**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

12. državno tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole
Murska Sobota, 4. april 2014

Prilepite nalepko s šifro

1. skupina: **Poslovna matematika**

N1	N2	N3	N4	Skupaj

Naloge rešujte samostojno. Za reševanje imate na voljo 120 minut.
Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog.

---

1. NALOGA

30 tekstilnih delavk je tri tedne in dva dni tkalo na 14 tekstilnih strojih 78 kosov zaves dolžine 2 metra in širine 12 metrov. Tkale so po 8 ur na dan.

a) Kakšna bo dolžina 70 kosov zaves, ki bodo za tretjino širše, če bo odšlo 20 % delavk na dopust, ostale pa bodo delale s 4 stroji več, en teden dlje ter po ¼ daljšem delavniku? Pri izračunu upoštevaj: _1 teden = 7 dni._

5 točk

b) Za koliko odstotkov bodo zavese druge skupine s 24 delavkami daljše oziroma krajše od prve skupine s 30 delavkami?

2 točki

2. NALOGA

Slovenski pridelovalec medu izvozi vsako leto 850 kg medu. V Avstrijo izvozi 50 kg medu več kot v Italijo.

Avstrijci so mu naročili cvetlični, akacijev in kostanjev med v razmerju 3 : 2 : 1. Italijani pa 150 kg več akacijevega kot cvetličnega medu in 200 kg manj kostanjevega kot akacijevega medu.

Izpolnite spodnjo tabelo in odgovorite.

Vrsta medu	Avstrijski kupec	Italijanski kupec	Skupaj v kg
Cvetlični			
Akacijev			
Kostanjev			
Skupaj v kg			

Za koliko odstotkov je izvozil slovenski pridelovalec medu več cvetličnega kot (od) kostanjevega medu?

7 točk

3. NALOGA

Jure in Nina sta imela na začetku študija enaki mesečni štipendiji, vsak po 202,00 EUR. Višina štipendije se jima je povečevala vsakih 12 mesecev, in sicer Juretu za 8 %, Nini pa za 16,50 EUR.

a) Kolikšno mesečno štipendijo bo imel Jure po 25 mesecih?

2 točki

b) Kateri od njiju bo imel višjo mesečno štipendijo po 30 mesecih ter za koliko EUR in za koliko odstotkov?

4 točke

c) Izračunajte, koliko štipendije v EUR je prejel Jure v vseh treh letih?

1 točka

4. NALOGA

Kupujemo nov računalnik, ki stane 880,00 EUR. Odločimo se za varčevanje.

a) Koliko denarja moramo vložiti danes v banko, če želimo zbrati potrebni znesek v 5 letih? Banka uporablja 2,8-% letno obrestno mero in navadni obrestni račun. Izpeljite obrazec.

2 točki

b) V preteklih letih smo uspeli privarčevati 75 % potrebnega zneska. Po kakšni letni obrestni meri se mora obrestovati privarčevani znesek, da bomo računalnik lahko kupili čez 4 leta, če banka uporablja dekurzivno obrestno mero in obrestno obrestni račun z letnim pripisom obresti? Izpeljite obrazec.

3 točke

c) V kolikem času (let in dni) bi se privarčevani znesek podvojil v banki, ki uporablja obrestno obrestni račun, 3-% letno dekurzivno obrestno mero in celoletno kapitalizacijo?

2 točki

12. državno tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole
Murska Sobota, 4. april 2014

Prilepite nalepko s šifro

2. skupina: **Statistika**

N1	N2	N3	N4	Skupaj

Naloge rešujte samostojno. Za reševanje imate na voljo 120 minut.
Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog.

1. NALOGA

Tabela 1: **Prodaja obutve družbe *Čeveljček d. o. o.* po vrsti obutve in prodajalnah v letu 2012**

Vrsta obutve	**Količina v parih**		
	Prodajalna 1	**Prodajalna 2**	**Skupaj**
Otroška obutev	5.230	8.246	13.476
Moška obutev	3.425	5.324	8.749
Ženska obutev	8.212	9.544	17.756
Skupaj	**16.867**	**23.114**	**39.981**

Vir: Prirejeni podatki

a) Izračunajte strukturo prodaje obutve po vrsti obutve za obe prodajalni družbe *Čeveljček d. o. o.* v letu 2012 in jo izrazite v odstotkih *(na 2 decimalni mesti natančno).*

3 točke

Vrsta obutve	**Količina v parih**		
	Prodajalna 1	**Prodajalna 2**	**Skupaj**
Otroška obutev			
Moška obutev			
Ženska obutev			
Skupaj			

b) Za koliko odstotkov je bila prodaja ženske obutve v prodajalni 2 večja v primerjavi s prodajalno 1?

1 točka

c) Strukturo prodaje obutve po vrsti obutve za obe prodajalni družbe *Čeveljček d. o. o.* grafično prikažite s polkrogoma. Pri tem upoštevajte $r_A = 4$ cm in ustreza skupni prodaji prodajalne 1.

3 točke

2. NALOGA

Za proizvodni obrat *Luminia d. o. o*. so znani podatki o vrednosti prodaje in zaloge za prvo četrtletje leta 2012.

Tabela 2: **Vrednost prodaje in zaloge v proizvodnem obratu podjetja *Luminia d. o. o.* v prvem četrtletju leta 2012**

Mesec	**Vrednost prodaje v 1000 EUR**	**Verižni indeksi za vrednost prodaje**	**Vrednost zalog surovin ob koncu meseca v 1000 EUR**
Januar	-	-	64,1
Februar	172,5	-	92,2
Marec		104,6	84,7
April		106,7	76,2

Vir: Prirejeni podatki

Izračunajte ter dopolnite naslednje stavke z ustreznim odgovorom:

a) Na osnovi danih verižnih indeksov izračunajte vrednost prodanih proizvodov.

2 točki

b) Povprečno mesečno se zaloge obrnejo ________________________ - krat .

3 točke

c) Povprečni čas enega obrata v dnevih oz. povprečni čas skladiščenja blaga, če je število delovnih dni v mesecu 30, je ________________________ dni .

1 točka

d) V enem letu se zaloge v povprečju obrnejo (ocenite) ___________________ - krat.

1 točka

3. NALOGA

Tabela 3: **Verižni indeksi za izvoz Slovenije v letih od 2006 do 2011**

Leto	**Verižni indeksi za izvoz**	**Izvoz v milijonih EUR**	
2005	-		
2006	116,4		
2007	115,8	19.405,89	
2008	102,1		
2009	81,3		
2010	114,5		
2011	112,9		

Vir: Statistični letopis 2012

a) Zapišite vrednosti izvoza po letih.

2 točki

b) Izračunajte, kako se je spreminjal izvoz v posameznih letih glede na leto 2006.

2 točki

c) V katerem oz. v katerih letih je bil izvoz manjši v primerjavi z letom 2006?

1 točka

d) Koliko je znašala povprečna letna stopnjo rasti izvoza v obdobju od leta 2005 do 2011?

2 točki

4. NALOGA

Na neki šoli so opazovali 100 dijakov glede na oddaljenost od doma do šole (izraženo v km). Dobili so naslednje podatke:

- 8 % dijakov je oddaljenih nad 5 do 10 km;
- 41 dijakov je oddaljenih do 15 km;
- 24 dijakov je oddaljenih nad 15 do 20 km;
- 85 % dijakov je oddaljenih do 25 km;
- delež dijakov, ki so oddaljeni nad 25 do 30 km, znaša 0,100;
- noben dijak ni oddaljen od šole nad 35 km.

