Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Četrto regijsko tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol

31. marec 2004

I. del: KRATKE NALOGE

Navodilo: V nalogah od A1 do A10 izberite črko pred pravilnim odgovorom in jo vpišite v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli. Če pustite polje v preglednici prazno, dobite 0 točk.

Upoštevajte, da je treba v času 90 minut rešiti naloge prvega in drugega dela.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10

A1. Pri plačilu položnice moramo plačati 1,2 % provizije. Koliko tolarjev bo znašala provizija, če moramo plačati položnico za 8000 SIT?

(**A**) 960 (**B**) 115 (**C**) 120 (**D**) 667 (**E**) 96

A2. Tri dneve nekega meseca, in sicer tri torke, smo zapisali s sodo številko. Kateri dan v tednu je bil 25. dan tega meseca?

(**A**) ponedeljek (**B**) torek (**C**) sreda (**D**) četrtek (**E**) petek

A3. Naj bo $A = \diamondsuit - \heartsuit + \spadesuit$, $B = -\spadesuit - \heartsuit + \diamondsuit$ in $C = \heartsuit - \diamondsuit + \spadesuit$. Potem je $A - B - C$ enako:

(**A**) 0 (**B**) $3\diamondsuit - 3\heartsuit - \spadesuit$ (**C**) $\heartsuit$
(**D**) $\diamondsuit$ (**E**) $\diamondsuit - \heartsuit + \spadesuit$

A4. V slaščičarni imajo pet različnih okusov sladoleda: vanilijo, čokolado, jagodo, marelico in jogurt. Sladoledno porcijo sestavljajo tri kepice sladoleda, vsaka kepica je drugačnega okusa. Koliko različnih sladolednih porcij lahko sestavi sladoledar?

(**A**) 60 (**B**) 10 (**C**) 15
(**D**) 6 (**E**) nič izmed navedenega

A5. Kaj je ceneje: če grem v kino skupaj z dvema prijateljema ali če grem dvakrat v kino, vsakič z enim prijateljem?

(**A**) Če grem skupaj z dvema prijateljema.

(**B**) Če grem dvakrat, vsakič z 1 prijateljem.

(**C**) Oboje bi stalo enako.

(**D**) Prva možnost je dvakrat dražja od druge.

(**E**) Noben izmed navedenih odgovorov ni pravilen.

A6. V podjetju Mars so naredili robota, ki uboga ukaze "levo", "desno", "gor" in "dol". Lahko tudi določijo, koliko korakov naj naredi v določeni smeri. Postavili so ga v pravokotni koordinatni sistem, in sicer na točko $(3, 2)$. Ukazali so mu: "2 levo, 5 gor, 4 desno in 3 dol". Na kateri točki bo pristal?

(**A**) $(5, 4)$ (**B**) $(5, 7)$ (**C**) $(7, 1)$ (**D**) $(4, 4)$ (**E**) $(4, 5)$

A7. Katero število je naslednje v zaporedju števil: 144, 121, 100, 81, 64 ...

(**A**) 47 (**B**) 19 (**C**) 36 (**D**) 49 (**E**) 50

A8. Na dirki *Formule 1* znaša nagradni sklad 1,3 milijona USD. Prvih šest tekmovalcev si nagrade razdeli v razmerju 10 : 6 : 4 : 3 : 2 : 1. Koliko dolarjev dobi zmagovalec?

(**A**) 130000 (**B**) 13000 (**C**) 500000 (**D**) 50000 (**E**) 100000

A9. Ko Cene preteče 1000 m, je Tone 10 m za njim. Ko Tone preteče 1000 m, je Milan 20 m za njim. Za koliko metrov bo Cene prehitel Milana v teku na 1000 m?

(**A**) 30,1 (**B**) 30 (**C**) 10

(**D**) 29,8 (**E**) Nemogoče je določiti.

A10. Če odprete knjigo in seštejete števili, ki označujeta levo in desno stran, dobite 21. Katero število dobite, če isti dve števili zmnožite?

