enačb $3^p + 3^4 = 90$, $2^r + 44 = 76$ in $5^3 + 6^s = 1421$.

A. Koliko so stari Peter, Rok in Simon?

B. Čez koliko let bo Rok dvakrat toliko star kot Peter?

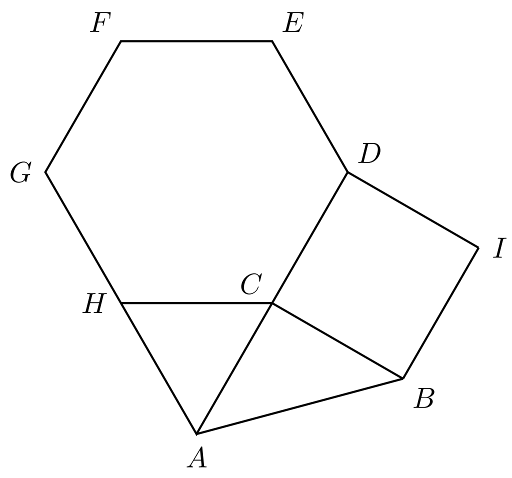
C. Povežite števila p, r in s z računskimi operacijami tako, da dobite največji možni rezultat. Zapišite račune.

B3. V oglišču C se stikajo enakostranični trikotnik ACH, pravilni šestkotnik $CDEFGH$ in kvadrat $BIDC$.

A. Določite velikosti kotov $\sphericalangle CBA$, $\sphericalangle ACB$ in $\sphericalangle BAC$.

B. Izračunajte obseg šestkotnika $ABIDCH$ na eno decimalko natančno, če je $|CD| = 1 \text{ cm}$.

C. Izračunajte ploščino petkotnika $ADEFG$ na eno decimalko natančno.



18. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol
Državno tekmovanje, 21. april 2018

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpišite v levo tabelo. V sklopu B bomo pravilni odgovor ovrednotili z največ sedmimi točkami.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

A1. Vrednost katerega izmed naslednjih izrazov je večkratnik števila 9?

(A) 2^{18} **(B)** $2018-9$ **(C)** $2+0+18$ **(D)** 2018 **(E)** $(2+0)(1+8)$

A2. Večkrat vržemo dve igralni kocki hkrati in vsakič seštejemo števili pik na obeh zgornjih ploskvah. Največ koliko različnih vsot pik dobimo?

(A) 10 **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 18 **(E)** 20

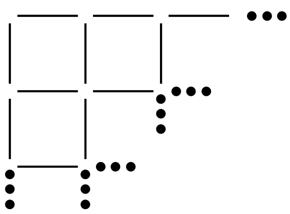
A3. Če je $F=400$ in velja $5 \leq a \leq 10$ ter $20 \geq b \geq 8$, je razlika med največjo možno vrednostjo izraza $\frac{F}{ab}$ in najmanjšo možno vrednostjo tega izraza:

(A) 1 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8 **(E)** 160

A4. Katera izmed enačb določa premico, vzporedno simetrali lihih kvadrantov?

(A) $y=-3x+3$ **(B)** $y=x+\frac{1}{3}$ **(C)** $y=-x-3$ **(D)** $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ **(E)** $y=-x+1$

A5. Z vžigalicami smo oblikovali mrežo. Po dolžini smo polagali 60 vžigalic eno za drugo v posamezno vrsto tako, da sta se vsaki sosednji vžigalici stikali, po širini pa 32 vžigalic na analogen način. Koliko vžigalic smo uporabili za oblikovanje te mreže?



(A) 1920 **(B)** 1952 **(C)** 1980 **(D)** 2013 **(E)** 3932

A6. Kateri izraz nima vrednosti 1?

(A) $-\frac{\sqrt{64}}{(-2)^3}$ **(B)** $-(-1)^4$ **(C)** $(-1)^{2018}$ **(D)** 1^{-10} **(E)** 2018^0