<u>Naloge:</u>

a) Sestavite frekvenčno porazdelitev dijakov glede na oddaljenost od doma do šole. Izračunajte relativne frekvence, kumulativo absolutnih in kumulativo relativnih frekvenc.

4 točke

b) Pri kateri oddaljenosti od doma do šole je bilo največ dijakov?

1 točka

c) Izračunajte najpogostejšo oddaljenost dijakov od doma do šole.

2 točki

Prilepi nalepko s šifro

Naloge

Naloge rešuj samostojno. Uporaba zapiskov in literature ni dovoljena.
Dovoljena je uporaba žepnega računala. Vsaka naloga je vredna 20 točk.
Za reševanje imaš na voljo 120 minut. Veliko uspeha!

N1	N2	N3	N4

1. V spodnji tabeli so zbrani podatki o številu kandidatov, ki so opravljali splošno maturo v letu 2013 iz posameznega predmeta, po doseženih ocenah.

   Kratice predmetov so SLO – slovenščina, ANG – angleščina in MAT – matematika.
   Oznaka (O) ob kratici pomeni opravljanje predmeta na osnovni ravni, oznaka (V) pa opravljanje predmeta na višji ravni. Slovenščino vsi kandidati opravljajo na višji ravni.

   Na višji ravni kandidat lahko doseže oceno od 1 do 8, na osnovni ravni pa oceno od 1 do 5. Ocena 1 je negativna, vse ostale ocene so pozitivne.

	8	7	6	5	4	3	2	1	Pozitivni	Št. kand.
SLO	170	525	788	1490	1387	1619	1774	441	7753	8194
ANG (O)	-	-	-	498	1938	1943	1142	266	5521	5787
ANG (V)	212	339	614	481	304	115	53	8	2118	2126
MAT (O)	-	-	-	744	1481	1724	1976	1043	5925	6968
MAT (V)	333	498	374	238	144	56	49	8	1692	1700

Vir: Letno poročilo – splošna matura 2013

   a) Kolikšen delež kandidatov je uspešno opravil angleščino na osnovni ravni in kolikšen delež na višji ravni? [4 točke]
   b) Izračunaj povprečno oceno, ki so jo dosegli kandidati pri slovenščini. Izračunaj tudi modus in mediano ter prvi in tretji kvartil. [8 točk]
   c) Izračunaj povprečno oceno μ in standardni odklon σ ocen pri matematiki na višji ravni. Kolikšen delež vseh kandidatov je dosegel oceno z intervala $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$? [8 točk]

   Rezultate (tudi v odstotnem zapisu) zaokroži na dve decimalni mesti, vmesne izračune pa na štiri decimalna mesta.

2. Na banki bomo najeli študentski kredit. Kredit bo izplačan v obliki triletne štipendije v višini 300 EUR na začetku vsakega meseca od oktobra 2014 do septembra 2017. Vračati ga bomo začeli tri leta po zaključku študija in ga vrnili v 24 enakih mesečnih obrokih od oktobra 2020 do septembra 2022 na koncu vsakega meseca.

   a) Določi višino mesečnega obroka, če je letna obrestna mera 6 %, kapitalizacija mesečna in obrestovanje konformno. [14 točk]

   b) Določi višino dolga tik pred plačilom prvega obroka. [6 točk]

   Rezultate zaokroži na dve decimalni mesti.

3. Spodnja preglednica prikazuje trenutne efektivne obrestne mere za različna dospetja z zveznim obrestovanjem. Čas t merimo v letih.

t	1	2
$R(0,t)$	3,50 %	3,80 %

Kuponska obveznica z nominalno vrednostjo 1000 EUR in dospetjem čez 2 leti izplačuje letne kupone po 4 % nominalni obrestni meri, prvega čez natanko eno leto.

a) Določi ceno obveznice v času 0. [6 točk]

b) Kako in za koliko bi se spremenila cena obveznice, če bi se vse obrestne mere povišale za 0,5 odstotne točke? [5 točk]

c) Za koliko odstotkov bi se spremenila cena obveznice, če bi se vse obrestne mere povišale za 0,5 odstotne točke? [2 točki]

d) *Donosnost do dospetja* obveznice je konstantna efektivna obrestna mera, pri kateri je sedanja vrednost vseh prihodnjih denarnih tokov, povezanih z obveznico, enaka trenutni ceni obveznice. Izračunaj donosnost do dospetja obveznice. (Uporabi ceno pri začetnih obrestnih merah.) [7 točk]

Rezultate (v evrih in odstotkih) zaokroži na dve decimalni mesti, vmesne izračune pa na štiri decimalna mesta.

4. Vlagatelj ima portfelj, ki sestoji iz dveh opcij na delnico podjetja Alfa, d. d. Prva opcija je evropska nakupna z izvršilno ceno K_1 in druga evropska prodajna z izvršilno ceno K_2. Obe imata isti čas zapadlosti $T = \frac{1}{4}$ leta. Podjetje v naslednjih treh mesecih ne bo izplačevalo dividend.

   a) Nariši graf vrednosti portfelja v odvisnosti od cene delnice S_T v času $T = \frac{1}{4}$, če sta izvršilni ceni enaki $K_1 = K_2 = 12$ EUR. [4 točke]

   b) Premija v času 0 za evropsko prodajno opcijo s $K_2 = 12$ EUR je 0,91 EUR. Kolikšna je premija za evropsko nakupno opcijo s $K_1 = 12$ EUR, če je vrednost delnice v času 0 enaka $11,90$ EUR in je netvegana obrestna mera enaka $R = 1\%$. [6 točk]

   c) Ob upoštevanju premij iz naloge b) nariši graf vlagateljevega dobička v odvisnosti od cene delnice S_T v času $T = \frac{1}{4}$. [3 točke]

   d) Ali je smiselno kupiti opisani portfelj iz točke a), kadar pričakujemo večje spremembe cen delnice podjetja Alfa (npr. izid določene tožbe proti podjetju bo objavljen čez tri mesece)? Zakaj?[3 točke]

   e) Nariši graf vrednosti portfelja v odvisnosti od cene delnice S_T v času $T = \frac{1}{4}$, če za izvršilni ceni velja $K_1 = 13$ EUR in $K_2 = 11$ EUR. [4 točke]

   Rezultate zaokroži na dve decimalni mesti.

List s formulami

Terminski posli

- na delnice brez dividend:
  $F_t = S_t(1+R)^{T-t}$, $K = F_0$,
  $V_t = (F_t - K)(1+R)^{-(T-t)}$.

- na delnice z dividendo:
  $F_t = S_t(1+R)^{T-t} - I_{t'}(1+R)^{T-t'}$, $K = F_0$,
  $V_t = (F_t - K)(1+R)^{-(T-t)}$.

- na vrednostni papir z znanim donosom:
  $F_t = S_t((\frac{1+R}{1+R_0})^{T-t}$, $K = F_0$,
  $V_t = (F_t - K)(1+R)^{-(T-t)}$.

- na devizni menjalni tečaj:
  $F_t = S_t(\frac{1+R_d}{1+R_f})^{T-t}$, $K = F_0$,
  $V_t = N(F_t - K)(1+R_d)^{-(T-t)}$,
  $V_t^1 = (F_t - K)(1+R_d)^{-(T-t)}$.

