

**Društvo matematikov, fizikov  
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19  
1000 Ljubljana

# **Tekmovalne naloge DMFA Slovenije**

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na [www.dmfa.si](http://www.dmfa.si)), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	

Za reševanje imaš na voljo 90 minut. Odgovore zapiši v gornjo preglednico. Za vsak pravilen odgovor dobiš toliko točk, kot je naloga vredna. Za vsak nepravilen odgovor ti odštejemo četrtnino točk, kot je naloga vredna. Če pa pušiš polje v preglednici prazno, dobiš 0 točk. Da bi se izognili negativnemu končnemu dosežku, ti priznamo začetnih 24 točk.

NALOGE, VREDNE 3 TOČKE

1. Kolikšno je razmerje ploščin pravilnega šestkotnika in enakostraničnega trikotnika, ki sta včrtana isti krožnici?

- (A) 2 : 1                      (B) 3 : 1                      (C) 4 : 1                      (D) 5 : 1                      (E) 6 : 1

2. Kolikšna je vsota vseh pozitivnih ulomkov, manjših od 1, ki imajo za imenovalc praštevilo  $p$ ?

- (A)  $(p - 2)/2$               (B)  $(p - 1)/2$               (C)  $(p + 1)/2$               (D)  $(p + 2)/2$               (E)  $p/2$

3. Ana, Blaž in Cene zbirajo nalepke s sličicami nogometašev. Ko se nekega dne vsi trije srečajo, poteka naslednji pogovor.

Ana pove: Škupaj imam trikrat toliko nalepk, kot bi jih imela, če ne bi štela 10 ponovljenih nalepk."

Blaž pove: Škupaj imam trikrat toliko nalepk, kot bi jih imel, če ne bi štel 20 ponovljenih nalepk."

Cene pove: Škupaj imam trikrat toliko nalepk, kot bi jih imel, če ne bi štel 30 ponovljenih nalepk."

Koliko nalepk imajo vsi trije skupaj?

- (A) 60                              (B) 90                              (C) 120                              (D) 180  
(E) Ni mogoče določiti.

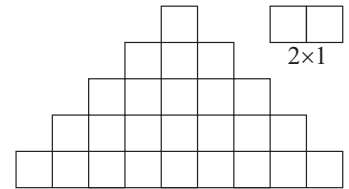
4. Maja in Klemen sta štela svoje prihranke. Ugotovila sta, da če bi Maja Klemnu dala 22 evrov, potem bi imel Klemen trikrat toliko denarja kot Maja, če pa pa bi Klemen Maji dal 22 evrov, bi imela Maja štirikrat toliko denarja kot Klemen. Koliko evrov imata Klemen in Maja skupaj?

- (A) 44                              (B) 80                              (C) 88                              (D) 120                              (E) 132

5. Poišči vsa realna števila  $x$ , ki zadoščajo naslednji enačbi:  $|x - 1| - |x| = -1$ .

- (A)  $[1, +\infty)$               (B)  $[0, +\infty)$               (C)  $(-\infty, 0)$               (D)  $(-\infty, 1]$               (E)  $(0, 1]$

6. Prikazana figura je sestavljena iz enakih kvadratov. Največ koliko domin velikosti  $2 \times 1$  (glej sliko) lahko postavimo na to figuro? Domine lahko postavimo vodoravno ali navpično, vsaka domina lahko prekrije natanko 2 kvadrata velikost  $1 \times 1$ , iz katerih je sestavljena prikazana figura. Domine se ne smejo prekrivati ali segati čez figuro.



- (A) 8                      (B) 9                      (C) 10                      (D) 11                      (E) 12

7. Asistent išče študenta, ki je med odmorom porisal tablo. Ve, da je to storil eden izmed naslednjih študentov: Naja, Jana, Kaja ali Jaka. Vprašal jih je in dobil naslednje odgovore:

Naja: "Nisem bila jaz. Bila je Kaja."

