**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

dMFA

13. državno tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole
Koper, 10. april 2015

Prilepite nalepko s šifro

1. skupina: **Poslovna matematika**

N1	N2	N3	N4	Skupaj

Naloge rešujte samostojno. Za reševanje imate na voljo 120 minut.
Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog.

1. NALOGA

Tiskarna vsako noč štiri ure tiska časopis, ki izide naslednji dan. Pri tem lahko na petih strojih natisne 100.000 izvodov časopisa s 30 stranmi. V noči iz petka na soboto k vsakemu izvodu natisnejo še »sobotno prilogo«.

a) Kolikšna bo naklada časopisa, če bo tiskarna k 30 stranem časopisa dodala še prilogo z 10 stranmi, pri tem pa ima za tisk na voljo en stroj več?

3 točke

b) Največ koliko strani lahko ima priloga, če morajo v tiskarni natisniti 100.000 izvodov časopisa, na voljo pa imajo en stroj več, ki je za 50 % zmogljivejši od ostalih?

2 točki

c) Kakšen pa bi bil rezultat, če bi vseh pet strojev, s katerimi tiskarna tiska, nadomestila z novimi, ki so za 10 % zmogljivejši od starih?

2 točki

2. NALOGA

a) Povodenj je prizadela štiri kmete in povzročila škodo: prvemu 60.000,00 EUR, drugemu 25.000,00 EUR, tretjemu 5.000,00 EUR in četrtemu 45.000,00 EUR. Prvotne vrednosti njihovih posestev so bile ocenjene na 500.000,00 EUR, 250.000,00 EUR, 100.000,00 EUR oziroma 300.000,00 EUR.
Kmetje so dobili pomoč v znesku 105.525,00 EUR, ki so jo razdelili po obeh kriterijih hkrati, in sicer premo sorazmerno nastali škodi in premo sorazmerno vrednosti posestev. Izračunajte, koliko EUR pomoči je dobil posamezni kmet.

3 točke

b) Štiri delovne skupine morajo očistiti 5.700 m vodotokov. Dnevno očistijo 40 m, 50 m, 60 m oziroma 20 m vodotokov. Druga skupina začne z delom 4 dni za prvo, tretja 10 dni za prvo in četrta šele 5 dni za tretjo. Kolikšni bodo deli, ki jih bo opravila posamezna skupina in kdaj bo delo opravljeno?

4 točke

3. NALOGA

Prebivalstvo nekega mesta se je v preteklem letu povečalo za 12,5 ‰, tako da je mesto ob koncu leta imelo 46.572 ljudi.

a) Koliko je bilo med njimi moških in koliko žensk, če je bilo razmerje med njimi enako kot prejšnje leto, ko je bilo v mestu 22.458 moških?

6 točk

b) Za koliko odstotkov je v tem mestu letos več žensk od moških?

1 točka

4. NALOGA

Študentka Lina kupuje prenosni računalnik. Le-ta stane v dveh različnih trgovinah 1.000,00 EUR.

a) Ker kupuje preko spleta, mora 20 % plačati takoj, ostali dolg pa po devetih mesecih z obrestmi vred. Izračunajte dolžni znesek, če ji na ostanek dolga zaračunajo 6-% obresti po navadnem obrestnem računu. Koliko EUR jo v tem primeru dejansko stane računalnik?

2 točki

b) V drugi trgovini mora prav tako 20 % plačati takoj, ostanek dolga pa po devetih mesecih z obrestmi vred. Izračunajte dolžni znesek, če ji na ostanek dolga zaračunajo 9-% obresti po obrestno obrestnem računu pri mesečni kapitalizaciji in relativni obrestni meri. Koliko EUR jo v tem primeru dejansko stane računalnik?

2 točki

c) V kateri trgovini so zanjo nakupni pogoji finančno ugodnejši in za koliko EUR?

1 točka

d) Za koliko časa (let, dni) bi morala privarčevani denar 855,65 EUR vezati v banki, da bi lahko plačala računalnik po ceni 1.000,00 EUR? Banka vezane vloge obrestuje z obrestno obrestnim računom po 9-% letni obrestni meri in celoletni kapitalizaciji?

2 točki

13. državno tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole
Koper, 10. april 2015

Prilepite nalepko s šifro

2. skupina: **Statistika**

N1	N2	N3	N4	Skupaj

Naloge rešujte samostojno. Za reševanje imate na voljo 120 minut.
Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog.

1. NALOGA

Tabela 1: Gostje po vrstah občin v Sloveniji v letu 2013

Vrsta občine	**P_j %**	**Delne vsote**	**Število gostov**	
Zdraviliške občine		23,3		
Gorske občine		49,5		
Obmorske občine		67,0		
Ljubljana		81,9		
Mestne občine		90,7		
Druge občine		100,0		
Skupaj				

Vir: Statistični urad RS

a) Izračunajte strukturne odstotke za posamezne občine *(na 1 decimalno mesto natančno).*

2 točki

b) Razložite izračunani strukturni odstotek za obmorske občine.

1 točka

c) Izračunajte število gostov po posameznih občinah, če je bilo skupno 3,384.491 gostov v Sloveniji v letu 2013. *(Rezultate zaokrožite na celo število.)*

2 točki

d) Strukturo gostov po vrstah občin grafično prikažite s strukturnim krogom.

2 točki

2. NALOGA

Tabela 2: Živorojeni otroci v Sloveniji po spolu v letih od 2007 do 2013

Leto	Živorojeni otroci - skupaj	Živorojeni otroci - dečki	Živorojeni otroci - deklice	a)	b)	c)	d)
2007	19.097	9.784	9.313				
2008	21.055	10.756	10.299				
2009	21.180	10.948	10.232				
2010	21.538	11.091	10.447				
2011	21.164	10.870	10.294				
2012	21.185	10.947	10.238				
2013	20.383	10.424	9.959				

Vir: Statistični urad RS

a) Izračunajte spremembe v skupnem številu živorojenih otrok glede na leto 2010.

1 točka

b) Izračunajte spremembe v številu živorojenih dečkov od leta do leta v obliki indeksov.

1 točka

c) Koliko deklic več oz. manj se je rodilo v posameznem letu glede na predhodno leto?

1 točka

d) Izračunajte koeficiente rasti za skupno število živorojenih otrok po letih.

1 točka

e) Razložite vse izračunane kazalce za leto 2009.

2 točki

f) Koliko bi znašalo skupno število živorojenih deklic v letu 2014, če bi bila stopnja rasti za število živorojenih deklic –0,6 %?.

1 točka

3. NALOGA

Naselje »Niga« šteje 150 hiš. Ko so zbirali podatke o starosti posamezne nepremičnine (v dopolnjenih letih), so ugotovili, da je 12 % nepremičnin starih do 5 let, 28 % do 10 let, 60 % do 15 let, 80 % do 20 let, 90 % do 25 let, 96 % do 30 let, 98 % do 35 let. Nobena hiša v naselju ni starejša od 40 let.

Tabela 3: Frekvenčna porazdelitev starosti hiš v naselju »Niga«

Starost hiše v letih				

a) Opredelite razrede za razvrstitev hiš glede na starost nepremičnine.

1 točka

b) Izračunajte frekvence, relativne frekvence, kumulativo absolutnih in kumulativo relativnih frekvenc.

4 točke

c) Kolikšen odstotek hiš je starih od 11 do 15 let?

1 točka

d) Koliko hiš je starih do 25 let?