- dogovor o terminski obrestni meri:
  $K = R(0,S,T) = \frac{1}{T-S}\left(\frac{1+R(0,T)T}{1+R(0,S)S} - 1\right)$,
  $V_t = N(T-S)(R(t,S,T) - K) \cdot \frac{1}{1+R(t,T)(T-t)}$,
  $V_S = N \cdot (T-S) \cdot (R(S,T) - K) \cdot \frac{1}{1+R(S,T)(T-S)}$.

Opcije

- izplačilo:
  $C_T = \max\{S_T - K, 0\}$,
  $P_T = \max\{K - S_T, 0\}$.

- premija v času t, če osnovni vrednostni papir ne izplačuje dividend:
  $\max\{S_t - K \cdot (1+R)^{-(T-t)}, 0\} \leq c_t \leq S_t$,
  $\max\{K \cdot (1+R)^{-(T-t)} - S_t, 0\} \leq p_t \leq K \cdot (1+R)^{-(T-t)}$.

- evropska nakupno - prodajna enakost, če ni dividend:
  $p_t + S_t = c_t + K \cdot (1+R)^{-(T-t)}$.

- premija v času t, če osnovni vrednostni papir izplača dividendo:
  $\max\{S_t - K \cdot (1+R)^{-(T-t)} - I(t,T), 0\} \leq c_t \leq S_t$,
  $\max\{K \cdot (1+R)^{-(T-t)} - S_t + I(t,T), 0\} \leq p_t \leq K \cdot (1+R)^{-(T-t)}$.
  ($I(t,T)$ je vrednost v času t vseh dividend izplačanih od t do T.)

- evropska nakupno - prodajna enakost, če osnovni vrednostni papir izplača dividendo:
  $p_t + S_t = c_t + K \cdot (1+R)^{-(T-t)} + I(t,T)$,

List s formulami

Terminski posli

- na delnice brez dividend:
  $F_t = S_t(1+R)^{T-t}$, $K = F_0$,
  $V_t = (F_t - K)(1+R)^{-(T-t)}$.
- na delnice z dividendo:
  $F_t = S_t(1+R)^{T-t} - I_{t'}(1+R)^{T-t'}$, $K = F_0$,
  $V_t = (F_t - K)(1+R)^{-(T-t)}$.
- na vrednostni papir z znanim donosom:
  $F_t = S_t((\frac{1+R}{1+R_0})^{T-t}$, $K = F_0$,
  $V_t = (F_t - K)(1+R)^{-(T-t)}$.
- na devizni menjalni tečaj:
  $F_t = S_t(\frac{1+R_d}{1+R_f})^{T-t}$, $K = F_0$,
  $V_t = N(F_t - K)(1+R_d)^{-(T-t)}$,
  $V_t^1 = (F_t - K)(1+R_d)^{-(T-t)}$.
- dogovor o terminski obrestni meri:
  $K = R(0,S,T) = \frac{1}{T-S}\left(\frac{1+R(0,T)T}{1+R(0,S)S} - 1\right)$,
  $V_t = N(T-S)(R(t,S,T) - K) \cdot \frac{1}{1+R(t,T)(T-t)}$,
  $V_S = N \cdot (T-S) \cdot (R(S,T) - K) \cdot \frac{1}{1+R(S,T)(T-S)}$.

Opcije

- izplačilo:
  $C_T = \max\{S_T - K, 0\}$,
  $P_T = \max\{K - S_T, 0\}$.
- premija v času t, če osnovni vrednostni papir ne izplačuje dividend:
  $\max\{S_t - K \cdot (1+R)^{-(T-t)}, 0\} \leq c_t \leq S_t$,
  $\max\{K \cdot (1+R)^{-(T-t)} - S_t, 0\} \leq p_t \leq K \cdot (1+R)^{-(T-t)}$.
- evropska nakupno - prodajna enakost, če ni dividend:
  $p_t + S_t = c_t + K \cdot (1+R)^{-(T-t)}$.
- premija v času t, če osnovni vrednostni papir izplača dividendo:
  $\max\{S_t - K \cdot (1+R)^{-(T-t)} - I(t,T), 0\} \leq c_t \leq S_t$,
  $\max\{K \cdot (1+R)^{-(T-t)} - S_t + I(t,T), 0\} \leq p_t \leq K \cdot (1+R)^{-(T-t)}$.
  ($I(t,T)$ je vrednost v času t vseh dividend izplačanih od t do T.)
- evropska nakupno - prodajna enakost, če osnovni vrednostni papir izplača dividendo:
  $p_t + S_t = c_t + K \cdot (1+R)^{-(T-t)} + I(t,T)$,

12. državno tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole
Murska Sobota, 4. april 2014

1. skupina: **Poslovna matematika - rešitve**

1. NALOGA

30 tekstilnih delavk je tri tedne in dva dni tkalo na 14 tekstilnih strojih 78 kosov zaves dolžine 2 metra in širine 12 metrov. Tkale so po 8 ur na dan.

a) Kakšna bo dolžina 70 kosov zaves, ki bodo za tretjino širše, če bo odšlo 20 % delavk na dopust, ostale pa bodo delale s 4 stroji več, en teden dlje ter po ¼ daljšem delavniku? Pri izračunu upoštevaj: *1 teden = 7 dni.*

5 točk

30 delavk	23 dni	14 stroji	78 kosov	2 m (d)	12 m (š)	8 ur
↑	↑	↑	↓	↑	↓	↑
24 delavk	30 dni	18 stroji	70 kosov	x m (d)	16 m (š)	10 ur

$$x = \frac{2 \times 24 \times 30 \times 18 \times 78 \times 12 \times 10}{30 \times 23 \times 14 \times 70 \times 16 \times 8} = \underline{\mathbf{2{,}80\ m\ (d)}}$$

3 točke – zapis podatkov (sklepna shema, sorazmerje)=> (5 * 0,3 točke)
in določitev vrste sorazmerij (6 * 0,25 točke)

1 točka – zapis ulomka

1 točka – rezultat in odgovor

b) Za koliko odstotkov bodo zavese druge skupine s 24 delavkami daljše oziroma krajše od prve skupine s 30 delavkami?

2 točki

2 m (d)	……………..	100 %		2 m (d)	………	100 %
0,80 m(d)	……………..	x %	ALI	2,80 m(d)	………	x %

$$x = \frac{0{,}80 \times 100}{2} = \underline{\mathbf{40\ \%}}$$

$$x = \frac{2{,}80 \times 100}{2} = \underline{\mathbf{140\ \%}}$$

1 točka nastavitev (sklepne sheme, enačbe…)

1 točka izračun odstotka in odgovor

2. NALOGA

Slovenski pridelovalec medu izvozi vsako leto 850 kg medu. V Avstrijo izvozi 50 kg medu več kot v Italijo.

Avstrijci so mu naročili cvetlični, akacijev in kostanjev med v razmerju 3 : 2 : 1. Italijani pa 150 kg več akacijevega kot cvetličnega medu in 200 kg manj kostanjevega kot akacijevega medu.

Izpolnite spodnjo tabelo in odgovorite.

Vrsta medu	Avstrijski kupec	Italijanski kupec	Skupaj v kg
Cvetlični	225	100	325
Akacijev	150 1 t	250 1 t	400 1 t
Kostanjev	75	50	125
Skupaj v kg	450	400	850

Za koliko odstotkov je izvozil slovenski pridelovalec medu več cvetličnega kot (od) kostanjevega medu?