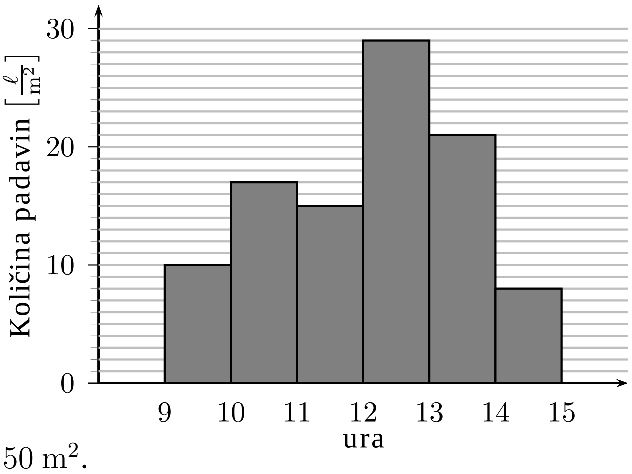
A7. Največji evropski proizvajalec avtomobilov je kljub recesiji v letu 2009 prodal rekordnih $6{,}29$ milijona vozil. Leto prej je bilo prodanih za 1 odstotek avtomobilov manj, kar pomeni približno:

(A) 62 avtomobilov **(B)** 630 avtomobilov **(C)** 6300 avtomobilov
(D) 63000 avtomobilov **(E)** 1 milijon avtomobilov

A8. Dana je enačba $(x+5)(x+2)=40$. Ena izmed rešitev enačbe je:

(A) -10 **(B)** -5 **(C)** -2 **(D)** 0 **(E)** 40

B1. V kraju Mokri breg pade v povprečju $250\ \frac{\ell}{\mathrm{m}^2}$ padavin na mesec. S prikaza je razvidno, koliko padavin je v tem kraju padlo vsako uro nekega dne od 9. do 15. ure.



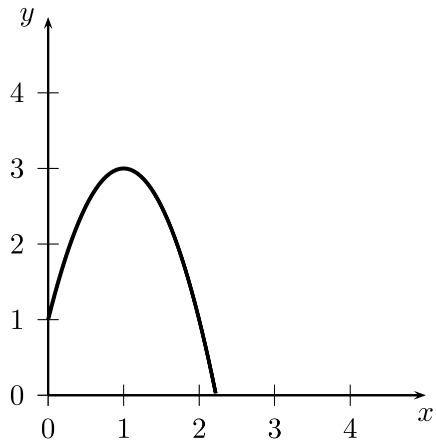
A. Med katerima urama je padla največja količina padavin?

B. Koliko litrov dežja na kvadratni meter je padlo tega dne od 9. do 15. ure?

C. Koliko odstotkov mesečnega povprečja je padlo v tem času?

D. Hiša tete Amalije ima streho s površino $150\ \mathrm{m}^2$.
Koliko kubičnih metrov dežja je od 9. do 15. ure tega dne padlo na streho njene hiše?

B2. Lara je s cevjo za zalivanje vrta, ki jo je držala 1 meter nad tlemi, napravila curek vode, ki ima obliko kvadratne parabole $y = -2x^2 + 4x + 1$, kot je vidno na sliki.

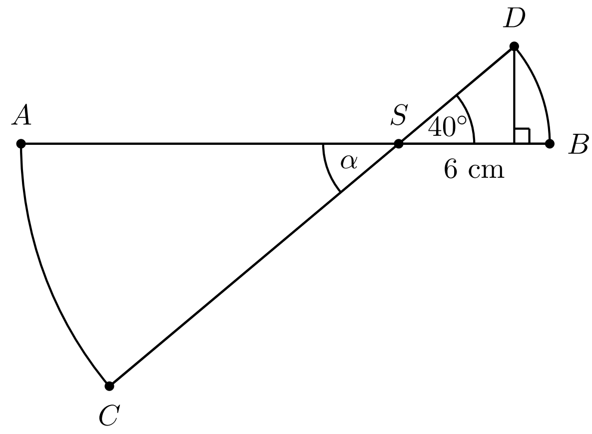


A. Kako visoko seže curek vode?

B. Izračunaj, kako daleč stran pade curek vode na tla.

C. Skozi cev za zalivanje steče vsako minuto 18 litrov vode. V kolikšnem času bi Lara napolnila $1{,}2\ \mathrm{m}$ visok plastični sod v obliki valja, katerega polmer osnovne ploskve je $30\ \mathrm{cm}$?

B3. Daljici AB in CD se sekata v točki S in tvorita krožna izseka, tako da je $|SB| = |SD| = 6\ \mathrm{cm}$ (glej sliko).



A. Zapišite velikost kota α.

B. Izračunajte dolžino daljice AB, če velja $|AS| : |SB| = 5 : 2$.

C. Koliko je dolg krožni lok med točkama B in D? Za π vzemite približek $3{,}14$ ter rezultat zapišite v centimetrih na eno decimalko natančno.