1 točka

4. NALOGA

V podjetju »Elektrončék«, d. o. o. z desetimi zaposlenimi so izvedli analizo dopusta po zaposlenih. Dobili so naslednje rezultate: dva delavca imata 29 dni letnega dopusta, po en delavec 26, 25 in 24 dni letnega dopusta, dva 23 dni, ostali pa imajo manj kot 23 dni dopusta.

a) Izračunajte tisto število dni dopusta, od katerega je polovica delavcev imela manj ali kvečjemu toliko dni dopusta.

2 točki

b) Ali lahko določimo modus iz zgoraj navedenih neurejenih podatkov? Odgovor utemeljite.

1 točka

c) Podatke je vestna administratorka uredila v naslednji tabeli. Tokrat ji pomagajte izračunati najpogostejše število dni dopusta iz urejenih podatkov. Rezultat tudi razložite. Izračun podkrepite z oceno iz grafičnega prikaza.

4 točke

Tabela 4: Frekvenčna porazdelitev števila dni dopusta za 10 zaposlenih v podjetju »Elektrončék«, d.o.o.

Število dni dopusta	**Število delavcev**
do 22	3
od 23 do 25	4
od 26 do 28	1
od 29 do 31	2
Skupaj	10

Vir: Prirejeni podatki

dMFA

Državno tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike

10. april 2015

Prilepi nalepko s šifro

Naloge rešuj samostojno. Uporaba zapiskov in literature ni dovoljena.
Dovoljena je uporaba žepnega računala.
Naloge so štiri, vsaka je vredna 20 točk.
Za reševanje imaš na voljo 120 minut. Veliko uspeha!

N1	N2	N3	N4

---

1. V nalogi obravnavamo uvrstitve slovenske alpske smučarke Tine Maze in Američanke Lindsey Vonn med prvo deseterico na tekmah svetovnega pokala.

   V spodnji tabeli je navedeno število uvrstitev Tine Maze in Lindsey Vonn na posamezna mesta med najboljših deset od začetka kariere do danes. Navedeno je tudi število točk, ki jih tekmovalka prejme za uvrstitev na posamezno mesto.

Uvrstitev	število točk	Tina Maze	Lindsey Vonn
1.	100	26	67
2.	80	28	29
3.	60	27	17
4.	50	23	18
5.	45	13	11
6.	40	16	10
7.	36	13	11
8.	32	10	10
9.	29	8	8
10.	26	8	3

Vir: Fédération Internationale de Ski (FIS)

Rezultate zaokroži na dve decimalni mesti.

a) Izračunaj odstotni delež uvrstitev posamezne smučarke na zmagovalni oder (uvrstitev med najboljše tri) med tekmami, na katerih se je uvrstila med najboljših deset. [6 točk]

b) Izračunaj povprečje števila točk, ki jih je prejela Tine Maze ob uvrstitvi v najboljšo deseterico, in mediano njenih uvrstitev med najboljšo deseterico. [6 točk]

c) Izračunaj standardni odklon števila točk, ki jih je dosegla Lindsey Vonn, ko se je uvrstila na oder za zmagovalke. [4 točke]

d) Privzemimo, da se od danes naprej Tina Maze na tekmah svetovnega pokala vedno uvrsti na oder za zmagovalke. Najmanj koliko tekem potrebuje, da bo mediana njenih uvrstitev med najboljšo deseterico postala tretje mesto? [4 točke]

2. Ob gradnji pasivne hiše nam sklad za ekološko gradnjo dodeli nepovratno subvencijo v višini 6000 EUR. Denar nam nakažejo na varčevalni račun na banki. Banka uporablja letno obrestno mero $p\,\%$ in letno obrestovanje. Ker vsega denarja ne potrebujemo takoj, ga bomo prvi del dvignili takoj, drugi del čez dve leti, ostanek pa čez štiri leta.

   Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

   a) Privzemi, da tretjino dodeljene subvencije dvignemo takoj, tretjino denarja na banki vežemo za dve leti, tretjino denarja pa vežemo za štiri leta. Vsak vezan znesek z obrestmi dvignemo po izteku vezave.
   Kolikšni so posamezni dvigi, če banka uporablja $4\,\%$ letno obrestno mero? [5 točk]

   b) Privzemi, da prejeto subvencijo med takojšnji dvig in dva depozita razporedimo tako, da so vsi trije dvigi nominalno med seboj enaki.
   Kolikšni so dvigi, če banka uporablja $4\,\%$ letno obrestno mero? [7 točk]

c) Koliko denarja moramo vezati za dve leti in koliko za štiri leta, da bomo lahko po izteku vezav dvignili zneska iz naloge b). [2 točki]

d) Privzemi, da so vsi trije dvigi nominalno enaki 2200 EUR. Kakšno letno obrestno mero uporablja banka? [6 točk]

3. Na trgu obstajajo tri obveznice istega izdajatelja, vse imajo nominalno vrednost 100 EUR.

   Prva obveznica je brezkuponska z dospetjem čez 2 leti in trenutno ceno 93,00 EUR. Druga obveznica je kuponska z letnim kuponom po 4 % nominalni obrestni meri in dospetjem čez dve leti. Njena cena je 100,60 EUR, prvi kupon bo izplačala čez natanko eno leto.

   Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

   a) Določi efektivni obrestni meri $R(0,1)$ in $R(0,2)$. [7 točk]

   b) Naj bo $R(0,3) = 4{,}25\,\%$. Tretja obveznica je obveznica z odloženim prvim kuponom in dospetjem čez 3 leta. Ta izplačuje letne kupone po 3 % nominalni obrestni meri, vendar je izplačilo prvega kupona odloženo za eno leto; izplačan je skupaj z drugim kuponom čez dve leti. Določi ceno obveznice. [5 točk]

   c) Investitor ima v portfelju 10 brezkuponskih in 5 klasičnih kuponskih obveznic ter 7 obveznic z odloženim prvim kuponom. Določi vrednost portfelja in deleže te vrednosti, ki so shranjeni v posameznem tipu obveznic. [5 točk]

d) Investitor je dokupil še 10 brezkuponskih obveznic. Kolikšen delež vrednosti novega portfelja je shranjen v brezkuponskih obveznicah? [3 točke]

4. Na trgu, na katerem je netvegana efektivna obrestna mera enaka 5 % za vsa dospetja, lahko trgujemo z delnico A. Danes je njena cena enaka 45 EUR. Finančni analitiki predvidevajo, da bo delnica vsako leto izplačala dividendo v višini 3 EUR, naslednjič bo dividenda izplačana čez natanko pol leta in nato enakomerno z enoletnimi zamiki. Z banko sklenemo terminski posel za nakup ene delnice A čez dve leti.

   Rezultate zaokroži na dve decimalni mesti.

   a) Za kolikšno izročitveno ceno se moramo dogovoriti v terminskem poslu, da je ob sklenitvi posla njegova vrednost enaka 0? [4 točke]

   b) Čez eno leto je cena delnice A enaka 46 EUR. Koliko je vreden naš terminski posel, če se obrestne mere niso spremenile? [6 točk]

c) Leto in pol po sklenitvi terminskega posla je takoj po izplačilu dividend cena delnice enaka 44 EUR, obrestne mere pa vztrajajo pri 5 % za vsa dospetja. Banka je tedaj pripravljena terminske posle, kot smo ga sklenili mi, sklepati po ceni 2 EUR.