7 točk

Kupec	**Deleži**	**Odgovor**
Avstrijski	x + 50	450 kg
Italijanski	x	400 kg 1 t

$$x + 50 + x = 850$$
$$x = 400$$

Avstrijski kupec

$3x + 2x + x = 450$

$\underline{x = 75}$ 1 t

Italijanski kupec

Cvetlični	x	
Akacijev	x + 150	
Kostanjev	x – 50 ali x +150 – 200	1 t
3 x – 100 =	400	
x =	**100**	

1 točka nastavitev enačbe, izračun x in skupne količine za avstrijskega in italijanskega kupca
1 točka nastavitev enačbe in izračun x za avstrijskega kupca
1 točka nastavitev enačbe in izračun x za italijanskega kupca
1 točka izračun delne količine medu za avstrijskega kupca (zapis v tabeli)
1 točka izračun delne količine medu za italijanskega kupca (zapis v tabeli)
1 točka izračun skupne količine cvetličnega, akacijevega in kostanjevega medu
1 točka izračun % izvoza (➔ za 160 % oz. 200 kg več cvetličnega kot kostanjevega) in odgovor

% izvoza $= \frac{325 \times 100}{125} =$ **<u>260 %</u>** Odgovor = **<u>160 %</u>** **1 točka**

3. NALOGA

Jure in Nina sta imela na začetku študija enaki mesečni štipendiji, vsak po 202,00 EUR. Višina štipendije se jima je povečevala vsakih 12 mesecev, in sicer Juretu za 8 %, Nini pa za 16,50 EUR.

a) Kolikšno mesečno štipendijo bo imel Jure po 25 mesecih?

2 točki

Izračun štipendije za Jureta s koeficienti: 202,00 * 1,08 * 1,08 = **235,61 EUR** ali po korakih za prvo: 202,00*1,08 = 218,16 €; za drugo 218,16*1,08 = **235,61 EUR**

1 točka izračun koeficientov in nastavitev enačbe ali izračun štipendije po korakih

1 točka izračun višine štipendije za Jureta po 25 mesecih

b) Kateri od njiju bo imel višjo mesečno štipendijo po 30 mesecih ter za koliko EUR in za koliko odstotkov?

4 točke

Jure: 235,61 €
Nina: 202,00 € + 16,50 € (za prvo leto) + 16,50 € (za drugo leto) = **235,00 EUR**
Jure ima višjo štipendijo za **0,61 EUR,** kar predstavlja **0,26 %.**

1 točka izračun mesečne višine štipendije za Nino po 30 mesecih
2 točki izračun deleža v EUR in izraz v odstotkih
1 točka odgovor

c) Izračunajte, koliko štipendije v EUR je prejel Jure v vseh treh letih?

1 točka

Σ vsota štipendij = (202,00*12) + (218,16*12) + (235,61*12) = **7.869,24 EUR**

1 točka izračun Σ vsote Juretove štipendije za tri leta

4. NALOGA

Kupujemo nov računalnik, ki stane 880,00 EUR. Odločimo se za varčevanje.

a) Koliko denarja moramo vložiti danes v banko, če želimo zbrati potrebni znesek v 5 letih? Banka uporablja 2,8-% letno obrestno mero in navadni obrestni račun. Izpeljite obrazec.

2 točki

$G^{+} = 880{,}00$ EUR
$l = 5$ let
$p = 2{,}8$-%
$G = ?$

$G^{+} = G + o$

$$G^{+} = G + \frac{G \times p \times l}{100}$$

$$G^{+} = G \times \left(1 + \frac{p \times l}{100}\right)$$

$$880{,}00 = G \times \left(1 + \frac{2{,}8 \times 5}{100}\right)$$

$\underline{G = 771{,}93 \text{ EUR}}$

1 točka izpeljava obrazca za izračun G iz $G^{+\,i}$ in nastavitev

1 točka izračun glavnice

b) V preteklih letih smo uspeli privarčevati 75 % potrebnega zneska. Po kakšni letni obrestni meri se mora obrestovati privarčevani znesek, da bomo računalnik lahko kupili čez 4 leta, če banka uporablja dekurzivno obrestno mero in obrestno obrestni račun z letnim pripisom obresti? Izpeljite obrazec.

3 točke

$G_0 = 660{,}00$ EUR ➔ ($880{,}00 \times 0{,}75 = 660{,}00$ EUR)
$G_n = 880{,}00$ EUR
$n = 4$ leta
$m = 1$

p. a. = x %
Izračun (eden izmed možnih), lahko tudi po lastni presoji:

$G_n = G_0 \times r^n \,/ : G_0$

$$r^n = \frac{G_n}{G_0}$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}}$$

$$r = \sqrt[4]{\frac{880{,}00}{660{,}00}}$$

$\underline{r = 1{,}074569932}$

p. a. = $(r - 1) \times 100 = 7{,}4569932$ %
p. a. = 7,46 %

1 točka izračun privarčevanega zneska

1 točka izpeljava obrazca za p. a. in nastavitev računa

1 točka izračun odstotka letne obrestne mere

c) V kolikem času (let in dni) bi se privarčevani znesek podvojil v banki, ki uporablja obrestno obrestni račun, 3-% letno dekurzivno obrestno mero in celoletno kapitalizacijo?

2 točki

$G_n = 2 \times G_0$
p = 3 % p. a.
m = 1
n = x let, dni

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}03}$$

n = 23,44977225 let **= 23,45 let**
n = 23 let 164 dni

1 točka nastavitev računa

1 točka izračun časa obrestovanja in zapis rezultata mnogoimensko

2. skupina: **Statistika - rešitve**

1. NALOGA

Tabela 1: **Prodaja obutve družbe *Čeveljček d. o. o.* po vrsti obutve in prodajalnah v letu 2012**

Vrsta obutve	Količina v parih		
	Prodajalna 1	**Prodajalna 2**	**Skupaj**
Otroška obutev	5.230	8.246	13.476
Moška obutev	3.425	5.324	8.749
Ženska obutev	8.212	9.544	17.756
Skupaj	**16.867**	**23.114**	**39.981**

Vir: Prirejeni podatki

a) Izračunajte strukturo prodaje obutve po vrsti obutve za obe prodajalni družbe *Čeveljček d. o. o.* v letu 2012 in jo izrazite v odstotkih *(na 2 decimalni mesti natančno).*

3 točke

Izračunani odstotki:

Vrsta obutve	Količina v parih		
	Prodajalna 1	**Prodajalna 2**	**Skupaj**
Otroška obutev	31,01	35,68	33,71
Moška obutev	20,30	23,03	21,88
Ženska obutev	48,69	41,29	44,41
Skupaj	**100,00**	**100,00**	**100,00**

b) Za koliko odstotkov je bila prodaja ženske obutve v prodajalni 2 večja v primerjavi s prodajalno 1?

1 točka

$$I_{Ž,2/1} = \frac{9544}{8212} \cdot 100 = 116{,}22 \qquad D_{Ž,2/1}\% = 116{,}22 - 100 = 16{,}22\%$$

Prodaja ženske obutve je bila v prodajalni 2 za 16,22 % večja kot v prodajalni 1.

c) Strukturo prodaje obutve po vrsti obutve za obe prodajalni družbe *Čeveljček d. o. o.* grafično prikažite s polkrogoma. Pri tem upoštevajte r_A = 4 cm in ustreza skupni prodaji prodajalne 1.