(**A**) 100 (**B**) 121 (**C**) 420 (**D**) 110 (**E**) 200

Četrto regijsko tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol

31. marec 2004

II. del: DALJŠE NALOGE

Navodilo: Naloge od B1 do B4 drugega dela rešujte na priloženem papirju, kamor vpisujte celotne račune. Vsako nalogo skrbno preberite in odgovorite na zastavljena vprašanja. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 5 točkami.

Upoštevajte, da je treba v času 90 minut rešiti naloge prvega in drugega dela.

B1. Frida si je kupila 105 cm dolge hlače. Ker so ji bile predolge, jih je dala šivilji skrajšati za 5 cm. Ko je po pranju hlače vzela iz pralnega stroja, je ugotovila, da so ji prekratke za 2 cm. Seveda je Frida spregledala priloženi listek o krčenju po dolžini.

a) Koliko odstotkov krčenja je označil proizvajalec?

b) Na katero najkrajšo dolžino bi morala šivilja skrajšati hlače (pred pranjem), da Fridi ne bi bile prekratke? Rezultat zaokrožite na centimeter natančno.

B2. Neki Arabec je imel 1000 zlatnikov. Razdelil jih je svojim trem sinovom in štirim hčeram. Vsi sinovi so dobili enake deleže. Tudi hčere so dobile med seboj enake deleže, vsaka pol toliko kot vsak izmed bratov.

a) Koliko zlatnikov je dobil vsak sin?

b) Koliko zlatnikov je dobila vsaka hči?

c) Koliko zlatnikov bi dobil vsak otrok pri enakopravni delitvi? Rezultat zaokrožite navzdol.

B3. Mama je za dnevno sobo kupila karniso, dolgo 1 m, in 2 m^2 blaga za zavese. Za vse skupaj je plačala 19000 SIT. Doma je ugotovila, da bi bilo najbolje, če bi imela tudi v jedilnici tako karniso in zavese. Vrnila se je v trgovino ter za 1,5 m dolgo karniso in 4 m^2 blaga plačala 35500 SIT. Koliko stane 1 m karnise in koliko 1 m^2 blaga?

B4. Na matematičnem tekmovanju so med tekmovalce razdelili 62 čokolad, 310 bonbonov, 155 žvečilnih gumijev, 93 pomaranč in 186 sokov tako, da je dobil vsak enako število čokolad, bonbonov, žvečilnih gumijev, pomaranč in sokov.

a) Koliko tekmovalcev je bilo na tekmovanju?

b) Koliko posameznih dobrot je dobil vsak tekmovalec?

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

I. DEL

V preglednici so zapisani pravilni odgovori. Pravilni odgovor tekmovalca se točkuje z 2 točkama, nepravilni z -1 točko, prazno polje preglednice pa z 0 točkami.

Naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Odgovor	E	D	E	B	A	A	D	C	D	D

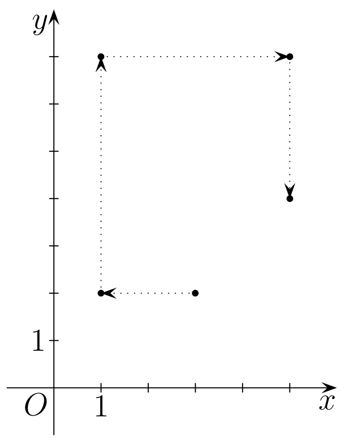
A1. Izračunati moramo 1,2 % od 8000 SIT, kar je enako $80 \cdot 1{,}2 = 96$ SIT.

A2. Če smo tri torke nekega meseca zapisali s sodo številko, so bili to 2., 16. in 30. dan v mesecu. Torka sta bila še dva: 9. in 23. dan v mesecu, torej je bil 25. dan četrtek.