Ali obstaja na trgu arbitražna priložnost? Če da, opiši arbitražno strategijo. [10 točk]

List s formulami

Terminski posli

- na delnico brez dividend

  $F_t = S_t(1+R)^{T-t}, \quad K = F_0$

  $V_t = (F_t - K)(1+R)^{-(T-t)}$

- na delnico z dividendo

  $F_t = S_t(1+R)^{T-t} - I_{t'}(1+R)^{T-t'}, \quad K = F_0$

  $V_t = (F_t - K)(1+R)^{-(T-t)}$

- na vrednostni papir z znanim donosom

  $F_t = S_t\left(\frac{1+R}{1+R_0}\right)^{T-t}, \quad K = F_0$

  $V_t = (F_t - K)(1+R)^{-(T-t)}$

- na menjalni tečaj

  $F_t = S_t\left(\frac{1+R_d}{1+R_f}\right)^{T-t}, \quad K = F_0$

  $V_t = N(F_t - K)(1+R_d)^{-(T-t)}$

  $V_t^1 = (F_t - K)(1+R_d)^{-(T-t)}$

- dogovor o terminski obrestni meri

  $K = R(0,S,T) = \frac{1}{T-S}\left(\frac{1+R(0,T)T}{1+R(0,S)S} - 1\right)$

  $V_t = N(T-S)(R(t,S,T)-K)\cdot\frac{1}{1+R(t,T)(T-t)}$

  $V_S = N\cdot(T-S)\cdot(R(S,T)-K)\cdot\frac{1}{1+R(S,T)(T-S)}$

Opcije

- izplačilo ob zapadlosti

  $C_T = \max\{S_T - K, 0\}$

  $P_T = \max\{K - S_T, 0\}$

- premija v času t, če delnica ne izplačuje dividend

  $\max\{S_t - K\cdot(1+R)^{-(T-t)}, 0\} \le c_t \le S_t$

  $\max\{K\cdot(1+R)^{-(T-t)} - S_t, 0\} \le p_t \le K\cdot(1+R)^{-(T-t)}$

- evropska nakupno-prodajna enakost, če delnica ne izplačuje dividend

  $p_t + S_t = c_t + K\cdot(1+R)^{-(T-t)}.$

- premija v času t, če delnica izplačuje dividende

  $I(t,T)$ je vrednost v času t vseh dividend izplačanih od t do T.

  $\max\{S_t - K\cdot(1+R)^{-(T-t)} - I(t,T), 0\} \le c_t \le S_t$

  $\max\{K\cdot(1+R)^{-(T-t)} - S_t + I(t,T), 0\} \le p_t \le K\cdot(1+R)^{-(T-t)}$

- evropska nakupno-prodajna enakost, če delnica izplačuje dividende

  $p_t + S_t = c_t + K\cdot(1+R)^{-(T-t)} + I(t,T)$

1. skupina: **Poslovna matematika - rešitve**

1. NALOGA

Tiskarna vsako noč štiri ure tiska časopis, ki izide naslednji dan. Pri tem lahko na petih strojih natisne 100.000 izvodov časopisa s 30 stranmi. V noči iz petka na soboto k vsakemu izvodu natisnejo še »sobotno prilogo«.

a) Kolikšna bo naklada časopisa, če bo tiskarna k 30 stranem časopisa dodala še prilogo z 10 stranmi, pri tem pa ima za tisk na voljo en stroj več?

3 točke

5 strojev ↑	100.000 izvodov ↑	30 strani ↓
6 strojev	x izvodov	40 strani

$$x = \frac{100.000 * 6 * 30}{5 * 40} = \underline{\mathbf{90.000\ izvodov}}$$

1 točka izračun števila strojev in strani
1 točka zapis podatkov (sklepna shema, sorazmerje) in določitev vrste sorazmerij
1 točka zapis ulomka in izračun naklade časopisa

b) Največ koliko strani lahko ima priloga, če morajo v tiskarni natisniti 100.000 izvodov časopisa, na voljo pa imajo en stroj več, ki je za 50 % zmogljivejši od ostalih?

2 točki

5 strojev ↑	30 strani ↑
6,5 strojev	x strani

$x_1 = \frac{30 * 6,5}{5}$ = **<u>39</u>** <u>strani</u> ➔ Odg.: Priloga ima lahko največ <u>9 strani.</u>

1 točka izračun števila strojev, sklepna shema, določitev vrste sorazmerij
1 točka zapis ulomka, izračun in odgovor na zastavljeno vprašanje

c) Kakšen pa bi bil rezultat, če bi vseh pet strojev, s katerimi tiskarna tiska, nadomestila z novimi, ki so za 10 % zmogljivejši od starih?

2 točki

30 strani ↑	100 % ↑
x strani	110 %

$x_2 = \frac{30*110}{100}$ = **<u>33 strani</u>** ➔ Odg.: Priloga ima lahko največ <u>3 strani.</u>

1 točka izračun odstotka zmogljivosti, sklepna shema, določitev vrste sorazmerij
1 točka zapis ulomkov, izračun in odgovor na zastavljeno vprašanje

2. NALOGA

a) Povodenj je prizadela štiri kmete in povzročila škodo: prvemu 60.000,00 EUR, drugemu 25.000,00 EUR, tretjemu 5.000,00 EUR in četrtemu 45.000,00 EUR. Prvotne vrednosti njihovih posestev so bile ocenjene na 500.000,00 EUR, 250.000,00 EUR, 100.000,00 EUR oziroma 300.000,00 EUR.
Kmetje so dobili pomoč v znesku 105.525,00 EUR, ki so jo razdelili po obeh kriterijih hkrati, in sicer premo sorazmerno nastali škodi in premo sorazmerno vrednosti posestev. Izračunajte, koliko EUR pomoči je dobil posamezni kmet.

3 točke

Kmetje	Kriterij delitve		Enostavna razmerska števila	Odgovor
	Škoda	Vrednost posesti		
1.	60.000,00$^{(:1000)}$; **60**	500.000,00$^{(:10000)}$; **50**	3000 x	**63.000,00 EUR**
2.	25.000,00$^{(:1000)}$; **25**	250.000,00$^{(:10000)}$; **25**	625 x	**13.125,00 EUR**
3.	5.000,00$^{(:1000)}$; **5**	100.000,00$^{(:10000)}$; **10**	50 x	**1.050,00 EUR**
4.	45.000,00$^{(:1000)}$; **45**	300.000,00$^{(:10000)}$; **30**	1350 x	**28.350,00 EUR**

5025 x = 105.525,00

x = 21,00

1 točka nastavitev kriterijev
1 točka izračun osnovnega deleža x
1 točka izračun deležev pomoči

b) Štiri delovne skupine morajo očistiti 5.700 m vodotokov. Dnevno očistijo 40 m, 50 m, 60 m oziroma 20 m vodotokov. Druga skupina začne z delom 4 dni za prvo, tretja 10 dni za prvo in četrta šele 5 dni za tretjo. Kolikšni bodo deli, ki jih bo opravila posamezna skupina in kdaj bo delo opravljeno?

4 točke

Kmetje	Kriterij delitve		Enostavna razmerska števila	Odgovor
	Dolžina vodotoka v m	Število dni		
1.	40	x	40 x	**1.600 m; 40 dni**
2.	50	(x – 4)	50 x – 200	**1.800 m; 36 dni**
3.	60	(x – 10)	60 x – 600	**1.800 m; 30 dni**
4.	20	((x – 10)– 5)	20 x – 300	**500 m; 25 dni**

170 x –1100 = 5.700 m

x = 40 dni

1 točka nastavitev kriterijev
1 točka izračun osnovnega deleža x
2 točki izračun deležev (m, število dni za posamezno skupino)

3. NALOGA

Prebivalstvo nekega mesta se je v preteklem letu povečalo za 12,5 ‰, tako da je mesto ob koncu leta imelo 46.572 ljudi.

a) Koliko je bilo med njimi moških in koliko žensk, če je bilo razmerje med njimi enako kot prejšnje leto, ko je bilo v mestu 22.458 moških?