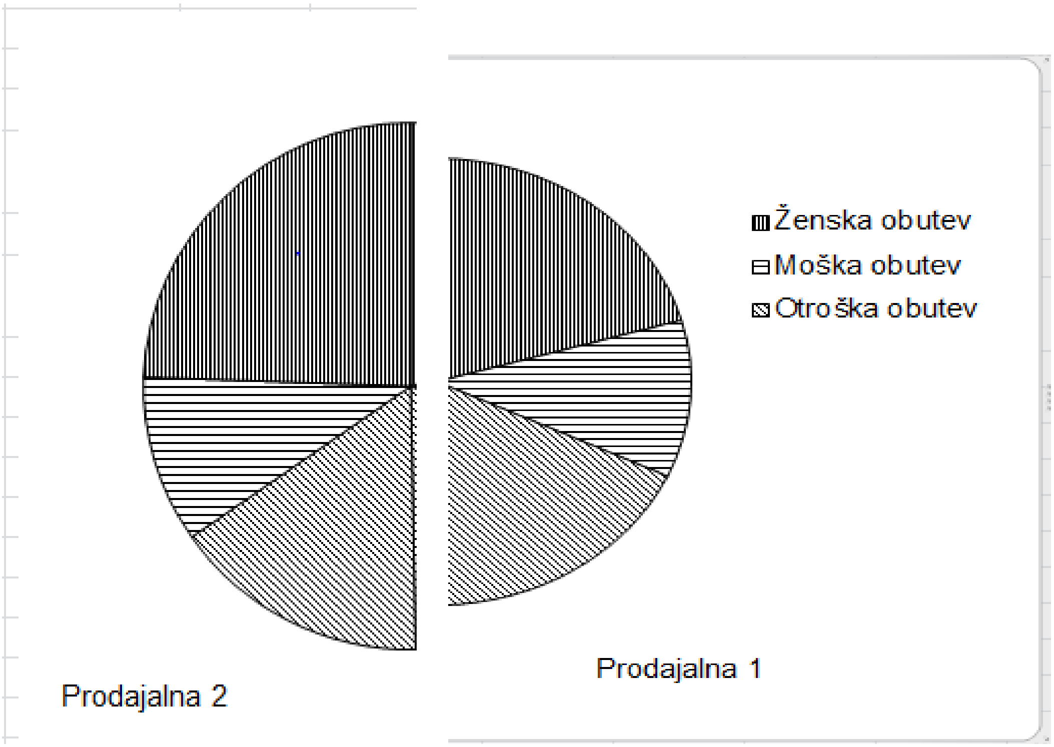
3 točke

Izračunane stopinje:

Vrsta obutve	Količina v parih	
	Prodajalna 1	**Prodajalna 2**
Otroška obutev	56	64
Moška obutev	36	42
Ženska obutev	88	74
Skupaj	**180**	**180**

Izračun polmera za prodajalno 2:

$$r_2 = r_1 \times \sqrt{\frac{Y_2}{Y_1}} = 4 \times \sqrt{\frac{23.114}{16.867}} = 4,7$$



2. NALOGA

Za proizvodni obrat *Luminia d. o. o*. so znani podatki o vrednosti prodaje in zaloge za prvo četrtletje leta 2012.

Tabela 2: **Vrednost prodaje in zaloge v proizvodnem obratu podjetja *Luminia d. o. o.* v prvem četrtletju leta 2012**

Mesec	Vrednost prodaje v 1000 EUR	Verižni indeksi za vrednost prodaje	Vrednost zalog surovin ob koncu meseca v 1000 EUR
Januar	-	-	64,1
Februar	172,5	-	92,2
Marec	**180,44**	104,6	84,7
April	**192,52**	106,7	76,2

Vir: Prirejeni podatki

Izračunajte ter dopolnite naslednje stavke z ustreznim odgovorom:

a) Na osnovi danih verižnih indeksov izračunajte vrednost prodanih proizvodov.

2 točki

b) Povprečno mesečno se zaloge obrnejo **2,21-krat**.

$$Povpr.\ mesečna\ prodaja = \bar{Y} = \frac{1}{3}(172,5 + 180,4 + 192,5) = 181,82\ tisoč\ evrov$$

3 točke

$$Povpr.\ mesečna\ zaloga = \bar{X} = \frac{1}{3}\left(\frac{64,1}{2} + 92,2 + 84,7 + \frac{76,2}{2}\right) = 82,35\ tisoč\ evrov$$

$$K_{obr.\ zalog} = \frac{povprečna\ mesečna\ vrednost\ prodaje}{povprečna\ mesečna\ vrednost\ zaloge} \times čas = \frac{181,8\ tisoč\ EUR}{82,4\ tisoč\ EUR} \times 1 = 2,21\text{-}krat$$

c) Povprečni čas enega obrata v dnevih oz. povprečni čas skladiščenja blaga, če je število delovnih dni v mesecu 30, je **13,59 dni** .

$$K_{rec} = \frac{povprečna\ mesečna\ vr.\ zaloge}{povprečna\ mesečna\ vr.\ prodaje} \times 30\ (dni) = \frac{82,35\ tisoč\ EUR}{181,82\ tisoč\ EUR} \times 30 = 13,59\ dneva$$

1 točka

d) V enem letu se zaloge v povprečju obrnejo (ocenite) **26,49-krat**.

Letno: 2,2 × 12 = 26,49-krat

1 točka

3. NALOGA

Tabela 3: **Verižni indeksi za izvoz Slovenije v letih od 2006 do 2011**

Leto	**Verižni indeksi za izvoz**	**Izvoz v milijonih EUR**	$I_{j/2006}$
2005	-	**14397,00**	**85,91**
2006	116,4	**16758,11**	**100,00**
2007	115,8	19.405,89	**115,80**
2008	102,1	**19813,41**	**118,23**
2009	81,3	**16108,31**	**96,12**
2010	114,5	**18444,01**	**110,06**
2011	112,9	**20823,29**	**124,26**

Vir: Statistični letopis 2012

a) Zapišite količine izvoza po letih.

2 točki

b) Izračunajte, kako se je spreminjal izvoz v posameznih letih glede na leto 2006.

2 točki

c) V katerem oz. v katerih letih je bil izvoz manjši v primerjavi z letom 2006?

1 točka

Izvoz je bil v letih 2005 in 2009 manjši v primerjavi z letom 2006.

d) Koliko je znašala povprečna letna stopnja rasti izvoza v obdobju od leta 2005 do 2011?

2 točki

$$\bar{V} = \sqrt[N]{V_1 \times V_2 \times V_3 \times \ldots V_N} = \sqrt[6]{116,4 \times 115,8 \times 102,1 \times 81,3 \times 114,5 \times 112,9} = 106,34$$

$$\bar{S} = \bar{V} - 100 = 106,34 - 100 = 6,34\,\%$$

Povprečna letna stopnja rasti izvoza v obdobju od leta 2005 do 2011 je znašala 6,34 %.