Jana: "Ni bila Kaja. Bila je Naja."

Kaja: "Nisem bila jaz. Tudi Jaka ni bil."

Jaka: "Nisem kriv. Tudi Kaja ni."

Vsak od študentov je povedal eno resnico in eno laž. Kdo je porisal tablo?

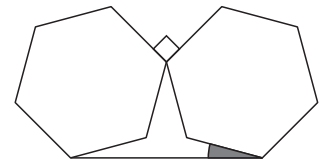
- (A) Naja                      (B) Jana                      (C) Kaja                      (D) Jaka  
(E) Ni mogoče določiti.

8. Andrej je uspešen študent, ki je na prvih treh izpitih (od štirih) dosegel povprečje 98%. Za zadnji izpit se mu ne ljubi preveč učiti, vendar pa želi dobiti dekanovo nagrado, za katero potrebuje povprečje vseh izpitov vsaj 96%. Koliko procentov je najmanj, kar jih Andrej lahko dobi na zadnjem izpitu, da bo še vedno dobil dekanovo nagrado?

- (A) 75                      (B) 80                      (C) 85                      (D) 90                      (E) 95

**NALOGE, VREDNE 4 TOČKE**

9. Dva enaka pravilna šestkotnika postavimo tako, da imata skupno oglišče in je med stranicama ob tem oglišču kot  $90^\circ$ . Kolikšna je velikost označenega kota?



- (A)  $10^\circ$                       (B)  $15^\circ$                       (C)  $20^\circ$                       (D)  $25^\circ$                       (E)  $30^\circ$

10. Koliko realnih števil  $x$  zadošča enačbi  $\log_{10}(1 - x^2) \cdot \log_{10}(x^3 - 3) = 1$ ?

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3  
(E) Neskončno mnogo.

11. Ko digitalna ura kaže čas 13:18, je vsota števk  $1 + 3 + 1 + 8 = 13$ , kar je enako takratni uri (13). Kolikokrat od 00:00 do 23:59 se to zgodi?

- (A) 10                      (B) 30                      (C) 50                      (D) 70                      (E) 90

12. Tri družine se dobijo v parku, da bi imele piknik. S sabo imajo tri velike podloge za sedenje, katerih velikosti so  $1,5 \text{ m} \times 2,5 \text{ m}$ ,  $1,5 \text{ m} \times 3 \text{ m}$  in  $2 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ . Podloge želijo položiti na tla tako, da popolnoma prekrijejo površino pravokotne oblike, pri čemer se podloge lahko prekrivajo. Koliko kvadratnih metrov je največja možna površina, ki jo podloge na tak način lahko prekrijejo?

- (A) 11,25                      (B) 10,5                      (C) 10                      (D) 9,5                      (E) 9,25

13. Koliko je  $x$ , če velja  $x = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2^2} + \frac{x}{2^3} + \dots + \frac{x}{2^n}$ ?

- (A)  $2^{n+2}$       (B)  $2^{n+1}$       (C)  $2^n$       (D)  $3 \cdot 2^n$       (E)  $n \cdot 2^n$

14. Naj bo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija, katere zaloga vrednosti je interval  $[-2, 3]$ , in naj bo  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija, definirana s predpisom  $g(x) = 2f(x - 1) - 1$ . Kateri interval je zaloga vrednosti funkcije  $g$ ?

- (A)  $[-2, 3]$       (B)  $[-4, 6]$       (C)  $[-5, 5]$       (D)  $[-3, 2]$       (E)  $[-1, 4]$

15. Najmanj koliko polj v tabeli velikosti  $5 \times 5$  moramo pobarvati, če želimo, da bo vsak pravokotnik, sestavljen iz 4 polj, vseboval vsaj eno pobarvano polje?