6 točk

p = 12,5 ‰
C^+ = 46.572
M : Ž = 22.458 : (C – 22.458)
C = ?

1012,5 ‰ ……………. 46.572 prebivalcev
1000 ‰ ……………. x prebivalcev

$$x = \frac{1000 * 46.572}{1012,5} = 45.997,04 = \underline{\textbf{45.997 prebivalcev}}$$

1 točka nastavitev sheme za izračun celote
1 točka izračun C=>števila prebivalcev na začetku leta

d = 22.458 (moški)
C = 45.997
p = ? % moških

$$d = \frac{C . p}{100}$$

$$p = \frac{100 . d}{C} = \frac{22.458 . 100}{45.997} = \underline{\textbf{48,82492336 \% moških}}$$

% žensk = 100 % – 48,82 % = **51,17507664 % žensk**

1 točka izračun % moških
1 točka izračun % žensk

Letos:
C = 46.572
p_1 (moški) = 48,82492336 %
p_2 (ženske) = 51,17507664 %
d_1 (moški), d_2 (ženske) = ?

$$d_1 = \frac{C * p1}{100} = \frac{46572 * 48,82492336}{100} = 22738,74 = \underline{\textbf{22.739 moških}}$$

$$d_2 = \frac{C * p2}{100} = \frac{46572 * 51,17507664}{100} = 23833,26 = \underline{\textbf{23.833 žensk}}$$

$\Sigma\, d_1 + \Sigma\, d_2$ = 46.572 prebivalcev

1 točka izračun števila moških
1 točka izračun števila žensk

b) Za koliko odstotkov je v tem mestu letos več žensk od moških?

1 točka

22.739 moških ………… 100 % $\quad \mathbf{X} = \frac{1094 * 100}{22739} = \mathbf{4,81\ \%}$

1.094 žensk	…………	x %

1 točka izračun odstotka

4. NALOGA

Študentka Lina kupuje prenosni računalnik. Le-ta stane v dveh različnih trgovinah 1.000,00 EUR.

a) Ker kupuje preko spleta,mora 20 % plačati takoj, ostali dolg pa po devetih mesecih z obrestmi vred. Izračunajte dolžni znesek, če ji na ostanek dolga zaračunajo 6-% obresti po navadnem obrestnem računu. Koliko EUR jo v tem primeru dejansko stane računalnik?

2 točki

20 % od 1.000,00 = $\frac{1.000,00 * 20}{100}$ = **200,00 EUR**

1.000,00 – 200,00 = **800,00 EUR**

G + o = 800,00 + $\frac{800,00*6*9}{1200}$ = 836**,00 EUR** (dolžni znesek)

Dolžni znesek je 836,00 EUR. Računalnik jo dejansko stane **1.036,00 EUR**.

1 točka izračun dolžnega zneska
1 točka izračun dejanske cene računalnika

b) V drugi trgovini mora prav tako 20 % plačati takoj, ostanek dolga pa po devetih mesecih z obrestmi vred. Izračunajte dolžni znesek, če ji na ostanek dolga zaračunajo 9-% obresti po obrestno obrestnem računu pri mesečni kapitalizaciji in relativni obrestni meri. Koliko EUR jo v tem primeru dejansko stane računalnik?

2 točki

20 % od 1.000,00 = $\frac{1.000,00 * 20}{100}$ = 200,00 EUR

1.000,00 – 200,00 = 800,00 EUR

r´ = $1 + \frac{p´}{100} = 1 + \frac{0,75}{100} = 1,0075$

$G_n = G_0 * r´^{(n*m)}$

$G_n = 800,00 *(1,0075)^{(9)}$ = **855,65 EUR**

Dolžni znesek je 855,65 EUR. Računalnik jo dejansko stane **1.055,65 EUR**.

1 točka izračun dolžnega zneska
1 točka izračun dejanske cene računalnika

c) V kateri trgovini so zanjo nakupni pogoji finančno ugodnejši in za koliko EUR?

1 točka

Izračun: 1.055,65 –1.036,00 = **19,65** EUR (ugodneje preko spleta)

1 točka zapis odgovora

d) Za koliko časa (let, dni) bi morala privarčevani denar 855,65 EUR vezati v banki, da bi lahko plačala računalnik po ceni 1.000,00 EUR? Banka vezane vloge obrestuje z obrestno obrestnim računom po 9-% letni obrestni meri in celoletni kapitalizaciji?

2 točki

r = $1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{9}{100} = 1,09$

$G_n = G_0 * r^n$

n = $\frac{\log \frac{Gn}{Go}}{\log r} = \frac{\log\left(\frac{1.000,00}{855,65}\right)}{\log 1,09}$ = **1,81 let** ➔ tj. 1 leto in 296 dni

Odgovor: Privarčevani denar bi morala vezati v banki za 1 leto in 296 dni.

1 točka nastavitev enačbe za izračun časa in vstavitev podatkov
1 točka izračun časa v letih in pretvorba (let, dni)

13. državno tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole
Koper, 10. april 2015

2. skupina: **Statistika - rešitve**

1. NALOGA

Tabela 1: Gostje po vrstah občin v Sloveniji v letu 2013

Vrsta občine	P_j %	Delne vsote	P_j^0	Število gostov
Zdraviliške občine	23,3	23,3	84	788.586
Gorske občine	26,2	49,5	94	886.737
Obmorske občine	17,5	67,0	63	592.286
Ljubljana	14,9	81,9	54	504.289
Mestne občine	8,8	90,7	32	297.835
Druge občine	9,3	100,0	33	314.758
Skupaj	100,0		360	3,384.491

Vir: Statistični urad RS

a) Izračunajte strukturne odstotke za posamezne občine *(na 1 decimalno mesto natančno).*

2 točki

1 točka za tri pravilno izračune strukturne odstotke

b) Razložite izračunani strukturni odstotek za obmorske občine.

1 točka

V obmorskih občinah je bilo v letu 2013 17,5 % gostov.

c) Izračunajte število gostov po posameznih občinah, če je bilo skupno 3,384.491 gostov v Sloveniji v letu 2013. *(Rezultate zaokrožite na celo število.)*

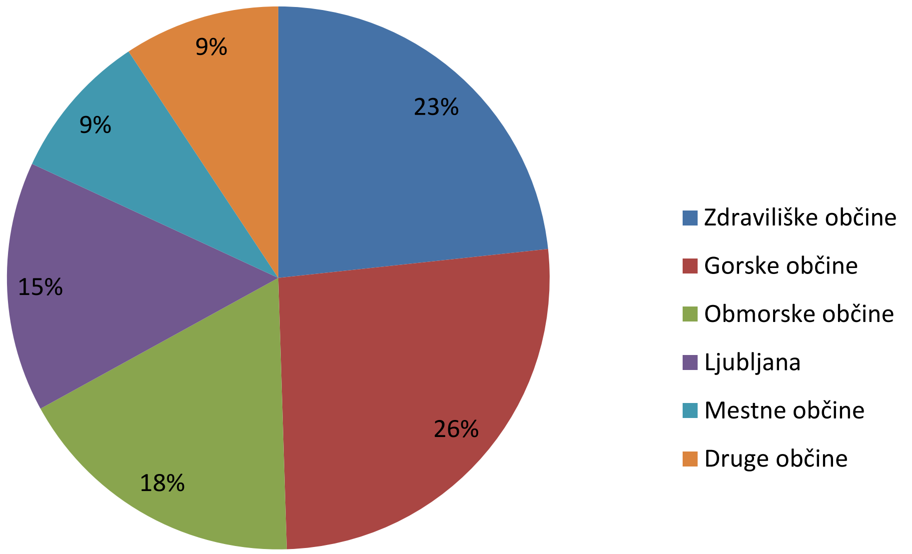
2 točki

1 točka za tri pravilno izračunana števila gostov

d) Strukturo gostov po vrstah občin grafično prikažite s strukturnim krogom.