4. NALOGA

Na neki šoli so opazovali 100 dijakov glede na oddaljenost od doma do šole (izraženo v km). Dobili so naslednje podatke:

- 8 % dijakov je oddaljenih nad 5 do 10 km;
- 41 dijakov je oddaljenih do 15 km;
- 24 dijakov je oddaljenih nad 15 do 20 km;
- 85 % dijakov je oddaljenih do 25 km;
- delež dijakov, ki so oddaljeni nad 25 do 30 km, znaša 0,100;
- noben dijak ni oddaljen od šole nad 35 km.

Naloge:

a) Sestavite frekvenčno porazdelitev dijakov glede na oddaljenost od doma do šole. Izračunajte relativne frekvence, kumulativno absolutnih in kumulativo relativnih frekvenc.

4 točke

Oddaljenost od doma do šole v km	f_j	f_j^0	F_j	F_j^0
nad 5 do 10	8	0,080	8	0,080
nad 10 do 15	33	0,330	41	0,410
nad 15 do 20	24	0,240	65	0,650
nad 20 do 25	20	0,200	85	0,850
nad 25 do 30	10	0,100	95	0,950
nad 30 do 35	5	0,050	100	1,000
SKUPAJ	**100**	**1,000**		

b) Pri kateri oddaljenosti od doma do šole je bilo največ dijakov?

1 točka

Največ dijakov je bilo oddaljenih nad 10 do 15 kilometrov.

c) Izračunajte najpogostejšo oddaljenost dijakov od doma do šole.

2 točki

Modalni razred: nad 10 do 15 km *(j = 2)*

$$Mo = 10{,}0 + 5 \times \frac{33-8}{2\times 33-8-24} = 13{,}68\ km$$

Najpogostejša oddaljenost dijakov od doma do šole je bila 13,68 kilometra.

Državno tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike

4. april 2014

Rešitve in točkovnik

Točke z zvezdico so postopkovne točke in jih tekmovalec dobi tudi ob prenosu napake. Točke brez zvezdice tekmovalec dobi le ob popolnem ujemanju rezultatov z objavljenimi rešitvami.

1. V spodnji tabeli so zbrani podatki o številu kandidatov, ki so opravljali splošno maturo v letu 2013 iz posameznega predmeta, po doseženih ocenah.

   Kratice predmetov so SLO – slovenščina, ANG – angleščina in MAT – matematika. Oznaka (O) ob kratici pomeni opravljanje predmeta na osnovni ravni, oznaka (V) pa opravljanje predmeta na višji ravni. Slovenščino vsi kandidati opravljajo na višji ravni.

   Na višji ravni kandidat lahko doseže oceno od 1 do 8, na osnovni ravni pa oceno od 1 do 5. Ocena 1 je negativna, vse ostale ocene so pozitivne.

	8	7	6	5	4	3	2	1	Pozitivni	Št. kand.
SLO	170	525	788	1490	1387	1619	1774	441	7753	8194
ANG (O)	-	-	-	498	1938	1943	1142	266	5521	5787
ANG (V)	212	339	614	481	304	115	53	8	2118	2126
MAT (O)	-	-	-	744	1481	1724	1976	1043	5925	6968
MAT (V)	333	498	374	238	144	56	49	8	1692	1700

Vir: Letno poročilo – splošna matura 2013

V nalogi rezultate (tudi v odstotnem zapisu) zaokroži na dve decimalni mesti, vmesne izračune pa na štiri decimalna mesta.

a) Kolikšen delež kandidatov je uspešno opravil angleščino na osnovni ravni in kolikšen delež na višji ravni? [4 točke]

Rešitev

Na osnovni ravni je bilo uspešnih $\frac{5521}{5787} = 95{,}40\,\%$ kandidatov, na višji pa $\frac{2118}{2126} = 99{,}62\,\%$.

Točkovanje

Vsak pravilen odgovor 2 točki.
Samo za navedbo dela in ne deleža tekmovalec prejme po 1 točko za vsak del.

b) Izračunaj povprečno oceno, ki so jo dosegli kandidati pri slovenščini. Izračunaj tudi modus in mediano ter prvi in tretji kvartil. [8 točk]

Rešitev

Povprečna ocena je tehtana aritmetična sredina

$$\mu = \frac{170 \cdot 8 + \cdots + 441 \cdot 1}{8194} \doteq 3{,}86.$$

Modus ocen je Mo = 2.

Frekvence f_k, kumulativne frekvence F_k in kumulativne relativne frekvence F_k^0 po ocenah prikazuje spodnja tabela. Kumulativi pripadajo naraščajočim ocenam.

Ocena	1	2	3	4	5	6	7	8
f_k	441	1774	1619	1387	1490	788	525	170
F_k	441	2215	3834	5221	6711	7499	8024	8194
F_k^0	0,0538	0,2703	0,4679	0,6372	0,8190	0,9152	0,9793	1,0000

Mediana ocen je Me = 4.
Prvi kvartil je $Q_1 = 2$, tretji kvartil je $Q_3 = 5$.

Točkovanje

Povprečna ocena 1+1 točka.*

Modus 2 točki.

Mediana 2 točki in kvartila 1+1 točka.

Za izračun kumulativnih relativnih frekvenc brez Me, Q_1 in Q_3 tekmovalec prejme 2 točki. Za pravilno mediano in kvartila brez utemeljitve tekmovalec prejme 2 točki. Upoštevamo tudi padajoče urejene ocene.

c) Izračunaj povprečno oceno μ in standardni odklon σ ocen pri matematiki na višji ravni. Kolikšen delež vseh kandidatov je dosegel oceno z intervala $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$? [8 točk]

Rešitev

Povprečna ocena je tehtana aritmetična sredina

$$\mu = \frac{333 \cdot 8 + \cdots + 8 \cdot 1}{1700} \doteq 6{,}1376 \doteq 6{,}14.$$

Disperzija je

$$\sigma^2 = \frac{333 \cdot 8^2 + \cdots + 8 \cdot 1^2}{1700} - 6{,}1376^2 \doteq 2{,}4116.$$

Standardni odklon je

$$\sigma = \sqrt{2{,}4116} \doteq 1{,}5529 \doteq 1{,}55.$$

Na intervalu $[\mu - \sigma, \mu + \sigma] = [4'58, 7'69]$ so ocene 5, 6 in 7. Te ocene je doseglo 1110 kandidatov, kar pomeni 65,29 % vseh kandidatov, ki so pisali matematiko na višji ravni.

Točkovanje

Povprečna ocena 1+1 točka.*

Standardni odklon 2+1 točka.*

Ugotovljeni meji intervala $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ 1 točka.*

Delež kandidatov 2 točki.*

Samo za določitev števila kandidatov tekmovalec dobi 1 točko.

Postopkovne točke tekmovalec dobi, če navede obrazce za opisovanje tehtanih podatkov. Obrazci za netehtano povprečje, . . . ne prinesejo točk.

2. Na banki bomo najeli študentski kredit. Kredit bo izplačan v obliki triletne štipendije v višini 300 EUR na začetku vsakega meseca od oktobra 2014 do septembra 2017. Vračati ga bomo začeli tri leta po zaključku študija in ga vrnili v 24 enakih mesečnih obrokih od oktobra 2020 do septembra 2022 na koncu vsakega meseca.