D. Z uporabo ustrezne kotne funkcije izračunajte oddaljenost točke D od daljice AB. Rezultat zapišite v centimetrih na dve decimalki natančno.

18. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2018

Rešitve nalog in točkovnik za 1. in 2. letnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

V tabeli so zapisani pravilni odgovori izbirnih nalog. Vsak pravilen odgovor točkujemo z 2 točkama, nepravilen z $-0{,}5$ točke, če naloga ni rešena, 0 točk.

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	D	B	B	E	D	D

A1. V prvem kvadratu je osenčena $\frac{1}{4}$ lika, v drugem $\frac{1}{8}$, v tretjem $\frac{3}{8}$ in v četrtem $\frac{1}{4}$ lika. Skupaj je osenčen 1 cel lik od štirih, kar predstavlja 25 %.

A2. Možne vsote pik na zgornjih ploskvah igralnih kock so: $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 2 = 2 + 1$, $4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1$, $5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1$, $6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1$, $7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1$, $8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4 = 5 + 3 = 6 + 2$, $9 = 3 + 6 = 4 + 5 = 5 + 4 = 6 + 3$, $10 = 4 + 6 = 5 + 5 = 6 + 4$, $11 = 5 + 6 = 6 + 5$ in $12 = 6 + 6$, skupaj 11 različnih vsot.

A3. Povprečna starost osmih dijakov je $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_8}{8}$. Od tod dobimo $x_1 + x_2 + \ldots + x_8 = 8 \cdot \bar{x}$ ali $8 \cdot 16 = 128$ let.

A4. Senca, ki ne more nastati pri obračanju in vrtenju pravokotnika, je trikotnik.

A5. Vsi izrazi, razen $-(-1)^4 = -1$, imajo vrednost 1.

A6. Ničlo premice izračunamo upoštevajoč pogoj $y = 0$. Premica $6y + 3x + 3 = 0$ ima ničlo pri $x = -1$.

A7. En odstotek od 6,29 milijona je 62900. To je približno 63000 avtomobilov manj.

A8. Če je $a = 5$ in $b = 8$, je vrednost izraza $\frac{F}{ab} = \frac{400}{5 \cdot 8} = 10$. Če je $a = 10$ in $b = 20$, pa je vrednost izraza $\frac{F}{ab} = \frac{400}{10 \cdot 20} = 2$. Razlika med 10 in 2 je 8.

DALJŠE NALOGE

B1. Največja količina padavin je padla med 12. in 13. uro.
V vseh šestih urah je na m^2 padlo $10\ \ell + 17\ \ell + 15\ \ell + 29\ \ell + 21\ \ell + 8\ \ell = 100\ \ell$ dežja.
V prikazanih šestih urah je padlo $100\ \frac{\ell}{\mathrm{m}^2}$, kar znaša $40\ \%$ od mesečnega povprečja.
Na streho, ki ima površino $150\ \mathrm{m}^2$, je padlo $150 \cdot 100\ \ell = 15000\ \ell = 15\ \mathrm{m}^3$ dežja.
Rezervoar se napolni z $\frac{1}{4}$ od $15000\ \mathrm{dm}^3 = 3750\ \mathrm{dm}^3$ vode. Voda v rezervoarju s premerom $2\ \mathrm{m}$ oz. polmerom $1\ \mathrm{m}$ sega do višine $v = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{3750\ \mathrm{dm}^3}{\pi (10\ \mathrm{dm})^2} = (11{,}9 \pm 0{,}1)\ \mathrm{dm} = (119 \pm 1)\ \mathrm{cm}$.

A. Med 12. in 13. uro je padlo največ dežja. .... **1 t**

B. V prikazanih šestih urah je padlo $100\ \frac{\ell}{\mathrm{m}^2}$. .... **1 t**

C. $100\ \frac{\ell}{\mathrm{m}^2}$ od $250\ \frac{\ell}{\mathrm{m}^2}$ je $40\ \%$ .... **2 t**

D. Na streho je padlo $15000\ \ell$ dežja, kar je $15\ \mathrm{m}^3$.................................. **1 t**

E. Izračunana prostornina vode v rezervoarju $3750\ \mathrm{dm}^3$.................................. **1 t**
Izračunana višina, do katere sega voda $(119 \pm 1)\ \mathrm{cm}$. .... **1 t**