2 točki

0,5 točke za pravilno izračunane stopinje
0,5 točke naslov, legenda
1 točka pravilno vrisani strukturni deleži v strukturni krog



Struktura gostov po vrstah občin v Sloveniji v letu 2013

2. NALOGA

Tabela 2: Živorojeni otroci v Sloveniji po spolu v letih od 2007 do 2013

Leto	**Živorojeni otroci - skupaj**	**Živorojeni otroci - dečki**	**Živorojeni otroci - deklice**	**a)**	**b)**	**c)**	**d)**
2007	19.097	9.784	9.313	88,67	-	-	-
2008	21.055	10.756	10.299	97,76	109,93	986	1,103
2009	21.180	10.948	10.232	98,34	101,79	−67	1,006
2010	21.538	11.091	10.447	100,00	101,31	215	1,017
2011	21.164	10.870	10.294	98,26	98,01	−153	0,983
2012	21.185	10.947	10.238	98,36	100,71	−56	1,001
2013	20.383	10.424	9.959	94,64	95,22	−279	0,962

Vir: Statistični urad RS

a) Izračunajte spremembe v skupnem številu živorojenih otrok glede na leto 2010.

1 točka

b) Izračunajte spremembe v številu živorojenih dečkov od leta do leta v obliki indeksov.

1 točka

c) Koliko deklic več oz. manj se je rodilo v posameznem letu glede na predhodno leto?

1 točka

d) Izračunajte koeficiente rasti za skupno število živorojenih otrok po letih.

1 točka

e) Razložite vse izračunane kazalce za leto 2009.

2 točki

0,5 točke za vsak pravilno razložen rezultat

$I_{2009/2010}$ = 98,34 Leta 2009 je bilo za 1,66 % manj živorojenih otrok kot leta 2010.

V_{2009} = 101,79 Leta 2009 je bilo za 1,79 % več živorojenih dečkov kot leta 2008.

$D_{2009/2008}$ = −67 Leta 2009 se je rodilo 67 deklic manj kot leta 2008.

K_{2009} = 1,006 **Leta 2009 je bilo za 0,6 % več živorojenih otrok kot leta 2008.**

f) Koliko bi znašalo skupno število živorojenih deklic v letu 2014, če bi bila stopnja rasti za število živorojenih deklic –0,6 %?.

1 točka

Št. deklic 2014 = 9.959 × 0,994 = 9.899 živorojenih deklic

3. NALOGA

Naselje »Niga« šteje 150 hiš. Ko so zbirali podatke o starosti posamezne nepremičnine (v dopolnjenih letih), so ugotovili, da je 12 % nepremičnin starih do 5 let, 28 % do 10 let, 60 % do 15 let, 80 % do 20 let, 90 % do 25 let, 96 % do 30 let, 98 % do 35 let. Nobena hiša v naselju ni starejša od 40 let.

Tabela 3: Frekvenčna porazdelitev starosti hiš v naselju »Niga«

Starost hiše v letih	f_j	f_j^o	F_j	F_j^o
do 5	18	0,120	18	0,120
od 6 do 10	24	0,160	42	0,280
od 11 do 15	48	0,320	90	0,600
od 16 do 20	30	0,200	120	0,800
od 21 do 25	15	0,100	135	0,900
od 26 do 30	9	0,060	144	0,960
od 31 do 35	3	0,020	147	0,980
od 36 do 40	3	0,020	150	1,000
Skupaj	150	1,000		

a) Opredelite razrede za razvrstitev hiš glede na starost nepremičnine.

1 točka

b) Izračunajte frekvence, relativne frekvence, kumulativo absolutnih in kumulativo relativnih frekvenc.

4 točke

1 točka za pravilno izračunane absolutne frekvence
1 točka za pravilno izračunane relativne frekvence
1 točka za pravilno izračunane kumulative absolutnih frekvenc
1 točka za pravilno izračunane kumulative relativnih frekvenc

c) Kolikšen odstotek hiš je starih od 11 do 15 let?

1 točka

32 odstotkov hiš je starih od 11 do 15 let.

d) Koliko hiš je starih do 25 let?

1 točka

135 hiš je starih do 25 let.

4. NALOGA

V podjetju »Elektronček«, d. o. o. z desetimi zaposlenimi so izvedli analizo dopusta po zaposlenih. Dobili so naslednje rezultate: dva delavca imata 29 dni letnega dopusta, po en delavec 26, 25 in 24 dni letnega dopusta, dva 23 dni, ostali pa imajo manj kot 23 dni dopusta.

a) Izračunajte tisto število dni dopusta, od katerega je polovica delavcev imela manj ali kvečjemu toliko dni dopusta.

2 točki

R_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_i		< 23		23	23	24	25	26	29	29

$$R = \frac{N+1}{2} = \frac{10+1}{2} = 5{,}5$$

$$Me = \frac{23+24}{2} = 23{,}5 \ dni \ dopusta$$

Odgovor: Polovica delavcev je imela manj ali k večjemu 23,5 dni dopusta, polovica delavcev pa je imela več dni dopusta.

0,5 točke za pravilno sestavljeno ranžirno vrsto
0,5 točke za pravilno izračunan rang
0,5 točke za pravilno izračunano mediano
0,5 točke za pravilno pojasnilo mediane

b) Ali lahko določimo modus iz zgoraj navedenih neurejenih podatkov? Odgovor utemeljite.

1 točka

Modusa NE moremo določiti, ker ne vemo nič o morebitnem večkratnem pojavljanju istega števila dni dopusta treh delavcev z najmanjšim dopustom.

0,5 točke za pravilni odgovor NE
0,5 točke za pravilno utemeljitev odgovora

c) Podatke je vestna administratorka uredila v naslednji tabeli. Tokrat ji pomagajte izračunati najpogostejše število dni dopusta iz urejenih podatkov. Rezultat tudi razložite. Izračun podkrepite z oceno iz grafičnega prikaza.

4 točke

Tabela 4: Frekvenčna porazdelitev števila dni dopusta za 10 zaposlenih v podjetju »Elektronček«, d.o.o.