A3. Izračunamo: $A - B - C = \diamondsuit - \heartsuit + \spadesuit - (-\spadesuit - \heartsuit + \diamondsuit) - (\heartsuit - \diamondsuit + \spadesuit) = \diamondsuit - \heartsuit + \spadesuit$.

A4. Ker sladoledno porcijo sestavljajo tri kepice sladoleda različnih okusov, je 10 različnih porcij. Če okuse kratko označimo z V, K, J, M in T, imamo možnosti: VKJ, VKM, VKT, VJM, VJT, VMT, KJM, KJT, KMT in JMT.

A5. Če grem v kino skupaj z dvema prijateljema, plačamo 3 vstopnice, kar je ceneje. Če bi šel dvakrat v kino, vsakič z enim prijateljem, bi plačali 4 vstopnice.



A6. Na sliki je prikazano, kako se robot premika, če uboga ukaze.

A7. Opazimo, da v zaporedju nastopajo popolni kvadrati $144 = 12^2$, $121 = 11^2$, $100 = 10^2$, $81 = 9^2$ in $64 = 8^2$, naslednje število je tako $49 = 7^2$.

A8. Iz besedila naloge sklepamo, da je $10x + 6x + 4x + 3x + 2x + x = 1{,}3$, od koder dobimo $x = 0{,}05$. Zmagovalec dobi $10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5$ milijona USD.

A9. Ko Cene preteče 1000 m, manjka Tonetu 10 m do cilja. Milan je nekoliko počasnejši od Toneta, saj od skupnega štarta počasi zaostaja za njim: ko Tone preteče 1000 m, je Milan 20 m za njim. Sklepamo torej, da je Milan $\frac{990 \cdot 20}{1000} = \frac{99}{5} = 19{,}8$ m za Tonetom, ko le-ta preteče 990 m. Cene prehiti Milana za $10 + 19{,}8 = 29{,}8$ m.

A10. Levo in desno stran knjige označujeta zaporedni števili, zato je $21 = 10 + 11$, zmnožek pa je $10 \cdot 11 = 110$.

II. DEL

B1. Dolžina skrajšanih hlač pred pranjem je bila 105 cm − 5 cm = 100 cm. Po pranju so se skrčile za 2 cm, kar predstavlja 2 % dolžine skrajšanih hlač pred pranjem in hkrati odstotek krčenja, ki ga je označil proizvajalec.
Da bi imele skrajšane hlače po pranju želeno dolžino 100 cm, bi šivilja pred pranjem morala upoštevati 2 % krčenja, ki ga je označil proizvajalec. To pomeni, da dolžina 100 cm predstavlja 98 % najkrajše dolžine, na katero bi morala šivilja Fridi skrajšati hlače. Najkrajša dolžina je: $\frac{100 \cdot 100}{98} = 102{,}04 \doteq 102$ cm.

Točkovnik: $\boxed{\text{Skupaj: 5 točk}}$

a) Izračunan postopek krčenja: 2 % .... **1 t**
Zapisan odgovor, npr.: Proizvajalec je označil krčenje 2 %. .... **1 t**

b) Izračunana dolžina, na katero še lahko odreže hlače: 102 cm .... **2 t**
Zapisan odgovor, npr.: Šivilja lahko skrajša hlače na največ 102 cm. .... **1 t**

B2. Če označimo delež vsakega izmed sinov z x, delež vsake izmed hčera pa z y, imamo: $3x+4y = 1000$. Iz besedila razberemo, da je vsaka izmed hčera dobila pol toliko kot vsak izmed bratov, kar lahko zapišemo kot $y = \frac{x}{2}$. Če to zvezo upoštevamo v prej zapisani enačbi, dobimo linearno enačbo z eno neznanko: $3x + 4\frac{x}{2} = 1000$ oziroma $3x + 2x = 1000$, od tod pa izračunamo $x = 200$. Vsak sin je dobil 200 zlatnikov.
Upoštevamo, da je vsaka izmed hčera dobila pol toliko kot vsak od sinov: $y = \frac{x}{2} = 100$. Vsaka hči je dobila 100 zlatnikov.
Če bi bila delitev enakopravna, bi vsak izmed sedmih otrok dobil enak delež: $1000 : 7 = 142{,}86$. Ko zaokrožimo navzdol, dobimo 142. Pri enakopravni delitvi bi vsak otrok dobil 142 zlatnikov.