- (A) 4      (B) 5      (C) 6      (D) 7      (E) 8

16. Kaj dobimo, če vsoto vseh naravnih števil od 3 do 353 delimo z 89?

- (A) 484      (B) 592      (C) 642      (D) 702      (E) 804

**NALOGE, VREDNE 5 TOČK**

17. Poišči vrednost izraza

$$\frac{1}{1 + 2022^{-2022}} + \frac{1}{1 + 2022^{-2021}} + \dots + \frac{1}{1 + 2022^{-1}} + \frac{1}{1 + 2022^0} + \frac{1}{1 + 2022^1} + \dots + \frac{1}{1 + 2022^{2021}} + \frac{1}{1 + 2022^{2022}}.$$

- (A) 2020,5      (B) 2021      (C) 2021,5      (D) 2022      (E) 2022,5

18. Pretvori decimalno število 183,90625 v dvojiški sistem.

- (A) 10110111,1101      (B) 10101111,11101      (C) 1010111,111  
(D) 10110111,11101      (E) 11010111,11101

19. Za koliko naravnih števil  $n$  je vsota

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

trimestno število, sestavljeno iz treh enakih števk?

- (A) 0      (B) 1      (C) 2      (D) 3      (E) 4

20. Katero je najmanjše naravno število  $n$ , za katerega je

$$2^{2022} + 2^n + 2^{22}$$

popolni kvadrat?

- (A) 4022      (B) 4020      (C) 1023      (D) 1022      (E) 1021

21. Naj bodo  $p$ ,  $q$  in  $r$  praštevila, katerih vsota je enaka 2000. Koliko je ostanek pri deljenju števila  $p^2q^2r^2$  s številom 48?

- (A) 0      (B) 2      (C) 4      (D) 6      (E) 24

22. Skupina delavcev pleska 2 steni, pri čemer ima večja stena dvakrat večjo površino od manjše. Vsi delavci celo prvo polovico delavnika pleskajo večjo steno. Drugo polovico delavnika prva polovica delavcev še naprej pleska večjo steno ter konča ob koncu delavnika, druga polovica delavcev pa pleska manjšo steno in jim na koncu delavnika nekaj dela še ostane. Delo na manjši steni nato v enem delavnem dnevu dokonča 1 delavec.

Koliko delavcev je v skupini, če vsi delavci delajo z isto hitrostjo?

- (A) 5                      (B) 6                      (C) 7                      (D) 8                      (E) 9

23. Miha ima nekaj kart, na vsaki od kart so napisana 3 realna števila, pri čemer je tretje število vsota prvih dveh napisanih števil (glej sliko). Vsa napisana števila na vseh kartah so različna. Od Mihovih kart je 1 karta rdeča, 1 karta je zelena, vse ostale njegove karte pa so bele. Miha je uredil karte glede na velikost 1. napisanega števila na karti od najmanjšega do največjega in ugotovil, da je bila rdeča karta 5. in zelena karta 6. Nato je uredil karte glede na velikost 2. napisanega števila na karti od najmanjšega do največjega in ugotovil, da je bila rdeča karta 6. in zelena karta 5. Na koncu je uredil karte še glede na velikost 3. napisanega števila na karti od najmanjšega do največjega in ugotovil, da je bila rdeča karta 1. in zelena karta zadnja. Koliko kart ima Miha?

A	B	A+B
---	---	-----

- (A) 10                      (B) 11                      (C) 12                      (D) 13

(E) Nemogoče je določiti.

24. V Kenguristanu uporabljajo valuto, katere kovanci imajo 14 različnih vrednosti. Iz vreče, ki vsebuje 28 kovancev, po 2 kovanca vsake vrednosti, naključno izvlečemo 6 kovancev. Naj bo  $p$  verjetnost, da izmed dobljenih 6 kovancev nobena dva nista iste vrednosti. Kaj velja za  $p$ ?

- (A)  $11/14 > p \geq 3/4$                       (B)  $3/4 > p \geq 3/5$                       (C)  $3/5 > p \geq 1/2$   
 (D)  $1/2 > p \geq 1/3$                       (E)  $1/3 > p$