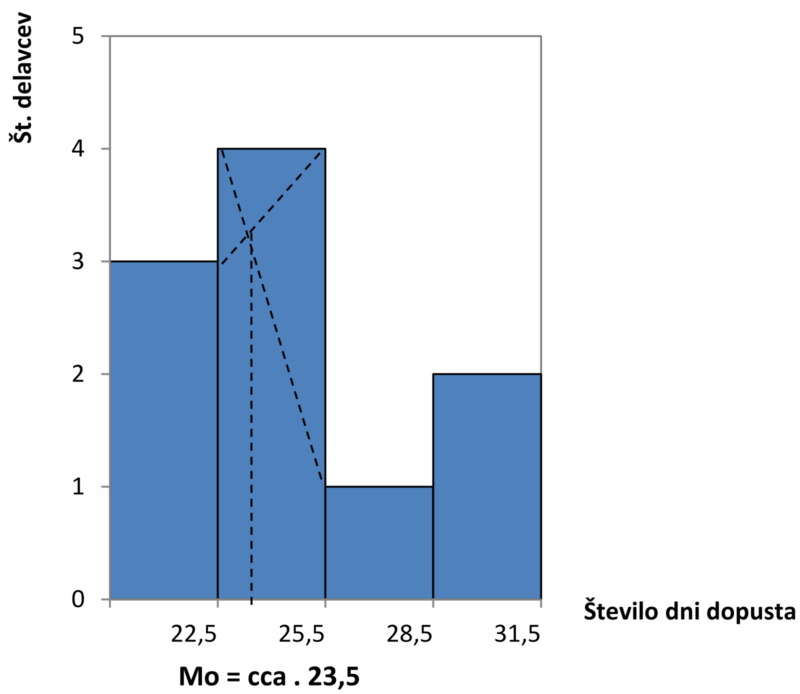
Število dni dopusta	Število delavcev
do 22	3
od 23 do 25	4
od 26 do 28	1
od 29 do 31	2
Skupaj	10

Vir: Prirejeni podatki

$$Mo = y_{o,\min} + d_o \cdot \frac{f_o - f_{-1}}{2 \cdot f_o - f_{-1} - f_{+1}}$$

$$Mo = 22{,}5 + 3 \cdot \frac{4-3}{2 \cdot 4 - 3 - 1} = 23{,}25 dni$$

Odgovor: Najpogostejše število dni dopusta je 23,25 dneva.



Frekvenčna porazdelitev števila dni dopusta za 10 zaposlenih v podjetju »Elektronček«, d.o.o.

1 točka za pravilno vstavljene vrednosti v obrazec za izračun modusa
0,5 točke za pravilno izračunan modus
0,5 točke za pravilno pojasnilo modusa
1 točka za pravilno narisan grafični prikaz histograma
1 točka za pravilno grafično oceno modusa
Odbijemo 0,5 točke, če manjka naslov grafikona; 0,5 točke če manjkajo oznake osi.

Državno tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike

10. april 2015

Rešitve in točkovnik

Točke z zvezdico so postopkovne točke in jih tekmovalec dobi tudi ob prenosu napake. Točke brez zvezdice tekmovalec dobi le ob popolnem ujemanju rezultatov z objavljenimi rešitvami.

---

1. V nalogi obravnavamo uvrstitve slovenske alpske smučarke Tine Maze in Američanke Lindsey Vonn med prvo deseterico na tekmah svetovnega pokala.

   V spodnji tabeli je navedeno število uvrstitev Tine Maze in Lindsey Vonn na posamezna mesta med najboljših deset od začetka kariere do danes. Navedeno je tudi število točk, ki jih tekmovalka prejme za uvrstitev na posamezno mesto.

Uvrstitev	Število točk	Tina Maze	Lindsey Vonn
1.	100	26	67
2.	80	28	29
3.	60	27	17
4.	50	23	18
5.	45	13	11
6.	40	16	10
7.	36	13	11
8.	32	10	10
9.	29	8	8
10.	26	8	3

Vir: Fédération Internationale de Ski (FIS)

Rezultate zaokroži na dve decimalni mesti.

a) Izračunaj odstotni delež uvrstitev posamezne smučarke na zmagovalni oder (uvrstitev med najboljše tri) med tekmami, na katerih se je uvrstila med najboljših deset. [6 točk]

Rešitev

Tina Maze ima

$$26 + 28 + 27 + \cdots + 8 = 172$$

uvrstitev med prvih deset in

$$26 + 28 + 27 = 81$$

uvrstitev med prve tri.

Lindsey Vonn ima

$$67 + 29 + 17 + \cdots + 3 = 184$$

uvrstitev med prvih deset in

$$67 + 29 + 17 = 113$$

uvrstitev med prve tri.

Delež uvrstitev na zmagovalni oder pri Tini Maze je

$$\frac{81}{172} = 47{,}09\,\%,$$

pri Lindsey Vonn pa

$$\frac{113}{184} = 61{,}41\,\%.$$

Točkovanje

Število uvrstitev med prvih deset 1+1 točka.

Število uvrstitev med prve tri 1+1 točka.

Deleža 1+1 točka.

b) Izračunaj povprečje števila točk, ki jih je prejela Tine Maze ob uvrstitvi v najboljšo deseterico, in mediano njenih uvrstitev med najboljšo deseterico. [6 točk]

Rešitev

Povprečno število točk Tine Maze je tehtana (utežena) aritmetična sredina

$$\mu_{TM} = \frac{100 \cdot 26 + 80 \cdot 28 + 60 \cdot 27 + \cdots + 26 \cdot 8}{172} = \frac{10\,063}{172} = 58{,}51.$$

Mediana uvrstitev je srednja uvrstitev, če jih uredimo od najboljše do najslabše.

Ker je vseh uvrstitev med najboljšo deseterico 172, je mediana povprečje 86. in 87. najboljše uvrstitve.

Uvrstitev med najboljše tri je 81, med najboljše štiri pa $81 + 23 = 104$.

Zato je mediana četrto mesto.

Točkovanje

Formula za tehtano povprečje in njena uporaba 1+1 točka.

Povprečje 1 točka.

Ugotovitev, da je mediana povprečje 86. in 87. uvrstitve, 1 točka.

Kumulativne frekvence 1 točka.

Mediana 1 točka.

c) Izračunaj standardni odklon števila točk, ki jih je dosegla Lindsey Vonn, ko se je uvrstila na oder za zmagovalke. [4 točke]

Rešitev

Povprečno število točk Lindsey Vonn, ko se je uvrstila med najboljše tri, je

$$\mu_{LV} = \frac{100 \cdot 67 + 80 \cdot 29 + 60 \cdot 17}{113} = \frac{10\,040}{113} = 88{,}85.$$

Disperzija je

$$\sigma^2 = \frac{100^2 \cdot 67 + 80^2 \cdot 29 + 60^2 \cdot 17}{113} - \mu_{LV}^2 = 219{,}03.$$

Standardni odklon je

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 14{,}80.$$

Točkovanje

Povprečje 1 točka.

Disperzija 1+1 točka.*

Standardni odklon 1 točka.*

d) Privzemimo, da se od danes naprej Tina Maze na tekmah svetovnega pokala vedno uvrsti na oder za zmagovalke. Najmanj koliko tekem potrebuje, da bo mediana njenih uvrstitev med najboljšo deseterico postala tretje mesto? [4 točke]

Rešitev

Tina Maze ima $172 - 81 = 91$ uvrstitev od četrtega do desetega mesta.

Da bo mediana njenih uvrstitev tretje mesto, mora imeti vsaj 92 uvrstitev med prve tri.

Potrebuje torej še 11 tekem.

Točkovanje

Število uvrstitev od četrtega do desetega mesta 1 točka.

Potrebno število uvrstitev do tretjega mesta 1 točka.

Odgovor 2 točki.

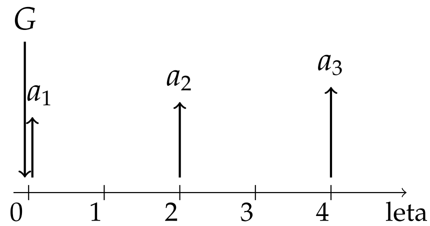
2. Ob gradnji pasivne hiše nam sklad za ekološko gradnjo dodeli nepovratno subvencijo v višini 6000 EUR. Denar nam nakažejo na varčevalni račun na banki. Banka uporablja letno obrestno mero p % in letno obrestovanje. Ker vsega denarja ne potrebujemo takoj, ga bomo prvi del dvignili takoj, drugi del čez dve leti, ostanek pa čez štiri leta.

   Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

   a) Privzemi, da tretjino dodeljene subvencije dvignemo takoj, tretjino denarja na banki vežemo za dve leti, tretjino denarja pa vežemo za štiri leta. Vsak vezan znesek z obrestmi dvignemo po izteku vezave.
   Kolikšni so posamezni dvigi, če banka uporablja 4 % letno obrestno mero? [5 točk]

   Rešitev

   Prejeta subvencija znaša $G = 6000$ EUR, od tega 2000 EUR dvignemo takoj, 2000 EUR vežemo za dve leti, ostalih 2000 EUR pa vežemo za štiri leta.
   Vsak naslednji dvig je zaradi obrestovanja višji od predhodnega.



   Letni obrestni faktor je $r = 1 + \frac{4}{100} = 1{,}04$.
   Prvi dvig je enak $a_1 = 2000$ EUR.
   Drugi dvig je enak $a_2 = 2000 \cdot 1{,}04^2 = 2163{,}20$ EUR.
   Tretji dvig je enak $a_3 = 2000 \cdot 1{,}04^4 = 2339{,}72$ EUR.

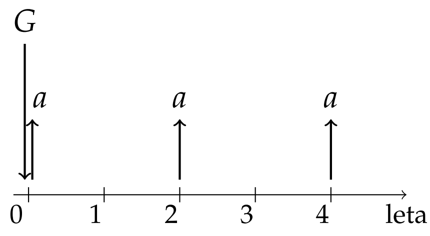
   Točkovanje

   Shema denarnih tokov (oz. razumevanje naloge) 1 točka.
   Letni obrestni faktor 1 točka.
   Višina posameznega dviga 1+1+1 točka.

   b) Privzemi, da prejeto subvencijo med takojšnji dvig in dva depozita razporedimo tako, da so vsi trije dvigi nominalno med seboj enaki.
   Kolikšni so dvigi, če banka uporablja 4 % letno obrestno mero? [7 točk]

   Rešitev

   Glavnica je enaka $G = 6000$ EUR, vsi trije dvigi so enaki a.
   Letni obrestni faktor je $r = 1 + \frac{4}{100} = 1{,}04$.
   Denarne tokove po letih prikazuje spodnja shema.



Redukcijski termin je trenutek zadnjega dviga. Z načelom ekvivalence glavnic dobimo

$$ar^4 + ar^2 + a = Gr^4.$$

Od tod izračunamo

$$a = \frac{Gr^4}{r^4 + r^2 + 1} = \frac{6000 \cdot 1{,}04^4}{1{,}04^4 + 1{,}04^2 + 1} = 2158{,}77 \text{ EUR}.$$

Točkovanje

Shema denarnih tokov (oz. razumevanje naloge) 2 točki.
Enačba na osnovi ekvivalence glavnic 2 točki.
Razrešitev enačbe za a in rezultat 2+1 točka.*

c) Koliko denarja moramo vezati za dve leti in koliko za štiri leta, da bomo lahko po izteku vezav dvignili zneska iz naloge b). [2 točki]

Rešitev

Za dve leti moramo vezati $ar^{-2} = 2158{,}77 \cdot 1{,}04^{-2} = 1995{,}90$ EUR.
Za štiri leta moramo vezati $ar^{-4} = 2158{,}77 \cdot 1{,}04^{-4} = 1845{,}33$ EUR.

Točkovanje

Višini vezav 1+1 točka.*

d) Privzemi, da so vsi trije dvigi nominalno enaki 2200 EUR. Kakšno letno obrestno mero uporablja banka? [6 točk]

Rešitev

Glavnica je enaka $G = 6000$ EUR. Vsi trije dvigi so enaki $a = 2200$ EUR.
Rešiti moramo enačbo

$$ar^4 + ar^2 + a = Gr^4.$$

Označimo $x = r^2$ in dobimo kvadratno enačbo

$$\begin{aligned} 3800x^2 - 2200x - 2200 &= 0, \\ 19x^2 - 11x - 11 &= 0, \end{aligned}$$

ki ima rešitvi $x_1 = -0{,}5246$ in $x_2 = 1{,}1036$.
Prva rešitev ni smiselna, zato je $r = \sqrt{1{,}1036} = 1{,}0505$.
Letna obresna mera, ki jo uporablja banka, je 5,05 %.

Točkovanje

Enačba na osnovi ekvivalence glavnic 1 točka.
Kvadratna enačba 1+1 točka.*
Rešitvi kvadratne enačbe 1 točka.*
Letni obrestni faktor 1 točka.
Letna obrestna mera 1 točka.
Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravilni rešitvi.

3. Na trgu obstajajo tri obveznice istega izdajatelja, vse imajo nominalno vrednost 100 EUR.

Prva obveznica je brezkuponska z dospetjem čez 2 leti in trenutno ceno 93,00 EUR. Druga obveznica je kuponska z letnim kuponom po 4 % nominalni obrestni meri in dospetjem čez dve leti. Njena cena je 100,60 EUR, prvi kupon bo izplačala čez natanko eno leto.

Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

a) Določi efektivni obrestni meri $R(0,1)$ in $R(0,2)$. [7 točk]

Rešitev

Ceno obveznice dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.

Označimo diskontna faktorja $D(0,1) = \dfrac{1}{1+R(0,1)} = x$ in $D(0,2) = \dfrac{1}{(1+R(0,2))^2} = y$.

Dobimo sistem enačb:

$$100y = 93 \qquad \Rightarrow y = \frac{93}{100} = 0{,}93$$

$$4x + 104y = 100{,}6 \qquad \Rightarrow x = \frac{100{,}6 - \frac{104 \cdot 93}{100}}{4} = 0{,}97$$

Obrestni meri sta $R(0,1) = \frac{1}{x} - 1 = 3{,}09\,\%$ in $R(0,2) = \sqrt{\frac{1}{y}} - 1 = 3{,}70\,\%$.

Točkovanje

Enačba za $D(0,2)$ in njena rešitev 1+1 točka.

Enačba za $D(0,1)$ in njena rešitev 2+1 točka.

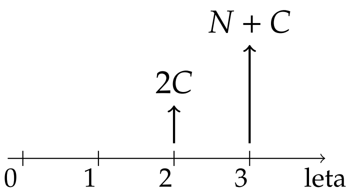
Obrestni meri 1+1 točka.

b) Naj bo $R(0,3) = 4{,}25\,\%$. Tretja obveznica je obveznica z odloženim prvim kuponom in dospetjem čez 3 leta. Ta izplačuje letne kupone po 3 % nominalni obrestni meri, vendar je izplačilo prvega kupona odloženo za eno leto; izplačan je skupaj z drugim kuponom čez dve leti. Določi ceno obveznice. [5 točk]

Rešitev

Posamezni kupon znaša $C = 0{,}03 \cdot 100 = 3$ EUR. Dvojni kupon $2C = 6$ EUR je izplačan čez dve leti, zadnji kupon skupaj z nominalno vrednostjo pa ob dospetju.

Ceno obveznice dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.



$$P = \frac{6}{(1+0{,}037)^2} + \frac{103}{(1+0{,}0425)^3} = 96{,}49 \text{ EUR}$$

Točkovanje

Višina kupona 1 točka.