Točkovnik: $\boxed{\text{Skupaj: 5 točk}}$

a) Izbira neznanke in nastavitev enačbe, npr.: $x + x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 1000$ ... **1 t**
Rešitev enačbe: $x = 200$ .... **1 t**
Zapisan odgovor, npr.: Vsak sin dobi 200 zlatnikov. .... **1 t**

b) Zapisan odgovor, npr.: Vsaka hči dobi 100 zlatnikov. .... **1 t**

c) Zapisan odgovor, npr.: Pri enakopravni delitvi bi vsak otrok dobil 142 zlatnikov. **1 t**

B3. Če označimo ceno 1 m karnise z x, ceno 1 m^2 blaga pa z y, lahko po besedilu naloge zapišemo enačbi: $x + 2y = 19000$ in $1{,}5x + 4y = 35500$. Ta sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama lahko rešimo npr. z zamenjalnim načinom ali z metodo nasprotnih koeficientov.
Rešitev z zamenjalnim načinom: Iz prve enačbe izrazimo $x = 19000 - 2y$. To upoštevamo v drugi enačbi: $1,5 \cdot (19000 - 2y) + 4y = 35500$, od tod pa sledi $28500 - 3y + 4y = 35500$

oziroma $y = 7000$. Končno imamo še $x = 19000 - 2y = 5000$.
Rešitev z metodo nasprotnih koeficientov: Prvo enačbo pomnožimo z (-2) in prištejemo drugi, pa imamo $-0,5x = -2500$ oziroma $x = 5000$. Nato izračunamo še $y = 7000$.

Točkovnik: $\boxed{\text{Skupaj: 5 točk}}$

Izbira neznank in nastavitev enačb, npr.: $x + 2y = 19000$ in $1,5x + 4y = 35500$ ... **2 t**

Izračunani neznanki: $x = 5000$ SIT, $y = 7000$ SIT ... **2 t**

Zapisan odgovor, npr.: 1 m^2 blaga stane 7000 SIT, 1 m karnise stane 5000 SIT. ... **1 t**

B4. Število tekmovalcev na tekmovanju določimo tako, da poiščemo skupni delitelj števil 62, 310, 155, 93 in 186. Ker so praštevilski razcepi teh števil $62 = 2 \cdot 31$, $310 = 2 \cdot 5 \cdot 31$, $155 = 5 \cdot 31$, $93 = 3 \cdot 31$ in $186 = 2 \cdot 3 \cdot 31$, je največji skupni delitelj vseh naštetih števil enak 31 – to pa je ravno število tekmovalcev na matematičnem tekmovanju.
Glede na izračunano število tekmovalcev na matematičnem tekmovanju lahko s preprostimi računi določimo, koliko posameznih dobrot je dobil vsak tekmovalec. Vsak tekmovalec je dobil: $62 : 31 = 2$ čokoladi, $310 : 31 = 10$ bonbonov, $155 : 31 = 5$ žvečilnih gumijev, $93 : 3 = 3$ pomaranče in $186 : 31 = 6$ sokov.

Točkovnik: $\boxed{\text{Skupaj: 5 točk}}$

a) Poiskan največji skupni delitelj: 31 ... **3 t**
Zapisan odgovor, npr.: Na tekmovanju je bilo 31 tekmovalcev. ... **1 t**

b) Zapisan odgovor, npr.: Vsak tekmovalec je dobil: 2 čokoladi, 10 bonbonov, 5 žvečilnih gumijev, 3 pomaranče, 6 sokov. ... **1 t**