   V nalogi rezultate v evrih zaokroži na dve decimalni mesti.

   a) Določi višino mesečnega obroka, če je letna obrestna mera 6 %, kapitalizacija mesečna in obrestovanje konformno. [14 točk]

   Rešitev

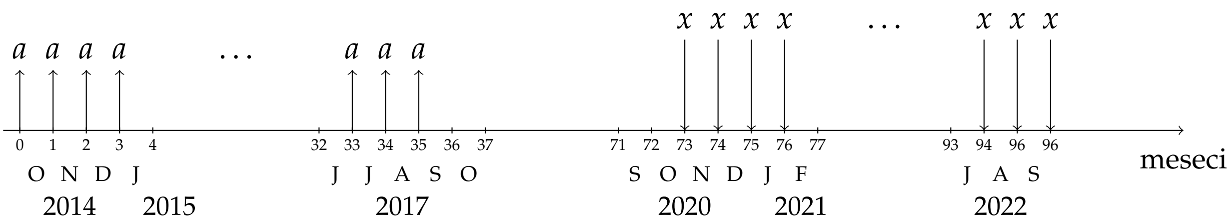
   Letna obrestna mera je $p\,\% = 6\,\%$.

   Mesečni obrestovalni faktor je $r = \sqrt[12]{1{,}06}$.

   Redukcijski termin postavimo čez 8 let, to je konec septembra 2022.

   Višina štipendije je $a = 300$ EUR, višina obroka vračila je x in ni znana.

   Shema denarnih tokov:



   Načelo ekvivalence glavnic: Izplačila in vplačila preračunamo na redukcijski termin.

$$ar^{96} + ar^{95} + \cdots + ar^{62} + ar^{61} = xr^{23} + xr^{22} + \cdots + xr + x$$
$$ar^{61}(r^{35} + r^{34} + \cdots + r + 1) = x(r^{23} + r^{22} + \cdots + r + 1)$$
$$ar^{61} \cdot \frac{r^{36} - 1}{r - 1} = x \cdot \frac{r^{24} - 1}{r - 1}$$

   Izrazimo

$$x = ar^{61} \cdot \frac{r^{36} - 1}{r^{24} - 1} = 300\left(\sqrt[12]{1{,}06}\right)^{61} \frac{1{,}06^3 - 1}{1{,}06^2 - 1} = 623{,}46 \text{ EUR}.$$

   Točkovanje

   Shema denarnih tokov (oz. razumevanje naloge) 3 točke.

   Mesečni obrestovalni faktor 2 točki.

   Enačba na osnovi ekvivalence glavnic 2 točki.*

   Vsota geometrijske vrste 2 točki.*

   Razrešitev enačbe za x in rezultat 2+3 točke.*

   Točke tekmovalec prejme tudi, če račun zapiše pod nalogo (b). Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravi rešitvi.

b) Določi višino dolga tik pred plačilom prvega obroka. [6 točk]

Rešitev

Višina dolga G tik pred plačilom prvega obroka (konec oktobra 2020) je enaka obrestovani vrednosti prejetih štipendij.

$$
\begin{aligned}
G &= ar^{73} + ar^{72} + \cdots + ar^{39} + ar^{38} = \\
&= ar^{38}(r^{35} + r^{34} + \cdots + r + 1) = \\
&= ar^{38} \cdot \frac{r^{36} - 1}{r - 1} = \\
&= 300\left(\sqrt[12]{1{,}06}\right)^{38} \frac{1{,}06^{3} - 1}{\sqrt[12]{1{,}06} - 1} = 14\,158{,}52 \text{ EUR}
\end{aligned}
$$

Točkovanje

Uporaba ekvivalence glavnic 3 točke.*
Rezultat 3 točke.

3. Spodnja preglednica prikazuje trenutne efektivne obrestne mere za različna dospetja z zveznim obrestovanjem. Čas t merimo v letih.

t	1	2
$R(0,t)$	3,50 %	3,80 %

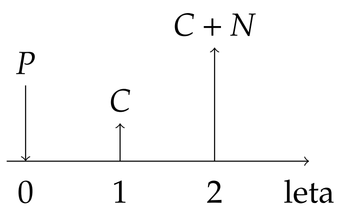
Kuponska obveznica z nominalno vrednostjo 1000 EUR in dospetjem čez 2 leti izplačuje letne kupone po 4 % nominalni obrestni meri, prvega čez natanko eno leto.

V nalogi rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti, vmesne izračune pa na štiri decimalna mesta.

a) Določi ceno obveznice v času 0. [6 točk]

Rešitev

Nominalna vrednost obveznice je $N = 1000$ EUR, dospetje $T = 2$.
Nominalna obrestna mera obveznice je $c = 4\,\%$.
Letna kupona sta $C = c \cdot N = 40$ EUR.



Ceno obveznice v času 0 določimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.

$$
\begin{aligned}
P &= C \cdot D(0,1) + (C + N) \cdot D(0,2) = \\
&= \frac{C}{1 + R(0,1)} + \frac{C + N}{(1 + R(0,2))^2} = \\
&= \frac{40}{1{,}035} + \frac{1040}{1{,}038^2} = 1003{,}89 \text{ EUR}
\end{aligned}
$$

Točkovanje

Shema denarnih tokov in njihove vrednosti (oz. razumevanje obveznice) 1 točka.

Formula za vrednotenje obveznic, usklajena z besedilom naloge, 2 točki.*

Pravilno računanje diskontnih faktorjev 1 točka.

Cena obveznice 1+1 točka.*

Samo za zapis formule za vrednotenje obveznic tekmovalec prejme 1 točko.

b) Kako in za koliko bi se spremenila cena obveznice, če bi se vse obrestne mere povišale za 0,5 odstotne točke? [5 točk]

Rešitev

Če bi se obrestne mere povišale za 0,5 odstotne točke, bi znašale

t	1	2
$R'(0,t)$	4,00 %	4,30 %

Pri novih obrestnih merah ponovimo račun iz a) in dobimo

$$\begin{aligned} P &= C \cdot D'(0,1) + (C+N) \cdot D'(0,2) = \\ &= \frac{C}{1+R'(0,1)} + \frac{C+N}{(1+R'(0,2))^2} = \\ &= \frac{40}{1{,}04} + \frac{1040}{1{,}043^2} = 994{,}48 \text{ EUR} \end{aligned}$$

Cena obveznice bi se znižala za 9,42 EUR.

Točkovanje

Novi obrestni meri 1 točka.

Formula za vrednotenje obveznice, usklajena z besedilom naloge, 1 točka.*

Nova cena obveznice 1 točka.*

Smer ('se zniža') in višina spremembe ('9,42 EUR') 2 točka.*

Upoštevamo tudi rešitev s povišanim kuponom.

c) Za koliko odstotkov bi se spremenila cena obveznice, če bi se vse obrestne mere povišale za 0,5 odstotne točke? [2 točki]

Rešitev

Cena obveznice bi se spremenila za $\frac{9{,}42}{1003{,}89} = 0{,}94\%$.

Točkovanje

Rezultat 2 točki.*

d) *Donosnost do dospetja* obveznice je konstantna efektivna obrestna mera, pri kateri je sedanja vrednost vseh prihodnjih denarnih tokov, povezanih z obveznico, enaka trenutni ceni obveznice. Izračunaj donosnost do dospetja obveznice. (Uporabi ceno pri začetnih obrestnih merah.) [7 točk]

Rešitev

Označimo z R iskano donosnost do dospetja.
Formula za vredotenje obveznice

$$P = C \cdot D(0,1) + (C+N) \cdot D(0,2)$$

nam da enačbo

$$P = \frac{C}{1+R} + \frac{C+N}{(1+R)^2}.$$

Definiramo $x = \frac{1}{1+R}$ ter vstavimo podatke in dobimo

$$1003{,}89 = 40x + 1040x^2.$$

Kvadratna enačba ima rešitvi

$$\begin{aligned} x_1 &= -1{,}0019 \\ x_2 &= 0{,}9634 \end{aligned}$$

Prva rešitev ni smiselna, iz druge pa izračunamo

$$R = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{0{,}9634} - 1 = 3{,}80\,\%.$$

Donosnost do dospetja znaša 3,80 %.