–

B2. Rešitev enačbe $3^p + 3^4 = 90 \Leftrightarrow 3^p = 90 - 3^4 \Leftrightarrow 3^p = 9$ je $p = 2$. Rešitev enačbe $2^r + 44 = 76 \Leftrightarrow 2^r = 76 - 44 \Leftrightarrow 2^r = 32$ je $r = 5$. Rešitev enačbe $5^3 + 6^s = 1421 \Leftrightarrow 6^s = 1421 - 5^3 \Leftrightarrow 6^s = 1296$ je $s = 4$.
Iskana leta, ko bo Rok dvakrat toliko star kot Peter, označimo z x. Zapišemo in rešimo enačbo: $5 + x = 2 \cdot (2 + x)$. Rok bo dvakrat toliko star kot Peter čez $x = 1$ leto.
Največji možni rezultat dobimo s potenciranjem: $(2^5)^4 = 1048576$ ali $(4^2)^5 = 1048576$.

A. Izračun starosti Petra ($p = 2$), Roka ($r = 5$) in Simona ($s = 4$)............ **3 krat 1 t**

B. Zapis in reševanje enačbe $5 + x = 2 \cdot (2 + x)$. .... **1 t**
Rok bo dvakrat toliko star kot Peter čez eno leto. .... **1 t**

C. $(2^5)^4 = 1048576$ ali $(4^2)^5 = 1048576$ .... **2 t**

B3. V oglišču C se stikajo koti $120°$, $90°$, $\sphericalangle ACB$ in $60°$, ki so skupaj veliki $360°$. Iz tega sledi, da je $\sphericalangle ACB = 90°$. Trikotnik ACB je pravokotni enakokraki trikotnik, zato sta $\sphericalangle BAC$ in $\sphericalangle CBA$ skladna in sta velika $45°$.
Obseg šestkotnika $ABIDCH$ je $(5a + |AB|)\ \mathrm{cm} \approx 6{,}4\ \mathrm{cm}$, dolžino stranice AB izračunamo s Pitagorovim izrekom $|AB| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ \mathrm{cm}$.
Petkotnik $ADEFG$ je sestavljen iz sedmih enakostraničnih trikotnikov, zato je $S = 7 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{cm}^2 \approx 3{,}0\ \mathrm{cm}^2$.

A. Izračunani koti: $\sphericalangle ACB = 90°$, $\sphericalangle BAC = 45°$, $\sphericalangle CBA = 45°$ .... **3 krat 1 t**

B. Izračun dolžine stranice AB: $|AB| = \sqrt{2} \approx 1{,}4\ \mathrm{cm}$ .... **1 t**
Izračun obsega šestkotnika $ABIDCH$: $o = 6{,}4\ \mathrm{cm}$.................................. **1 t**

C. Izračun ploščine petkotnika $ADEFG$: $S \approx 3{,}0\ \mathrm{cm}^2$ .... **2 t**

18. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2018

Rešitve nalog in točkovnik za 3. letnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

V tabeli so zapisani pravilni odgovori izbirnih nalog. Vsak pravilen odgovor točkujemo z 2 *točkama, nepravilen z* $-0{,}5$ *točke, če naloga ni rešena,* 0 *točk.*

1	2	3	4	5	6	7	8
E	B	D	B	E	B	D	A

A1. Večkratnik števila 9 je število, ki je deljivo z 9. Med ponujenimi odgovori je tako le število $(2+0)\,(1+8)=18$.

A2. Možne vsote pik na zgornjih ploskvah igralnih kock so: $2=1+1$, $3=1+2=2+1$, $4=1+3=2+2=3+1$, $5=1+4=2+3=3+2=4+1$, $6=1+5=2+4=3+3=4+2=5+1$, $7=1+6=2+5=3+4=4+3=5+2=6+1$, $8=2+6=3+5=4+4=5+3=6+2$, $9=3+6=4+5=5+4=6+3$, $10=4+6=5+5=6+4$, $11=5+6=6+5$ in $12=6+6$, skupaj 11 različnih vsot.

A3. Če je $a=5$ in $b=8$, je vrednost izraza $\frac{F}{ab}=\frac{400}{5\cdot 8}=10$. Če je $a=10$ in $b=20$, pa je vrednost izraza $\frac{F}{ab}=\frac{400}{10\cdot 20}=2$. Razlika med 10 in 2 je 8.

A4. Simetrala lihih kvadrantov ima smerni koeficient 1. Premica, katere enačba je $y=x+\frac{1}{3}$, ima enak smerni koeficient, zato je vzporedna s simetralo lihih kvadrantov.