Shema denarnih tokov in njihove vrednosti (oz. razumevanje obveznice) 1 točka.

Formula za vrednotenje obveznic 1 točka.

Cena obveznice 1+1 točka.*

c) Investitor ima v portfelju 10 brezkuponskih in 5 klasičnih kuponskih obveznic ter 7 obveznic z odloženim prvim kuponom. Določi vrednost portfelja in deleže te vrednosti, ki so shranjeni v posameznem tipu obveznic. [5 točk]

Rešitev

Vrednost portfelja $\theta = (10, 5, 7)$ je vsota vrednosti njegovih komponent,

$$V_\theta = 10 \cdot 93 + 5 \cdot 100{,}6 + 7 \cdot 96{,}49 = 2108{,}43 \text{ EUR}.$$

Delež brezkuponskih obveznic je $\dfrac{10 \cdot 93}{2108, 43} = 44{,}11\,\%$.

Delež klasičnih kuponskih obveznic je $\dfrac{5 \cdot 100, 6}{2108{,}43} = 23{,}86\%$.

Delež obveznic z odloženim kuponom je $1 - 0{,}4411 - 0{,}2386 = 32{,}03\,\%$.

Točkovanje

Vrednost portfelja 1+1 točka.*
Deleži posameznih obveznic 1+1+1 točka.

d) Investitor je dokupil še 10 brezkuponskih obveznic. Kolikšen delež vrednosti novega portfelja je shranjen v brezkuponskih obveznicah? [3 točke]

Rešitev

Vrednost novega portfelja $\theta' = (20, 5, 7)$ je

$$V_{\theta'} = V_\theta + 10 \cdot 93 = 3038{,}43 \text{ EUR}.$$

Novi delež brezkuponskih obveznic je

$$\frac{20 \cdot 93}{3038{,}43} = 61{,}22\,\%.$$

Točkovanje

Vrednost portfelja 1+1 točka.*
Delež brezkuponskih obveznic 1 točka.

4. Na trgu, na katerem je netvegana efektivna obrestna mera enaka 5 % za vsa dospetja, lahko trgujemo z delnico A. Danes je njena cena enaka 45 EUR. Finančni analitiki predvidevajo, da bo delnica vsako leto izplačala dividendo v višini 3 EUR, naslednjič bo dividenda izplačana čez natanko pol leta in nato enakomerno z enoletnimi zamiki. Z banko sklenemo terminski posel za nakup ene delnice A čez dve leti.

   Rezultate zaokroži na dve decimalni mesti.

   a) Za kolikšno izročitveno ceno se moramo dogovoriti v terminskem poslu, da je ob sklenitvi posla njegova vrednost enaka 0? [4 točke]

   Rešitev

   Sedanja cena delnice je $S_0 = 45$ EUR, dividendi v višini $d = 3$ EUR bosta izplačani čez pol leta in čez eno leto in pol.

   Izročitveno ceno terminskega posla dobimo tako, da od sedanje cene delnice, obrestovane na čas ročnosti posla, odštejemo vse donose delnice, obrestovane na čas ročnosti posla. Dobimo

$$K = S_0 \cdot (1 + R)^2 - d \cdot (1 + R)^{\frac{3}{2}} - d \cdot (1 + R)^{\frac{1}{2}},$$
$$K = 45 \cdot 1{,}05^2 - 3 \cdot 1{,}05^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 1{,}05^{\frac{1}{2}} = 43{,}31 \text{ EUR}.$$

   Izročitvena cena mora biti 43,31 EUR.

   Točkovanje

   Formula za izročitveno ceno z dvema dividendama 2 točki.

   Izročitvena cena 2 točki.

   Za formulo za izročitveno ceno z eno dividendo damo 1 točko.

   b) Čez eno leto je cena delnice A enaka 46 EUR. Koliko je vreden naš terminski posel, če se obrestne mere niso spremenile? [6 točk]

   Rešitev

   Po enem letu je vrednost delnice enaka $S_1 = 46$ EUR.

   Vrednost posla v času t dobimo tako, da najprej določimo izročitveno ceno, ki bi si jo lahko danes dogovorili s sklenitvijo terminskega posla z enako ročnostjo. Dobimo

$$F_1 = S_1 \cdot (1 + R) - d \cdot (1 + R)^{\frac{1}{2}},$$
$$F_1 = 46 \cdot 1{,}05 - 3 \cdot 1{,}05^{\frac{1}{2}} = 45{,}23 \text{ EUR}$$

   Nato diskontiramo razliko v izročitvenih cenah

$$V_1 = (F_1 - K) \cdot (1 + R)^{-1},$$
$$V_1 = (45{,}23 - 43{,}31) \cdot 1{,}05^{-1} = 1{,}82 \text{ EUR}.$$

   Točkovanje

   Nova izročitvena cena 2+1 točka.*

   Vrednost posla 2+1 točka.*

   Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravilni rešitvi.

c) Leto in pol po sklenitvi terminskega posla je takoj po izplačilu dividend cena delnice enaka 44 EUR, obrestne mere pa vztrajajo pri 5 % za vsa dospetja. Banka je tedaj pripravljena terminske posle, kot smo ga sklenili mi, sklepati po ceni 2 EUR.

Ali obstaja na trgu arbitražna priložnost? Če da, opiši arbitražno strategijo. [10 točk]

Rešitev

Po enem letu in pol je vrednost delnice enaka $S_{3/2} = 44$ EUR, naš terminski posel pa je vreden

$$F_{3/2} = S_{3/2} \cdot (1 + R)^{\frac{1}{2}},$$
$$F_{3/2} = 44 \cdot 1{,}05^{\frac{1}{2}} = 45{,}09 \text{ EUR},$$

$$V_{3/2} = (F_{3/2} - K) \cdot (1 + R)^{-1/2},$$
$$V_{3/2} = (45{,}09 - 43{,}31) \cdot 1{,}05^{-1/2} = 1{,}73 \text{ EUR}.$$

Banka ponuja sklenitev terminskega posla po drugačni ceni, zato na trgu obstaja arbitraža.

Bančna ponudba kaže, da so investitorji za opisani terminski posel pripravljeni plačati več, kot znaša njegova poštena cena, zato se ga splača prodajati tudi nam.

Za vsak prodani posel lahko pripravimo naslednjo arbitražno strategijo:

Ob času $t = 3/2$:

- Na banki si za pol leta sposodimo 42 EUR,
- prodamo terminski posel po ceni 2 EUR in
- kupimo delnico po ceni 44 EUR.

Neto denarni tok je enak 0.

Ob času $t = 2$:

- Delnico prodamo kupcu terminskega posla po izročitveni ceni 43,31 EUR in
- vrnemo sposojeni denar z obrestmi $42 \cdot (1 + R)^{\frac{1}{2}} = 42 \cdot 1{,}05^{\frac{1}{2}} = 43{,}04$ EUR.

Ostane nam $43{,}31 - 43{,}04 = 0{,}27$ EUR netveganega zaslužka.

Točkovanje

Poštena vrednost terminskega posla 1+1 točka.*
Ugotovitev, da je možna arbitraža, 1 točka.
Ugotovitev, da je treba terminski posel prodati, 2 točki.*
Implementacija arbitraže:

- *Dejanja v času t = 3/2 skupaj 2* točki.*
- *Dejanja v času t = 2 skupaj 2* točki.*
- *Netvegani zaslužek oz. utemeljitev, da gre res za arbitražo, 1* točka.*