Točkovanje

Formula za vrednotenje obveznice, usklajena z besedilom naloge, 1+1 točka.*
Pretvorba na kvadratno enačbo 2 točki.*
Rešitvi kvadratne enačbe 1+1 točka.*
Donosnost do dospetja 1 točka.

4. Vlagatelj ima portfelj, ki sestoji iz dveh opcij na delnico podjetja Alfa, d. d. Prva opcija je evropska nakupna z izvršilno ceno K_1 in druga evropska prodajna z izvršilno ceno K_2. Obe imata isti čas zapadlosti $T = \frac{1}{4}$ leta. Podjetje v naslednjih treh mesecih ne bo izplačevalo dividend.

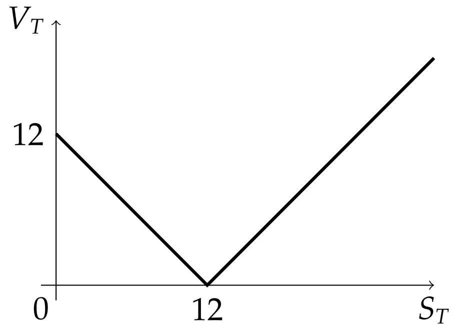
   a) Nariši graf vrednosti portfelja v odvisnosti od cene delnice S_T v času $T = \frac{1}{4}$, če sta izvršilni ceni enaki $K_1 = K_2 = 12$ EUR. [4 točke]

   Rešitev

   Označimo vrednost/izplačilo portfelja z V_T.
   Vsota vrednosti/izplačil obeh opcij v času T je enaka

$$\begin{aligned} V_T &= \max\{S_T - 12, 0\} + \max\{12 - S_T, 0\} = \\ &= \max\{S_T - 12, 12 - S_T\} = \\ &= |S_T - 12|. \end{aligned}$$

Graf funkcije $V_T(S_T)$ je na spodnji sliki.



Izplačilo portfelja opcij z isto izvršilno ceno 12.

Točkovanje

Izplačili posameznih opcij (oz. razumevanje opcij) 2 točki.

Graf vrednosti portfelja z ustreznimi oznakani 2 točki.

b) Premija v času 0 za evropsko prodajno opcijo s $K_2 = 12$ EUR je 0,91 EUR. Kolikšna je premija za evropsko nakupno opcijo s $K_1 = 12$ EUR, če je vrednost delnice v času 0 enaka $11,90$ EUR in je netvegana obrestna mera enaka $R = 1\%$.
Rezultat zaokroži na dve decimalni mesti. [6 točk]

Rešitev

Naj bosta c_0 in p_0 premiji evropske nakupne in prodajne opcije.
Neznano premijo izračunamo iz evropske nakupno-prodajne enakosti v času 0

$$p_0 + S_0 = c_0 + K \cdot (1 + R)^{-T}.$$

Podano imamo $p_0 = 0{,}91$ EUR, $S_0 = 11{,}90$ EUR, $K = 12$ EUR in $R = 0{,}01$.
Dobimo

$$c_0 = p_0 + S_0 - K \cdot (1 + R)^{-T} = 0{,}91 + 11{,}90 - 12 \cdot 1{,}01^{-\frac{1}{4}} = 0{,}84 \text{ EUR}.$$

Točkovanje

Navedba evropske nakupno-prodajne enakosti 2 točki.

Uskladitev enakosti s podatki (cene, dividende) 1+1 točka.*

Izrazitev in izračun premije nakupne opcije 1+1 točka.*

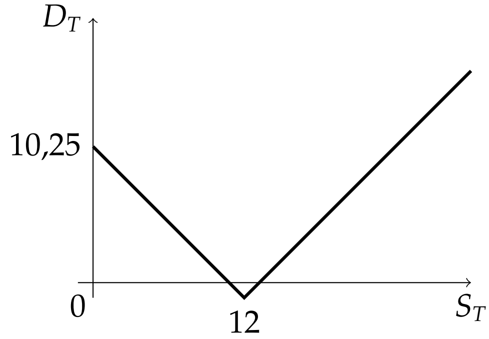
c) Ob upoštevanju premij iz naloge b) nariši graf vlagateljevega dobička v odvisnosti od cene delnice S_T v času $T = \frac{1}{4}$. [3 točke]

Rešitev

Dobiček D_T je enak razliki med vrednostjo portfelja V_T ob zapadlosti opcij in vsoto premij, ki smo jih za opciji plačali v času 0.

$$\begin{aligned} D_T &= V_T - p_0 - c_0 = \\ &= |S_T - 12| - 1{,}75. \end{aligned}$$

Graf funkcije $D_T(S_T)$ je na spodnji sliki.



Dobiček portfelja opcij z isto izvršilno ceno 12.

Točkovanje

Graf dobička portfelja (premik navzdol) z ustreznimi oznakami 2+1 točka.*
Upoštevamo tudi rešitev z obrestovanimi premijami.

d) Ali je smiselno kupiti opisani portfelj iz točke a), kadar pričakujemo večje spremembe cen delnice podjetja Alfa (npr. izid določene tožbe proti podjetju bo objavljen čez tri mesece)? Zakaj? [3 točke]

Rešitev

Portfelj nakupne in prodajne opcije je smiselno kupiti, kadar pričakujemo spremembo cene delnice, ne vemo pa, v katero smer se bo ta spremenila. Večja, ko je sprememba cene delnice, večji je naš dobiček.

Točkovanje

Odgovor in obrazložitev 1+2 točki.*

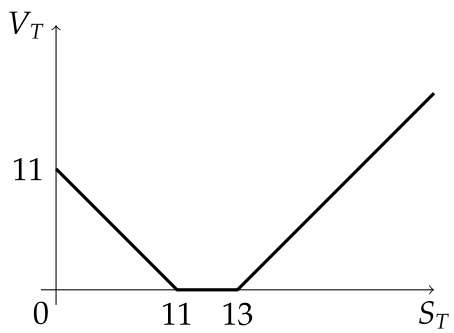
e) Nariši graf vrednosti portfelja v odvisnosti od cene delnice S_T v času $T = \frac{1}{4}$, če za izvršilni ceni velja $K_1 = 13$ EUR in $K_2 = 11$ EUR. [4 točke]

Rešitev

Če sta izvršilni ceni različni, je vrednost portfelja ob zapadlosti enaka

$$V_T = \max\{S_T - 13, 0\} + \max\{11 - S_T, 0\} = \max\{S_T - 13, 11 - S_T, 0, \}.$$

Graf funkcije $V_T(S_T)$ je na spodnji sliki.



Izplačilo portfelja opcij z različnima izvršilnima cenama.

Točkovanje

Izplačili posameznih opcij (oz. razumevanje opcij) 2 točki.
Graf vrednosti portfelja z ustreznimi oznakami 2 točki.