A5. V prvi in zadnji vrsti kvadratov porabimo $2\cdot(2\cdot 60+61)$ vžigalic, za vse vmesne pa $30\cdot 61+29\cdot 60$, skupaj 3932 vžigalic.

A6. Vsi izrazi, razen $-\left(-1\right)^4=-1$, imajo vrednost 1.

A7. En odstotek od $6{,}29$ milijona je 62900. To je približno 63000 avtomobilov manj.

A8. Enačbo $(x+5)\,(x+2)=40$ uredimo do oblike $x^2+7x-30=0$ in razstavimo $(x+10)\,(x-3)=0$. Enačba ima rešitvi -10 in 3.

B1. Največja količina padavin je padla med 12. in 13. uro.
V vseh šestih urah je na m^2 padlo $10\ \ell + 17\ \ell + 15\ \ell + 29\ \ell + 21\ \ell + 8\ \ell = 100\ \ell$ dežja.
V prikazanih šestih urah je padlo $100\ \frac{\ell}{\mathrm{m}^2}$, kar znaša $40\ \%$ od mesečnega povprečja.
Na streho, ki ima površino $150\ \mathrm{m}^2$, je padlo $150 \cdot 100\ \ell = 15000\ \ell = 15\ \mathrm{m}^3$ dežja.

A. Med 12. in 13. uro je padlo največ dežja. .... **1 t**

B. V prikazanih šestih urah je padlo $100\ \frac{\ell}{\mathrm{m}^2}$. .... **2 t**

C. $100\ \frac{\ell}{\mathrm{m}^2}$ od $250\ \frac{\ell}{\mathrm{m}^2}$ je $40\ \%$ .... **2 t**

D. Na streho je padlo $15000\ \ell$ dežja, ... **1 t**
kar je $15\ \mathrm{m}^3$.................... **1 t**

B2. Iz grafa je razvidno, da curek vode seže do višine treh metrov.
Curek vode pade na tla $2{,}22\ \mathrm{m}$ stran, kar je rešitev enačbe $-2x^2 + 4x + 1 = 0$; $x_1 = 2{,}2$ in $x_2 = -0{,}2$ (neprimerna rešitev).
Prostornina soda je $V = \pi r^2 v = \pi \cdot (3\ \mathrm{dm})^2 \cdot 12\ \mathrm{dm} = 339{,}12\ \mathrm{dm}^3 = 339{,}12\ \ell$. Sod se napolni v $339{,}12\ \ell : 18\ \frac{\ell}{\mathrm{min}} \approx 19\ \mathrm{min}$.

A. Curek seže do višine treh metrov. .... **1 t**

B. Curek vode pade na tla pri $2{,}2\ \mathrm{m}$. .... **3 t**

C. Izračunana prostornina soda $339{,}12\ \ell$ .... **2 t**
Izračun časa, potrebnega za polnjenje $\approx 19\ \mathrm{min}$.................... **1 t**

B3. Kota α in kot $40°$ na sliki sta sovršna kota, zato je $\alpha = 40°$.
Velja: $|AS| : |SB| = 5 : 2$ ali $\frac{|AS|}{6} = \frac{5}{2}$ oz. $|AS| = 15\ \mathrm{cm}$. $|AB| = |AS| + |SB| = 21\ \mathrm{cm}$.
Obseg celotnega kroga s polmerom $6\ \mathrm{cm}$ je $37{,}68\ \mathrm{cm}$. Krožni lok med točkama B in D je dolg $\frac{37{,}68\ \mathrm{cm} \cdot 40°}{360°} \approx 4{,}2\ \mathrm{cm}$.
Razdaljo točke D od daljice AB označimo z x in zapišemo: $sin 40° = \frac{x}{6}$. Rešitev enačbe je $x = 3{,}86\ \mathrm{cm}$.

A. $\alpha = 40°$ .... **1 t**

B. $AS = 15\ \mathrm{cm}$. .... **1 t**
$AB = 21\ \mathrm{cm}$ .... **1 t**

C. Izračunan obseg kroga s polmerom $6\ \mathrm{cm}$ je $37{,}68\ \mathrm{cm}$. .... **1 t**
Izračunana dolžina krožnega loka med točkama B in D je $4{,}2\ \mathrm{cm}$. .... **1 t**

D. Uporabljeno razmerje $sin 40° = \frac{x}{6}$ .... **1 t**
Izračunana oddaljenost točke D od daljice AB $3{,}86\ \mathrm{cm}$ .... **1 t**